§ 4. Нечіткі задачі багатокритеріальної оптимізації

Задача прийняття рішень із нечітко визначеною ціллю (підхід Белмана – Лотфізаде). Основою цього підходу є визначення цілі задачі як нечіткої підмножини універсальної множини альтернатив.

Нехай *X* – універсальна множина альтернатив. Нечіткою ціллю у *X* будемо називати нечітку підмножину *X*, яку будемо позначати через *G* і задавати функцією належності $\mu_G : X \to [0,1]$. Якщо, наприклад, *X* – числова вісь, то нечіткою ціллю може бути нечітка множина типу "величина *x* повинна приблизно дорівнювати 5" або "бажано, щоб величина *x* була значно більшою за 10" і т. п. Нечітка множина альтернатив також описується нечіткою підмножиною універсальної множини *X*. У наведеному прикладі нечітка множина альтернатив може мати, наприклад, такий вигляд: "*x* повинний бути не занадто великим" чи "*x* не повинне бути набагато більше 50" і т. п.

Більш загальною є постановка задачі, у якій нечітка ціль і нечітка множина альтернатив є підмножинами різних універсальних множин. Нехай *X* – універсальна множина альтернатив, елементи якої оцінюються за вектором критеріїв $f = (f_1, \dots, f_m)$, який задає відображення *X* в універсальну множину оцінок *Y*, тобто $f : X \to Y$. В універсальній множині оцінок *Y* задана ціль у вигляді нечіткої множини $\mu_G : Y \to [0,1]$.

Задача при цьому зводиться до попередньої постановки (тобто до випадку, коли ціль – нечітка підмножина *X*) так. Визначимо нечітку множина альтернатив $\overline{\mu}_G$, що забезпечує досягнення заданої цілі μ_G. Ця множина є прообразом нечіткої множини μ_G при відображенні *f*, тобто за визначенням прообразу нечіткої множини маємо: $\overline{\mu}_G(x) = \mu_G(f(x)), \quad x \in X$.

Після цього вихідна задача розглядається як задача досягнення нечіткої мети $\overline{\mu}_G$ на нечіткій множині альтернатив.

Перейдемо тепер до визначення розв'язку задачі прийняття рішень із нечітко визначеною ціллю. Розв'язати цю задачу – означає досягти цілі та задовольнити обмеження, причому в даній нечіткій постановці варто говорити не просто про досягнення цілі, а про її досягнення з тим або іншим ступенем, причому варто враховувати і ступінь належності до множини альтернатив.

За підходом Белмана–Лотфізаде ці фактори враховуються так. Нехай, наприклад, деяка альтернатива *x* забезпечує досягнення мети із ступенем $\mu_G(x)$ і належить множині альтернатив зі ступенем $\mu_D(x)$. Тоді покладається, що ступінь належності цієї альтернативи розв'язку задачі дорівнює мінімальному з цих чисел. Іншими словами, альтернатива зі ступенем, наприклад, 0,3, із тим же ступенем належить нечіткому розв'язку, незважаючи на те, що вона забезпечує досягнення цілі зі ступенем, рівним, наприклад, 0,8.

Таким чином, нечітким розв'язком задачі досягнення нечіткої цілі на нечіткій множині альтернатив називається перетин нечітких множин цілі й альтернатив, тобто функція належності розв'язку має вигляд $\mu(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\}$.

За наявності декількох цілей нечіткий розв'язок описується функцією належності: $\mu(x) = \min\left\{\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_m}(x), \mu_D(x)\right\}$.

Якщо функції належності до множини альтернатив і різні цілі розрізняються по важливості, а також задані відповідні коефіцієнти відносної важливості ступеню належності до множини альтернатив $\lambda_0 > 0$ і відносної важливості цілей $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$, то функція належності розв'язку визначається виразом:

$$\mu(x) = \min\left\{\lambda_1 \mu_{G_1}(x), \ldots, \lambda_m \mu_{G_m}(x), \mu_D(x)\right\}.$$

Приклад 7.4.1. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, а нечітка ціль і множина альтернатив задаються табл. 7.4.1:

Таблиця 7.4.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	0,9	0,7	0,5
$\mu_D(x)$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Тоді розв'язок μ отримаємо у табл. 7.4.2.

