Розділ 7
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

"Нечіткість", як правило, є проявом суб'єктивності осіб, що приймають рішення, експертів та аналітиків, які формулюють задачу прийняття рішень. Тому, як множина альтернатив, множина наслідків, так і зв'язок між ними можуть бути нечіткими. Такі задачі прийняття рішень називаються ЗПР в умовах нечіткої інформації.

§ 1. Основні поняття з теорії нечітких множин

Визначення нечіткої множини. У класичній математиці під множиною розуміється сукупність елементів (об'єктів), що мають деяку спільну властивість. Наприклад, множина чисел, не менших заданого числа; множина векторів, сума компонентів кожного з яких не перевершує одиниці і т. п. При цьому, для будь-якого елемента множини розглядаються лише дві можливості: або цей елемент належить даній множині (тобто має дану властивість), або не належить даній множині (тобто не має даної властивості). Таким чином, в описі множини у звичайному розумінні необхідно дотримуватися чіткого критерію, що дозволяє говорити про належність або неналежність будь-якого елемента даній множині.

Поняття нечіткої множини – спроба математичної формалізації нечіткої інформації з метою її використання при побудові математичних моделей складних систем. В основі цього поняття лежить уявлення про те, що елементи, які складають дану множину та мають деяку спільну властивість, можуть мати цю властивість у різному ступені і, отже, належати даній множини з "різним ступенем". При такому підході висловлення типу "елемент x належить даній множині" втрачають зміст, оскільки необхідно вказати "наскільки сильно" або з яким ступенем даний елемент належить множині.

Один з найпростіших способів математичного опису нечіткої множини – характеризація ступеня належності елемента множині чисел, наприклад, з інтервалу [0, 1]. Нехай X – деяка множина елементів (у звичайному розумінні). Надалі будемо називати її *універсальною множиною* й розглядати підмножини цієї множини.

Нечіткою множиною C на множині X називається сукупність пар $(x, \mu_C(x))$, де $x \in X$, а μ_C – функція $X \to [0,1]$, що називається *функцією належності* нечіткої множини C. Значення μ_C для конкретного x називається *ступенем належності* цього елемента нечіткій множині C.

Як бачимо з цього визначення, нечітка множина цілком описується своєю функцією належності, тому нижче будемо використовувати цю функцію як позначення нечіткої множини. Звичайні множини складають підклас класу нечітких множин. Дійсно, функцією належності звичайної множини $B \subset X$ є її *характеристична функція*:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

і відповідно до визначення нечіткої множини звичайну множину B можна також визначити як сукупність пар виду $(x, \mu_B(x))$. Таким чином, нечітка множина являє собою більш широке поняття, ніж звичайна множина, у тому розумінні, що функція належності нечіткої множини може бути довільною функцією або навіть довільним відображенням.

Приклад 7.1.1. Для порівняння розглянемо звичайну множину чисел $B = \{x | 0 \le x \le 2\}$ і нечітку множину чисел $C = \{x |$ "значення x є близьким до 1"$\}$. Функції належності цих множин представлені відповідно на рис. 7.1.1а. і рис. 7.1.1б. Зазначимо, що вид функції належності нечіткої множини C залежить від змісту, вкладеного у поняття "близько" у контексті аналізованої ситуації.

