~~2. Нехай задані дві нечіткі множини $A = \{x \in E^1 \mid x$ – приблизно дорівнює 1$\}$, $B = \{x \in E^1 \mid x$ – приблизно дорівнює 3$\}$. Знайти для цих множин~~

x	$\mu_A(x)$
x_1	0,2
x_2	0,1
x_3	0,5

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,3	0	0,8	0,2	0,1
x_2	0,5	0,6	0,1	0,5	0,6
x_3	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3

~~об'єднання; перетин; різницю.~~

~~3. Нехай задано нечіткі множини $A = \left\{x \in E^1 \middle| \mu_A(x) = e^{-x}\right\}$ і $B = \left\{x \in E^1 \middle| \mu_B(x) = e^{-(x-3)^2}\right\}$. Знайти для цих множин об'єднання; перетин; різницю.~~

~~4. Нехай в універсальній множині $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ нечітка множина A задається функцією належності $\mu_A(x)$, а нечітке відображення $\phi: X \to Y$ функцією належності $\mu_\phi(x,y): X \times Y \to [0,1]$. Знайти образ B нечіткої множини A, що задається нечітким відображенням $\mu_\phi(x,y)$.~~

~~5. Нехай задана нечітка множина $A = \left\{x \in E^1 \middle| \mu_A(x) = e^{-x}\right\}$ в універсальній множині $X = E^1$ і також задане нечітке відображення у множину $Y = E^1$ із функцією належності $\mu_\phi(x,y) = e^{(x-y)^2}$. Знайти образ B нечіткої множини A.~~

§ 2. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги

Якщо інформація про ситуацію прийняття рішення описана у формі звичайного відношення переваги, раціональним, природно вважати вибір недомінованих альтернатив. Застосуємо подібний підхід до задачі прийняття рішень при нечітко описаному відношенні переваги на множині альтернатив. При цьому ми розглянемо спочатку задачі, у яких сама множина альтернатив описана чітко, тобто як звичайна множина, а потім звернемося до загального випадку з нечіткою множиною альтернатив.

Отже, нехай X – звичайна (чітко описана) множина альтернатив і $\mu_\geq$ задане на ньому нечітке відношення нестрогої переваги, а $\mu_>$ відповідне нечітке відношення строгої переваги. Визначимо нечітку підмножину недомінованих альтернатив множини X за відношенням $\mu_{\geq}$. Відповідно до визначення відношення строгої переваги $\mu_{>}$, для будь-яких альтернатив $x,\ y \in X$ величина $\mu_{>}(x,y)$ є ступінь, із якою альтернатива y домінується альтернативою x. Отже, при фіксованому $y \in X$ визначену на X функцію $\mu_{>}(y,x)$ можна розглядати як функцію належності нечіткої множини "всіх" альтернатив x, що строго домінуються альтернативою y. Нехай, наприклад, ступінь належності альтернативи x^* цій множині (відповідно деякому фіксованому y) дорівнює 0,3. Це означає, що x^* домінується альтернативою y зі ступенем 0,3.

Неважко зрозуміти, що множина "всіх" альтернатив x, що не домінуються альтернативою y, являє собою доповнення у X введеної множини $\mu_{>}(y,x)$. Звідси одержуємо, що ця нечітка множина описується функцією належності виду $1-\mu_{>}(y,x),\ \forall x \in X$. Якщо, наприклад, $\mu_{>}(y,x)=0,3$, то зі ступенем 0,7 альтернатива x не домінується альтернативою y. Тому для виділення у X підмножини "всіх" альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою з X, потрібно взяти перетин нечітких множин виду $1-\mu_{>}(y,x)$ за всіма $y \in X$. Цей перетин ми і назвемо *нечіткою підмножиною недомінованих (ефективних) альтернатив (нечітка множина Парето)* і позначимо його через

$$\mu^P(x)=\inf_{y\in X}\{1-\mu_{>}(y,x)\}=1-\sup_{y\in X}\mu_{>}(y,x)=1-\sup_{y\in X}(\mu_{\geq}(y,x)-\mu_{\geq}(x,y)).$$