Таблиця 7.4.2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Словами ціль і множину альтернатив можна інтерпретувати, наприклад, так:

G = "x повинен бути близьким до 7", D = "x повинен бути близьким до 5". Тоді отриманий розв'язок: "x повинен бути близьким до 6".

Якщо виникає потреба у визначенні конкретної альтернативи, що є розв'язком задачі з нечіткою ціллю, то це можна робити по-різному.

Один із найбільш розповсюджених способів полягає у виборі альтернативи x^*, що має максимальну ступінь належності нечіткому розв'язку, тобто:

$$\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\}.$$

Такі альтернативи називають *максимізуючими розв'язками.*

Багатокритеріальні задачі з нечіткою множиною альтернатив. Спочатку розглянемо звичайну (однокритеріальну) задачу математичного програмування з нечіткою множиною альтернатив, а потім узагальнимо отримані результати на випадок багатокритеріальної задачі.

Нехай X – універсальна множина і нехай ϕ – функція $X \to E^1$, значеннями якої оцінюються результати вибору елементів із множини X. У множині X задана нечітка підмножина $\mu_D : X \to [0, 1]$, яку ми назвемо нечіткою множиною альтернатив. Задача полягає у "максимізації" у деякому сенсі функції ϕ на нечіткій множині μ_D.

Під "максимізацією" за підходом С.О. Орловського [12] розуміють вибір нечіткої підмножини μ множини μ_D, якій відповідає найбільші значення як функції ϕ, так і функції належності μ_D до нечіткої множини альтернатив. Ці альтернативи в задачах багатокритеріальної оптимізації залежно від способу їхнього порівняння називаються ефективними, слабко ефективними, власно ефективними (відповідно максимальними за Парето, за Слейтером, за Джеофріоном). Далі для простоти без обмеження загальності ми будемо використовувати лише визначення ефективних альтернатив.

Зрозуміло, що представлення розв'язку у формі всієї нечіткої множини ефективних альтернатив за критеріями ϕ і μ_D має сенс, коли така форма змістовно зрозуміла особі, що приймає рішення. Нагадаємо, що альтернатива $x^* \in X$ називається ефективною за двома функціями $\phi(x)$ і $\mu_D(x)$, якщо не існує іншої альтернативи $x \in X$ строго кращої за x^*, тобто $\neg\exists x \in X:\ \phi(x) \geq \phi(x^*),\ \mu_D(x) \geq \mu_D(x^*)$ і хоча б одна нерівність є строгою. Іншими словами, якщо $x^* \in X$ ефективна альтернатива для функцій $\phi(x)$ і $\mu_D(x)$ на множині X, то вибором будь-якої іншої альтернативи з X неможливо збільшити (порівняно з $\phi(x^*)$ або $\mu_D(x^*)$) значення однієї функції, не зменшивши при цьому значення іншої.

Якщо ж опис розв'язку задачі у вигляді нечіткої множини є не прийнятним ОПР, то під розв'язком задачі варто розуміти деякий компроміс між бажанням одержати найбільші значення як функції ϕ, так і функції належності μ_D нечіткої множини альтернатив. Цей компроміс при виявленій перевазі ОПР між критеріями ϕ і μ_D може бути знайдений будь-яким із методів багатокритеріальної оптимізації.

Отже, нехай P – множина всіх ефективних альтернатив двокритеріальної задачі: $\phi(x) \to \max$, $\mu_D(x) \to \max$, $x \in X$.

Визначення 7.4.2. Розв'язок задачі математичного програмування з нечіткою множиною альтернатив називається нечітка множина з функцією належності виду:

$$\mu(x) = \left\{ \mu_D(x) \middle| x \in P; \quad 0 \middle| x \notin P \right\}.$$

У цьому визначенні наголошується, що ОПР повинна використовувати у своєму рішенні лише ті альтернативи універсальної множини X, що дають значення функцій $\phi(x)$ і $\mu_D(x)$, які не покращуються одночасно.