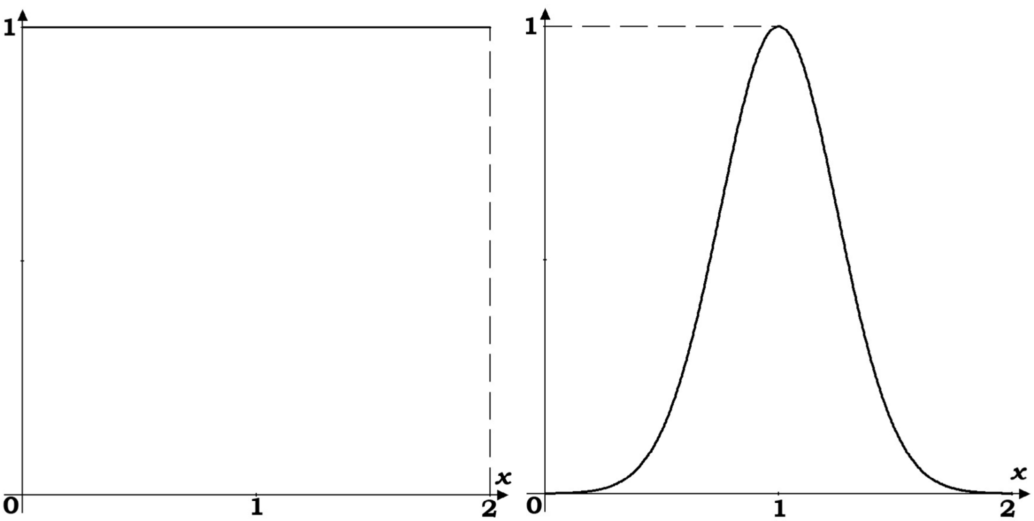

Рис. 7.1.1

Нечітка множина називається *порожньою*, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині X, тобто $\mu_{\varnothing}(x)=0,\ \ \forall x\in X$.

Універсальну множину X також можна описати функцією належності виду $\mu_X(x)=1,\ \ \forall x\in X$.

Носієм нечіткої множини A (позначення supp$A$) з функцією належності $\mu_A(x)$ називається множина виду $\operatorname{supp}A=\{x \mid x\in X,\ \ \mu_A(x)>0\ \}$.

Нечітка множина A називається *нормальною*, якщо виконується рівність $\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)=1$. У протилежному випадку нечітка множина називається *субнормальною*. Наприклад, нечітка множина C у прикладі 7.1.1 є нормальною. Субнормальним часто виявляється перетин нечітких множин. Субнормальна множина може бути перетворена до нормальної (нормалізована), якщо розділити функцію належності $\mu(x)$ цієї множини на величину $\sup\limits_{x\in X}\mu(x)$. Однак варто врахувати що, застосовуючи таке перетворення в конкретній задачі, необхідно представляти собі його "фізичний зміст".

Нехай A і B – нечіткі множини у X, а $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ – їхні функції належності відповідно. Кажуть, що A містить у собі B (тобто $B\subseteq A$), якщо для будь-якого $x\in X$ виконується нерівність $\mu_B(x)\le\mu_A(x)$. Варто зауважити, що якщо $B\subseteq A$, то і $\operatorname{supp}B\subseteq\operatorname{supp}A$. Множини A і B збігаються одна з одною (еквівалентні), якщо при будь-якому $x\in X$, $\mu_B(x)=\mu_A(x)$.

Приклад 7.1.2. Розглянемо нечіткі множини: $B=\{x \mid x \text{ близько до } 1\}$, $B=\{x \mid x \text{ дуже близько до } 1\}$. Зрозуміло, що $B\subseteq A$, тобто функції належності цих множин $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ повинні задовольняти нерівності $\mu_B(x)\le\mu_A(x)$ при будь-якому $x\in X$. Графічно ці функції можуть виглядати, наприклад, як показано на рис. 7.1.2. Суцільною лінією показаний графік функції належності множини A, а пунктирною – множини B.

Операції над нечіткими множинами. Операції над нечіткими множинами, такі, наприклад, як об'єднання та перетин, можна визначити різними способами. Нижче буде дано кілька таких визначень. Вибір конкретного з них залежить від предметної області.

Об'єднанням нечітких множин A і B у X називається нечітка множина з функцією належності:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_A(x)\},x\in X\ .$$

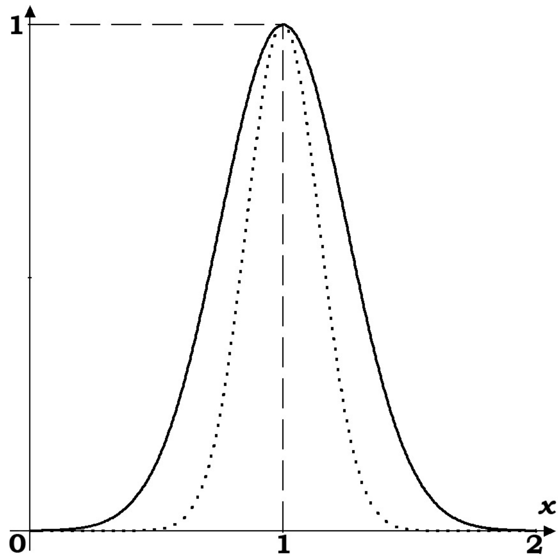

Рис. 7.1.2

Приклад 7.1.3. Нехай нечіткі множини *A* і *B* на числовій осі описуються функціями належності, показаними на рис. 7.1.3. Жирною лінією на цьому рисунку показано функцію належності об'єднання цих множин.