Останнє співвідношення отримується з визначення нечіткого відношення строгої переваги. Дійсно, нехай $x,\ x\in X$, довільно обрана альтернатива. Введемо множини:

$$Y^1(x)=\{y\in X \mid \mu_{\geq}(y,x)>\mu_{\geq}(x,y)\},\quad Y^2(x)=\{y\in X \mid \mu_{\geq}(y,x)\leq\mu_{\geq}(x,y)\}.$$

Користуючись тим, що $Y^1(x)\cup Y^2(x)=X,\ \ \forall x\in X$, отримаємо:

$$\mu^P(x)=1-\sup_{y\in X}\mu_{>}(y,x)=1-\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}\mu_{>}(y,x)-\sup_{y\in Y^2(x)}\mu_{>}(x,y)\right\},\quad x\in X$$

Далі, спираючись на визначення $\mu_{>}$, одержуємо:

$$\mu^P(x)=1-\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}(\mu_{\geq}(y,x)-\mu_{\geq}(x,y)),0\right\}=$$

$$=1-\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}(\mu_{\geq}(y,x)-\mu_{\geq}(x,y)),\ \sup_{y\in Y^2(x)}(\mu_{\geq}(y,x)-\mu_{\geq}(x,y))\right\}=$$

$$=1-\sup_{y\in X}(\mu_{\geq}(y,x)-\mu_{\geq}(x,y)),\quad x\in X.$$

Отриманий вираз дозволяє описати нечітку підмножину недомінованих альтернатив через вихідне відношення нестрогої переваги на множині *X*.

Значення $\mu^P(x)$ являє собою ступінь, із яким альтернатива *x* не домінується жодною з альтернатив множини *X*. Нехай $\mu^P(x^*) = \alpha$ для деякої альтернативи x^*. Тоді x^* може домінуватися іншими альтернативами, але зі ступенем не вище $1-\alpha$. Дійсно, при цьому $\sup\limits_{y \in X} \mu_>(y, x^*) = 1-\alpha$, отже, $\mu_>(y, x^*) \le 1-\alpha$ для $\forall y \in X$.

Оскільки величина $\mu^P(x)$ є ступінь "недомінованості" альтернативи *x*, то раціональним при заданій нечіткій інформації природно вважати вибір альтернатив, що мають по можливості більшу ступінь належності нечіткій множині $\mu^P(x)$.

Множина таких альтернатив $X^P = \left\{ x \in X \,\middle|\, \mu^P(x) = \sup\limits_{y \in X} \mu^P(y) \right\}$ називається *множиною максимальних недомінованих альтернатив* множини *X* за нечітким відношенням переваги $\mu_\ge$.

Приклад 7.2.1. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, задане за табл. 7.2.1 нечітке відношення переваги $\mu_\ge(x_i, x_j)$, $i, j \in \overline{1,4}$.

Таблиця 7.2.1

$\mu_\ge$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,2	0,3	0,1
x_2	0,5	1	0,2	0,6
x_3	0,1	0,6	1	0,3
x_4	0,6	0,1	0,5	1

За визначенням отримаємо нечітке відношення Парето (див. табл. 7.2.2). Звідси видно, що найбільший (рівний 0,8) ступінь недомінованості має альтернатива x_3, тому її вибір як розв'язку варто вважати раціональним у межах розглянутого підходу.

Таблиця 7.2.2

	x_1	x_2	x_3	x_4
μ^P	0,5	0,6	0,8	0,5

Розглянемо тепер задачу прийняття рішень із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги у випадку, коли множина альтернатив є нечіткою.

Нехай на універсальній множині X задана нечітка множина альтернатив $\mu_D : X \to [0,1]$ із нечіткою ціллю $\mu_{\geq} : X \times X \to [0,1]$.

Відміна цієї задачі від попередньої полягає у тому, що більш переважними варто вважати альтернативи, які мають більшу перевагу як за нечітким відношенням $\mu_{\geq}$, так і за функцією належності μ_D. Для вирішення цієї проблеми побудуємо ще одне відношення переваги $\eta_{\geq}$, що є індукованим функцією належності μ_D

$$\eta_{\geq}(x,y) = \begin{cases} 1, & \mu_D(x) \geq \mu_D(y), \\ 0, & \mu_D(x) < \mu_D(y). \end{cases}$$

Тепер, якщо вважати відношення $\mu_{\geq}$ і $\eta_{\geq}$ рівноцінними для ОПР, їх можна агрегувати в одне відношення переваги, яке визначимо як їхній перетин $\omega_{\geq}(x,y) = \min\{\mu_{\geq}(x,y),\ \eta_{\geq}(x,y)\}$, і розв'язати задачу прийняття рішень у попередній постановці (на чіткій множині альтернатив із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги). У випадку, коли відношення $\mu_{\geq}$ і $\eta_{\geq}$ не є рівноцінними для ОПР, усе буде складніше [12].