Вибір деякої конкретної альтернативи з множини P може зробити лише ОПР, яка має деяку додаткову інформацію (чи міркування) про те, що важливіше: значення функції ϕ чи ступінь належності μ_D до множини альтернатив.

Відповідне нечіткому розв'язку нечітке значення функції ϕ записується у вигляді

$$\mu_\phi(\psi) = \sup_{x \in \phi^{-1}(\psi)} \mu(x).$$

У випадку, коли ми маємо багатокритеріальну задачу з нечіткою множиною альтернатив функція ϕ є векторною $\phi : X \to R^m$. Під розв'язком такої задачі ми будемо розуміти вибір нечіткої підмножини μ множини μ_D, якій відповідають найбільші значення як функцій ϕ_i, $i = \overline{1,m}$, так і функції належності μ_D до нечіткої множини альтернатив.

Нехай P_m – множина всіх ефективних альтернатив $(m+1)-$ критеріальної задачі:

$$\phi_i(x) \quad \to \max, \ \ i = \overline{1,m},$$
$$\mu_D(x) \quad \to \max, \ \ x \in X.$$

Визначення 7.4.3. Розв'язком багатокритеріальної задачі з нечіткою множиною альтернатив називається нечітка множина з функцією належності виду:

$$\mu(x) = \left\{ \mu_D(x) \middle| x \in P_m; \quad 0 \middle| x \notin P_m \right\}.$$

Таким чином, у випадку багатокритеріальної задачі нечітка множина розв'язків буде включати у себе ті і лише ті альтернативи, які будуть ефективними як за критеріями ϕ_i, $i = \overline{1,m}$, так і за функцією належності μ_D до нечіткої множини альтернатив. Вибір деякої конкретної з них здійснюється за допомогою будь-якого з методів багатокритеріальної оптимізації.

Задача нечіткої векторної оптимізації. Формально загальна задача нечіткої векторної оптимізації описується так. Нехай на універсальній множині X задана нечітка підмножина альтернатив $\mu_D : X \to [0, 1]$. На універсальній множині $Y \subseteq E^m$ числових оцінок наслідків альтернатив із множини X задане нечітке відношення переваги $\mu_R : Y \times Y \to [0, 1]$. Альтернативи оцінюються нечіткими значеннями векторів оцінок $y = (y_1, \ldots, y_m) \in Y$, які задаються нечітким відображенням $\phi : X \times Y \to [0, 1]$.

При такому нечіткому описі цілі задачі прийняття рішень альтернативи потрібно порівнювати одна з одною за відповідними їм нечіткими множинами значень векторів оцінок y за нечітким відношенням переваги μ_R ("більш кращим" нечітким оцінкам відповідають "більш кращі" альтернативи).

Таким чином, необхідним етапом в аналізі подібної задачі прийняття рішень є побудова відношення переваги для порівняння між собою нечітких множин на основі заданого нечіткого відношення переваги μ_R.

Побудова узагальненого відношення переваги. Нехай на універсальній множині оцінок Y задане нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R : Y \times Y \to [0, 1]$. Нехай Ψ клас усіх нечітких підмножин із множини Y, тобто Ψ – клас усіх функцій належності виду $\mu : Y \to [0, 1]$. Треба побудувати відношення переваги між нечіткими множинами класу Ψ, яке є *індукованим* вихідним відношенням переваги μ_R.

Неважко зрозуміти, що задане на множині Y нечітке відношення переваги μ_R можна розглядати як нечітке відображення $Y \to \Psi$. Образ будь-якого елементу $y^0 \in Y$ при цьому відображенні є нечітка підмножина множини Y із функцією належності $\mu_R(y^0, y)$. Фактично, функція $\mu_R(y^0, y)$ описує нечітку множину елементів Y, пов'язаних із y^0 відношенням R, тобто таких $y \in Y$, що $y^0 R y$.