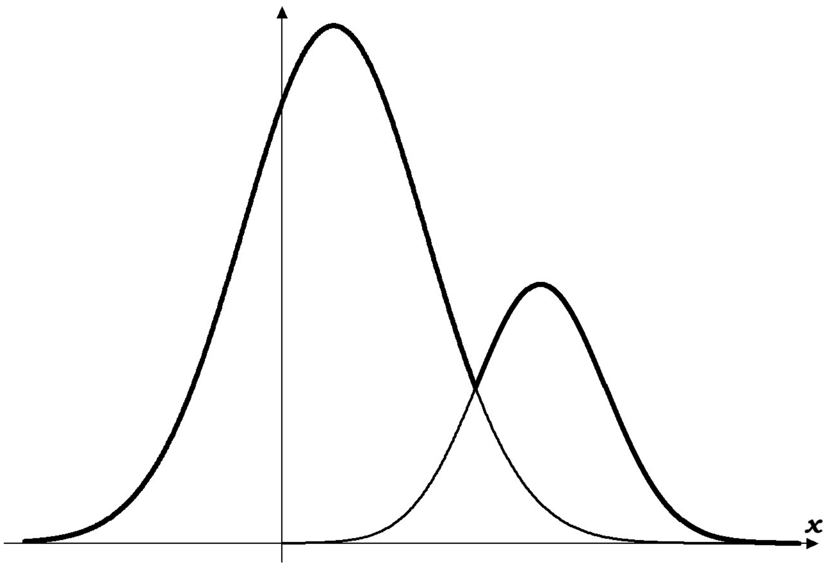

Рис. 7.1.3

Об'єднання нечітких множин A і B у X можна також визначити через алгебраїчну суму їх функцій належності:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, & \mu_A(x)+\mu_B(x)\geq 1,\\ \mu_A(x)+\mu_B(x), & \mu_A(x)+\mu_B(x)<1.\end{cases}$$

Перетином нечітких множин A і B у X називається нечітка множина з функцією належності $\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$, $x\in X$.

Приклад 7.1.4. Нехай нечіткі множини A і B на числовій осі описуються функціями належності, показаними на рис. 7.1.4. Жирною лінією на цьому малюнку показана функція належності перетину цих множин.

Інакше можна визначити перетин нечітких множин A і B у X як алгебраїчний добуток їх функцій належності:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x),\ x\in X.$$

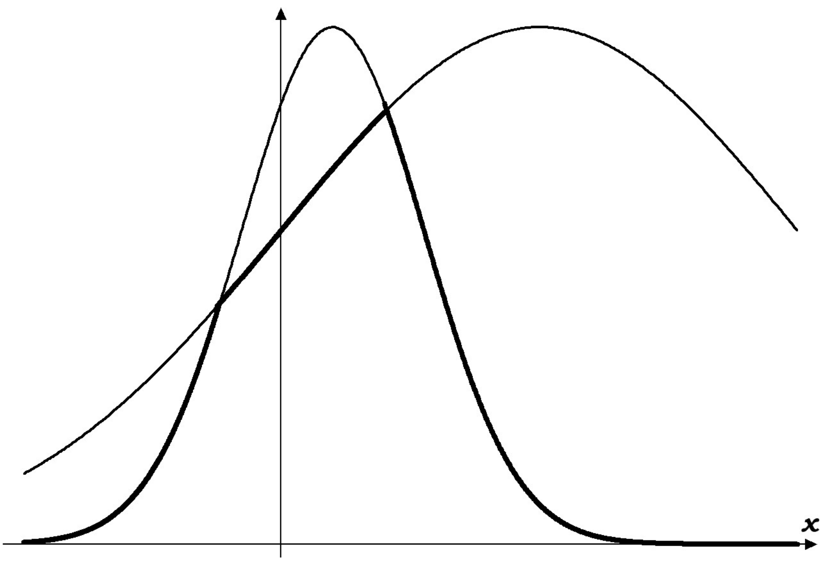

Рис. 7.1.4

Це визначення може бути дуже зручним у випадку нечітких множин A і B таких, що $B\subseteq A$. За першим із цих визначень отримаємо, що $\mu_{A\cap B}(x)=\mu_B(x)$, $\forall x\in X$, тобто функція належності множини A фактично "не бере участі" в результуючій функції належності, тоді як за останнім визначенням функція належності перетину завжди зберігає інформацію про функції належності обох множин.