Контрольні завдання до § 2

1. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, задане нечітке відношення переваги $\mu_{\geq}(x_i, x_j)$, $i, j \in \overline{1,4}$. Знайти нечітке відношення Парето.

$\mu_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,8	0,7	0,5
x_2	0,2	1	0,1	0,4
x_3	0,4	0,3	1	0,2
x_4	0,1	0,1	0,5	1

2. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, задане нечітке відношення переваги $\mu_{\geq}(x_i, x_j)$, $i, j \in \overline{1,4}$. Знайти нечітке відношення Парето.

$\mu_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,4	0,4	0,1
x_2	0,5	1	0,5	0,2
x_3	0,9	0,9	1	0,9
x_4	0,6	0,2	0,1	1

3. Нехай на універсальній множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ задана нечітка множина альтернатив $\mu_D : X \to [0,\ 1]$ із нечіткою ціллю $\mu_{\geq} : X \times X \to [0,\ 1]$. Знайти нечітке відношення Парето.

4. Нехай на універсальній множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ задана нечітка множина альтернатив $\mu_D : X \to [0,\ 1]$ із нечіткою ціллю $\mu_{\geq} : X \times X \to [0,\ 1]$. Знайти нечітке відношення Парето.

~~§ 3. Ігри в умовах нечіткої інформації~~

~~Для простоти викладення матеріалу без обмеження загальності будемо розглядати ігри двох гравців в умовах нечіткої інформації.~~

~~**Ігри з нечіткою цільовою множиною.** Нехай X і Y універсальні множини стратегій, які можуть вибирати гравці 1 і 2 відповідно, а стратегії гравців описуються нечіткими множинами $\mu_1 : X \to [0,\ 1]$, $\mu_2 : X \to [0,\ 1]$. Функції виграшу гравців $u_1,\ u_2 : X \times Y \to [0,\ 1]$ інтерпретуються як оцінки гравцями ситуації гри $(x,\ y)$. Множина E^1 (числова вісь) інтерпретується при цьому як універсальна множина оцінок.~~

~~Кожен із гравців прагне до досягнення своєї нечітко описаної цілі. Будемо вважати, що ціль гравця i описується нечіткою множиною G_i в універсальній множині оцінок E^1 із функцією належності $\overline{\mu}_i^G : E^1 \to [0,\ 1]$. Наприклад, така нечітка ціль може бути нечіткою множиною типу "величина виграшу повинна бути значно більшою за 10" і т. п. Чим більший ступінь належності оцінки виграшу u нечіткій множині $\overline{\mu}_G(u)$, тим більший ступінь досягнення цієї цілі.~~

~~Таким чином, оскільки виграш залежить від ситуації гри, то ціль гравця i будемо описувати нечіткою підмножиною множини ситуацій виду:~~

$$\mu_i^G(x,y) = \overline{\mu}_i^G(u_i(x,y)), \quad (x,y) \in X \times Y .$$

~~Неважко побачити, що задана нечітка множина є такою, що її образом у E^1 при відображенні u_i, є задана у E^1 нечітка множина цілі G_i.~~

~~Введемо в розгляд нечіткі підмножини D_1 і D_2 множини ситуацій $X \times Y$, які визначаються так:~~

$$\mu_{D_1}(x,y) = \min\{\mu_1(x), \mu_1^G(x,y)\}, \quad \mu_{D_2}(x,y) = \min\{\mu_2(x), \mu_2^G(x,y)\} .$$

~~Ці нечіткі множини є перетинами відповідних нечітких множин стратегій і нечітких множин цілі. Якщо, наприклад, гравцеві 1, відомий конкретний вибір $\tilde{y} \in Y$ гравця 2, то перед першим гравцем по-~~