Нехай $\mu : Y \to [0, 1]$ – деяка нечітка підмножина множини Y. Тоді за визначенням 7.1.1 μ_R є нечітка підмножина Y із функцією належності виду: $\tilde{\eta}(\mu, y) = \sup\limits_{z \in Y} \min\{\mu(z), \mu_R(z, y)\}$.

Побудована таким чином функція $\tilde{\eta}$ описує нечітке відображення $\Psi \to \Psi$ і є узагальненням вихідного нечіткого відображення

$\mu_R : Y \to \Psi$. Неважко зрозуміти і те, що ця функція описує узагальнення $\tilde{R}$ вихідного відношення переваги R на множину $\Psi \times Y$. Іншими словами, для фіксованої нечіткої множини $\mu^0 \in \Psi$ функція $\tilde{\eta}(\mu^0, y)$ описує нечітку множину елементів множини Y, зв'язаних з μ^0 узагальненим відношенням переваги, тобто таких $y \in Y$, що $\mu^0 \tilde{R} y$. Величина $\tilde{\eta}(\mu^0, y)$, таким чином, є ступінь, із яким нечітка множина μ^0 є головнішою елемента y.

Аналогічно одержуємо, що величина $\tilde{\eta}(x, \mu^0) = \sup_{z \in Y} \min\{\mu(z), \mu_R(y, z)\}$ є ступенем оберненої переваги $y \geq \mu^0$.

Продовжимо процес узагальнення вихідного нечіткого відношення переваги R.

Розглянемо отриману функцію $\tilde{\eta}(\mu, y)$ як нечітке відображення $Y \to \tilde{\Psi}$, де $\tilde{\Psi}$ клас усіх нечітких підкласів класу Ψ (тобто всіх функцій виду $\Psi \to [0, 1]$), і нехай μ^0 довільний елемент Ψ. Тоді за визначенням 7.1.1 образом μ^0 при нечіткому відображенні $\tilde{\eta}$ є нечіткий підклас класу Ψ із функцією належності виду: $\eta\left(\mu, \mu^0\right) = \sup_{y \in Y} \min\left\{\mu^0(y), \tilde{\eta}(\mu, y)\right\}$, причому його можна розуміти як підклас нечітких підмножин μ таких, що $\mu \geq \mu^0$.

Іншими словами, функція η описує узагальнення нечіткого відношення переваги $\tilde{R}$ на множину $\Psi \times \Psi$. Отже, і відповідне узагальнення вихідного нечіткого відношення переваги R. Величина $\eta(\mu_1, \mu_2)$ є ступінь виконання переваги $\mu_1 \geq \mu_2$. Остаточно одержуємо такий вираз для функції належності узагальненого відношення переваги:

$$\eta(\mu_1, \mu_2) = \sup_{y \in Y} \min\left\{\mu_1(y), \sup_{z \in Y} \min\{\mu_2(z), \mu_R(y, z)\}\right\} =$$
$$= \sup_{z, y \in Y} \min\{\mu_1(y), \mu_2(z), \mu_R(y, z)\}.$$

Аналогічно можна прийти до висновку про те, що обернена перевага $\mu_2 \geq \mu_1$ виконується зі ступенем, рівним величині:

$$\eta(\mu_2, \mu_1) = \sup_{z, y \in Y} \min\{\mu_1(y), \mu_2(z), \mu_R(z, y)\}.$$

Отримана функція належності узагальненого відношення переваги у випадку, коли вихідне відношення переваги є чітким, конкретизується так:

$$\eta(\mu_1,\mu_2)=\sup_{\substack{z,y\in Y,\\ y\geq z}}\min\{\mu_1(y),\mu_2(z)\},$$

коли R є відношенням нестрогого порядку ($\geq$) у E^m (доречно нагадати, що $(y_1,\ldots,y_m)\geq(z_1,\ldots,z_m)\Leftrightarrow y_i\geq z_i,\ \ \forall i=\overline{1,m},\ \ \exists j: y_j>z_j$) і $\eta(\mu_1,\mu_2)=\sup\limits_{\substack{z,y\in Y,\\ y>z}}\min\{\mu_1(y),\mu_2(z)\}$, коли R є відношенням строгого порядку ($>$) в E^m.