Корисною може виявитися така властивість носіїв нечітких множин:

$$\text{supp } (A \cup B) = (\text{supp A}) \cup (\text{supp B}),$$
$$\text{supp } (A \cap B) = (\text{supp A}) \cap (\text{supp B}).$$

Доповненням нечіткої множини A у X називається нечітка множина A' з функцією належності виду $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X$.

Цікаво, що при такому визначенні, може бути, що $A' \cap A \neq \varnothing$.

Приклад 7.1.5. Розглянемо множину $A = \{x,\text{ занадто більше 0 }\}$, і нехай функція належності цієї множини має вигляд, показаний на рис. 7.1.5 (суцільна крива). Тоді пунктирна лінія на цьому рисунку відповідає функції належності доповнення A' множини A на множині всіх чисел. Іншими словами, множину A' можна описати як множину чисел, що не є набагато більшими за нуль. Непорожній перетин множин A і A' у цьому прикладі являє собою нечітку множину чисел, "набагато більших за нуль і одночасно таких, що не є набагато більшими за нуль". Непорожність цієї нечіткої множини відбиває той факт, що саме поняття "бути набагато більшим" описане нечітко, внаслідок чого, деякі числа можуть із визначеним ступенем належати одночасно як одній, так і іншій множині. У деякому сенсі цей перетин можна розглядати як нечітку "межу" між множинами A і A'.

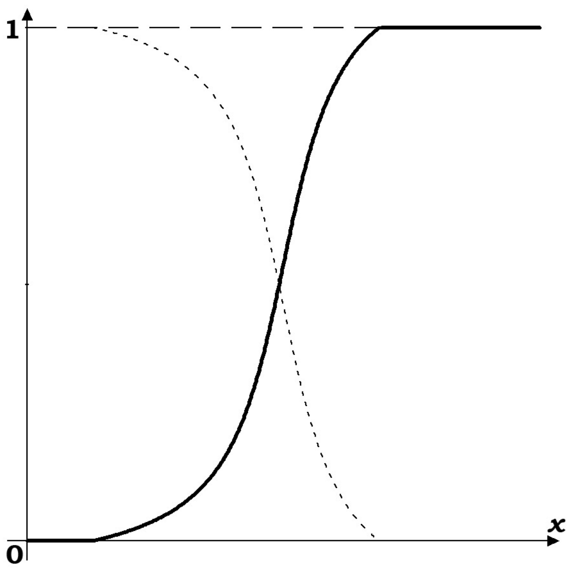

Рис. 7.1.5

Визначимо поняття різниці, декартового добутку й опуклої комбінації нечітких множин.

Різницею множин A і B у X називається нечітка множина $A\backslash B$ с функцією належності виду:

$$\mu_{A\backslash B} = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \mu_A(x) \ge \mu_B(x), \\ 0, & \mu_A(x) < \mu_B(x). \end{cases}$$

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ у X нечітких множин A_i в X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, називається нечітка множина A з функцією належності виду $\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Опуклою комбінацією нечітких множин $A_1, A_2, \ldots A_n$ у X називається нечітка множина A з функцією належності виду:

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \text{ де } \lambda_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Опуклі комбінації нечітких множин можуть знайти застосування, наприклад, у задачах прийняття рішень із декількома нечіткими обмеженнями. Зауважимо, що для звичайних множин ця операція не має сенсу.

Множини рівня й декомпозиція нечіткої множини. Множиною рівня α нечіткої множини A у X називається множина у звичайному розумінні, яка складається з елементів $x \in X$, ступені належності яких нечіткій множині A, не менші за число α. Таким чином, якщо A_α множина рівня α нечіткої множини A, то $A_\alpha = \{x | x \in X, \ \mu_A(x) \ge \alpha\}$.

Операціям над нечіткими множинами відповідають наведені нижче відношення між множинами рівня:

- ✓ операція об'єднання $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ (при визначенні об'єднання через алгебраїчну суму функцій належності – $(A \cup B)_\alpha \supseteq A_\alpha \cup B_\alpha$);
- ✓ операція перетину $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ (при визначенні перетину через алгебраїчний добуток функцій належності – $(A \cap B)_\alpha \subseteq A_\alpha \cap B_\alpha$);
- ✓ декартовий добуток – $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)_\alpha = (A_1)_\alpha \times (A_2)_\alpha \times \ldots \times (A_n)_\alpha$;
- ✓ опукла комбінація A нечітких множин $A_1, A_2, \ldots A_n$ – $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i)_\alpha \subseteq A_\alpha$.