Приклад 7.4.2. Нехай Y – числова вісь і R – природний порядок ($\geq$) на Y. Розглянемо дві нечітких підмножини Y: M1, M2, які показані на рис. 7.4.1. З отриманих формул маємо:

$$\eta(M1,M2)=\sup_{z,y\in Y, y\geq z}\min\{M1(y),M2(z)\}=0,4,$$

$$\eta(M2,M1)=\sup_{z,y\in Y,\ z\geq y}\min\{M1(y),M2(z)\}=1.$$

Тобто, іншими словами: M1 краща за M2 із ступенем 0,4, M2 краще за M1 зі ступенем 1. Звідси, за бажанням, можна виразити відношення строгої переваги й байдужості: M1 байдужа до M2 із ступенем 0,4, M2 строго краща за M1 зі ступенем 0,6.

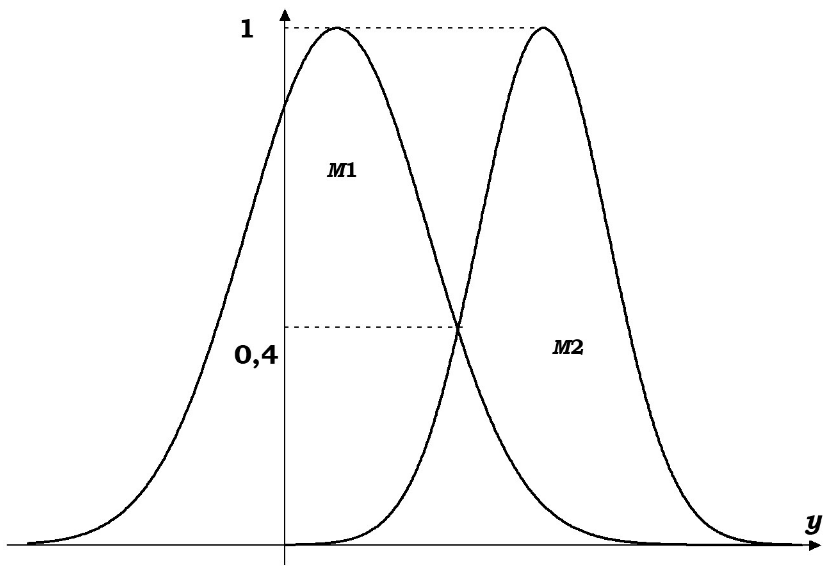

Рис. 7.4.1

Нечітка множина недомінованих альтернатив. Звернемося тепер безпосередньо до розв'язку задачі нечіткої багатокритеріальної оптимізації. Спочатку, для простоти викладення матеріалу, будемо вважати, що множина альтернатив описана чітко і будемо позначати її через X. Наприкінці розділу коротко зупинимося і на задачах із нечіткою множиною альтернатив.

Для розв'язку поставленої задачі побудуємо на множині альтернатив X нечітке відношення переваги, індуковане вихідним нечітким відношенням переваги R і нечіткою ціллю, яка задана нечітким векторним відображенням ϕ. Після цього виділимо у X нечітку підмножину недомінованих альтернатив, яка і буде множиною оптимальних за Парето рішень задачі нечіткої багатокритеріальної оптимізації.

Будь-якій альтернативі x^* задане нечітке відображення ϕ ставить у відповідність нечітку векторну оцінку цієї альтернативи у формі нечіткої підмножини $\phi(x^*, y)$ множини оцінок $Y \subseteq E^m$.

Нехай $\tilde{\eta}$ – нечітке відношення переваги, індуковане нечітким відношенням переваги R на класі Ψ усіх нечітких підмножин множини Y. Користуючись цим відношенням, можна порівнювати одну з іншою нечіткі оцінки альтернатив, а отже і самі альтернативи. Іншими словами, ступенем переваги альтернативи $x_1 \in X$ альтернативі $x_2 \in X$ ми будемо вважати ступінь переваги нечіткої множини оцінок $\phi(x_1, y)$ нечіткій множині оцінок $\phi(x_2, y)$, тобто покладемо

$$\eta(x_1, x_2) = \tilde{\eta}\big(\phi(x_1, y), \phi(x_2, y)\big).$$

Таким чином, використовуючи визначення узагальненого нечіткого відношення переваги, одержуємо нечітке відношення переваги на множині альтернатив X такого вигляду:

$$\eta(x_1, x_2) = \sup_{z, y \in Y} \min\big\{\phi(x_1, z), \phi(x_2, y), \mu_R(z, y)\big\}.$$

Після того як і у множині альтернатив уведене нечітке відношення переваги вихідна задача зводиться до задачі прийняття рішень із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги (див. § 2). Неважко переконатися у тому, що коли функція ϕ має властивість $\sup_{y \in Y} \phi(x, y) = 1, \ \ \forall x \in X$, тобто коли оцінка будь-якої альтернативи є нормальною нечіткою множиною, то нечітке відношення переваги η рефлексивно, тобто $\forall x \in X, \ \ \eta(x, x) = 1$.

Виділимо тепер у множині X нечітку підмножину недомінованих (оптимальних за Парето) альтернатив. Відповідно до визначення вона матиме такий вигляд:

$$\tilde{\eta}^P(x) = 1 - \sup_{x' \in X}\{\eta(x', x) - \eta(x, x')\} =$$

$$= 1 - \sup_{x' \in X}\Big\{\sup_{z,y \in Y}\min\{\phi(x', z), \phi(x, y), \mu_R(z, y)\} -$$

$$- \sup_{z,y \in Y}\min\{\phi(x', z), \phi(x, y), \mu_R(y, z)\}\Big\}.$$

Необхідно відзначити, що коли функція $\phi(x, y)$ така, що для деякої альтернативи x^* має місце нерівність $\sup\limits_{y \in Y}\phi(x^*, y) = \alpha < 1$, то значення $\tilde{\eta}^P(x^*)$ може не відповідати фактичному ступеню недомінованості цієї альтернативи.

Для ілюстрації розглянемо крайній випадок, коли $\alpha = 0$. У вихідній задачі це відповідає тому, що оцінка альтернативи x^* є невідомою або невизначеною. У той же час для цієї альтернативи $\eta(x^*, x^*) = 0$ і $\tilde{\eta}^P(x^*) = 1$, тобто альтернатива виявляється недомінованою, причому винятково через відсутність інформації про неї.

Для того щоб виключити такі аномальні випадки, величину $\tilde{\eta}^P(x^*)$ необхідно скорегувати. Для цього значення функції $\tilde{\eta}^P(x)$ потрібно порівнювати з відповідними значеннями $\sup\limits_{y \in Y}\phi(x, y)$.

Спираючись на ці міркування, розв'язком вихідної задачі будемо вважати не функцію належності $\tilde{\eta}^P$, а скориговану функцію виду:

$$\eta^P(x) = \min\left\{\tilde{\eta}^P(x),\ \sup_{y \in Y}\phi(x, y)\right\}.$$

Неважко показати, що для будь-якого x має місце рівність $\sup\limits_{y \in Y}\phi(x, y) = \eta(x, x)$. Тоді остаточно функцію $\eta^P(x)$ можна записати у вигляді: $\eta^P(x) = \min\{\tilde{\eta}^P(x), \eta(x, x)\}$.

Отримана функція належності й описує нечітку множину рішень вихідної задачі, раціональним можна вважати вибір $x^* = \sup\limits_{x \in X}\eta^P(x)$.

Якщо у вихідній задачі множина альтернатив описана нечітко (нехай μ_D – функція належності цієї множини), то вибір альтернатив варто здійснювати з урахуванням двох відношень переваги: отриманого вище узагальненого відношення переваги η і відношення переваги $\eta_{\geq}$, що відбиває ступені допустимості альтернатив. Це відношення є індукованим функцією належності μ_D до нечіткої множини альтернатив і визначається так:

$$\eta_{\ge}(x,y)=\begin{cases}1, & \mu_D(x)\ge\mu_D(y),\\ 0, & \mu_D(x)<\mu_D(y).\end{cases}$$

Тепер, якщо вважати відношення $\mu_{\ge}$ і $\eta_{\ge}$ рівноцінними для ОПР, їх можна агрегувати в одне відношення переваги, яке визначимо як їхній перетин $\omega_{\ge}(x,y)=\min\{\mu_{\ge}(x,y),\eta_{\ge}(x,y)\}$ і розв'язати задачу на чіткій множині альтернатив із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги. У випадку, коли відношення $\mu_{\ge}$ і $\eta_{\ge}$ не є рівноцінними для ОПР, усе буде складніше.

Задачі нечіткої векторної оптимізації. У випадку, коли відношення переваги R на множині оцінок Y є чітким і це – відношення нестрогого порядку ($\ge$) в E^m вибір конкретного розв'язку вихідної задачі можна зробити конструктивнішим. Функція належності $\eta^P(x)$, що описує нечітку множину розв'язків вихідної задачі конкретизується так: $\eta^P(x)=\min\{\tilde\eta^P(x),\eta(x,x)\}$, де

$$\tilde\eta^P(x)=1-\sup_{x'\in X}\left\{\sup_{\substack{z,y\in Y,\\ z\ge y}}\min\{\phi(x',z),\phi(x,y)\}-\sup_{\substack{z,y\in Y,\\ z\ge y}}\min\{\phi(x',z),\phi(x,y)\}\right\}.$$

Доречно нагадати, що:

$$y=(y_1,\dots,y_m)\ge z=(z_1,\dots,z_m)\Leftrightarrow y_i\ge z_i,\quad \forall i=\overline{1,m},\quad \exists j: y_j>z_j .$$

Оскільки величина $\eta^P(x)$ є ступінь недомінованості альтернативи x, якщо $\eta^P(x)\ge\alpha$, то у множині X немає жодної альтернативи, що домінувала б альтернативу x зі ступенем більшим, ніж $1-\alpha$. Це зауваження дає можливість вибрати конкретний розв'язок зі ступенем недомінованості не меншим за α, як розв'язок наступної звичайної (чіткої) багатокритеріальної задачі:

$$\begin{aligned}&y_i\to\max,\quad i=\overline{1,m},\\ &\phi(x,y)\ge\alpha,\\ &x\in X,\quad y=(y_1,\dots,y_m)\in Y.\end{aligned}\qquad(7.4.1)$$

Дійсно, нехай (x^*,y^*) – розв'язок отриманої багатокритеріальної задачі. Припустимо супротивне, тобто, нехай знайдуться $\tilde x\in X$ і $\varepsilon>0$ такі, що:

$$\sup_{z,y\in Y,\ z\ge y}\min\{\phi(\tilde x,z),\phi(x^*,y)\}-\sup_{z,y\in Y,\ z\ge y}\min\{\phi(x^*,z),\phi(\tilde x,y)\}\ge 1-\alpha+\varepsilon .\qquad(7.4.2)$$

Виберемо $\tilde{y} \in Y$ так, що $\phi(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \alpha - \varepsilon$ (неіснування такого $\tilde{y}$ означає, що $\sup\limits_{y \in Y} \phi(x, y) < \alpha$ і розв'язком із ступенем недомінованості не меншим за α, не існує, тому варто вибрати меншу ступінь). Оскільки (x^*, y^*) є розв'язком задачі (7.4.1), то $\phi(x^*, y^*) \geq \alpha$. Звідси

$$\sup_{z, y \in Y,\ z \geq y} \min\left\{\phi\left(x^*, z\right), \phi\left(\tilde{x}, y\right)\right\} \geq \min\left\{\phi\left(x^*, y^*\right), \phi\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)\right\} \geq \min\{\alpha, \alpha - \varepsilon\} = \alpha - \varepsilon,$$

але тоді наше припущення є неможливим, оскільки лівий доданок у лівій частині (7.4.2) не перевищує 1.

Таким чином, будь-який компромісний розв'язок багатокритеріальної задачі (7.4.1) буде розв'язком вихідної задачі зі ступенем недомінованості не меншим за α.

У випадку, коли множина альтернатив є нечіткою (нехай μ_D – функція належності цієї множини), то ми отримаємо багатокритеріальну задачу з чіткими критеріями і нечіткою множиною альтернатив μ_D. Під розв'язком такої задачі ми будемо розуміти вибір нечіткої підмножини μ множини μ_D, якій відповідає найбільші значення як функцій y_i, $i = \overline{1, m}$, так і функції належності μ_D до нечіткої множини альтернатив.

Нехай $P_m(\alpha)$ – множина всіх ефективних альтернатив $(m+1)-$ критеріальної задачі:

$$\begin{aligned}
&y_i \to \max, \quad i = \overline{1, m}, \\
&\mu_D(x) \to \max, \\
&\phi(x, y) \geq \alpha, \\
&x \in X, \quad y = (y_1, \ldots, y_m) \in Y.
\end{aligned}$$

Тоді розв'язком задачі нечіткої векторної оптимізації з нечіткою множиною альтернатив і зі ступенем недомінованості альтернатив, не меншим за α, називається нечітка множина з функцією належності виду:

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} \mu_D(x), & x \in P_m(\alpha), \\ 0, & x \notin P_m(\alpha). \end{cases}$$

Таким чином, нечітка множина рішень вихідної задачі буде включати у себе ті й тільки ті альтернативи зі ступенем недомінованості не меншим за α, які будуть ефективними як за числовими оцінками альтернатив y_i, $i = \overline{1, m}$, так і за функцією належності μ_D до нечіткої множини альтернатив. Вибір деякої конкретної з них альтернативи здійснюється за допомогою методів багатокритеріальної оптимізації (див. Розділ 4).

Контрольні завдання до § 4

1. Розв'язати методом ідеальної точки ($S=1$) таку задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$x_1 + x_2 \to \max, \quad x_{1,2} \in [0,1], \quad \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

2. Розв'язати методом ідеальної точки ($S=\infty$) таку задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 1)^3 \to \max, \quad x_{1,2} \in [0,1], \quad \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

3. Розв'язати методом послідовних поступок (три кроки) таку задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$x_1 \to \max, \quad x_1 + x_2 \to \max, \quad x_{1,2} \in [0,1], \quad \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

4. Розв'язати (зробити півтори ітерації) методом послідовного уводу обмежень (варіант 2) таку задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$(x_1 - 1)^3 + 2(x_2 - 1)^3 \to \max, \quad x_{1,2} \in [0,1], \quad \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ДО РОЗДІЛУ 7

1. Що таке нечітка множина, множина рівня нечіткої множини? Як декомпозується нечітка множина за множинами рівня?
2. Дайте визначення основних операцій над нечіткими множинами (об'єднання, перетин, різниця, декартовий добуток, опукла комбінація).
3. Дайте визначення нечіткого відображення чіткої і нечіткої множини.
4. Дайте визначення нечіткого бінарного відношення, основних операцій над ними. Дайте визначення максмінної, мінімаксної та максимультиплікативої композиції.
5. Сформулюйте основні властивості нечітких бінарних відношень (рефлективність, антирефлексивність, симетричність, анти симетричність, транзитивність).
6. Дайте визначення нечітким відношенням переваги, байдужості, подібності та строгої переваги.
7. Дайте визначення нечіткої множини Парето, множини максимальних недомінованих альтернатив.
8. Яка основна ідея розв'язку ігор із нечіткою цільовою множиною стратегій.
9. Дайте визначення нечіткої рівноваги Неша.
10. У чому полягає підхід Белмана–Лотфізаде до визначення нечітких багатокритеріальних задач.
11. У чому полягає підхід С.Орловського до багатокритеріальних задач із нечіткою множиною альтернатив?
12. Яка постановка задачі нечіткої векторної оптимізації?