У деяких випадках зручно користуватися *декомпозицією* (розкладанням) нечіткої множини за її множинами рівня, тобто представленням цієї множини у вигляді $A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha$, де $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x)$, а об'єднання нечітких множин береться по всіх α від 0 до 1.

Приклад 7.1.6. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$, а функція належності нечіткої множини A у X задана табл. 7.1.1.

Таблиця 7.1.1

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

Тоді *A* можна декомпозувати на такі множини рівня:

$$A_{0,1} = \{1, 2, \ldots, 6\}, \quad A_{0,3} = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A_{0,5} = \{3, 4, 5, 6\},$$

$$A_{0,7} = \{4, 5, 6\}, \quad A_{0,9} = \{5, 6\}, \quad A_{1,0} = \{6\}$$

і представити нечітку множину *A* у такому вигляді:

$$A = 0,1\{1, 2, \ldots, 6\} \cup 0,3\{2, 3, 4, 5, 6\} \cup 0,5\{3, 4, 5, 6\} \cup$$

$$\cup 0,7\{4, 5, 6\} \cup 0,9\{5, 6\} \cup 1\{6\}$$

Відображення нечітких множин. Лотфізаде запропонував визначення образа нечіткої множини при звичайному (чітко описаному) відображенні. Нехай $\phi : X \to Y$ – задане відображення і нехай *A* – деяка нечітка підмножина множини *X* із функцією належності $\mu_A(x)$. Відповідно до узагальнення Лотфізаде образ *A* при відображенні ϕ визначається як нечітка підмножина множини *Y*, що представляє собою сукупність пар виду $(y, \mu_B(y))$, де $\mu_B : Y \to [0,1]$ функція належності образа. Неважко зрозуміти, що функцію належності μ_B можна записати так:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y,$$

де $\phi^{-1}(y) = \{x | x \in X, \ \phi(x) = y\}, \ \forall y \in Y$, являє собою множину всіх елементів $x \in X$, образом кожного з яких при відображенні ϕ, є елемент *y*.

При такому підході *нечітке відображення чіткої множини* можна описати як відображення, при якому елементові $x \in X$ ставиться у відповідність не конкретний елемент множини *Y*, а нечітка підмножина множини *Y*. Це нечітке відображення описується функцією належності $\mu_\phi : X \times Y \to [0,1]$ так, що функція $\mu_\phi(x_0, y)$ (при фіксованому $x = x_0$) є функцією належності нечіткій множині у *Y* і представляє собою нечіткий образ елемента x_0 при даному відображенні.

У межах цієї концепції можна визначити *нечітке відображення нечіткої множини*. Нехай $\mu_\phi : X \times Y \to [0,1]$ задане нечітке відображення нечіткої множини $\mu_A(x)$ у *X*. Тоді образом цієї нечіткої множини при нечіткому відображенні буде сукупність пар виду $(\mu_\phi(x, y), \mu_A(x))$, $x \in X$, де $\mu_\phi(x,y)$ при кожному фіксованому $x \in X$ являє собою нечітку підмножину множини *Y*. Унаслідок чого одержуємо, що нечіткий образ нечіткої множини *у* даному випадку є досить складним об'єктом – нечіткий підклас класу всіх нечітких підмножин множини *Y*. Зрозуміло, що використання подібних об'єктів в аналізі реальних систем є досить важким.

Зручнішим для практичного використання є інший підхід, що запропонував С.О. Орловський [12].

Визначення 7.1.1. *Образом В у Y нечіткої множини А у X при нечіткому відображенні* $\mu_\phi : X \times Y \to [0,1]$ називається нечітка множина із функцією належності виду: $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\left\{\mu_\phi(x,y), \mu_A(x)\right\}$.

Якщо розуміти $\mu_A(x)$ як нечітке унарне відношення на множині *X*, то легко бачити, що в основі цього визначення образу лежить максмінний добуток (композиція) нечітких відношень $\mu_A(x)$ і $\mu_\phi(x,y)$ (див. нижче "Нечіткі бінарні відношення").

Неважко перевірити, що в окремому випадку, коли $\mu_\phi(x,y)$ – звичайне відображення: $\phi : X \to Y$ (тобто $\mu_\phi(x,y) = 1$ при $y = \phi(x)$ і $\mu_\phi(x, y) = 1$ для інших пар (x, y)), це визначення дає $\mu_B(y) = \sup_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y$, що відповідає наведеному вище класичному визначенню Лотфізаде для образа нечіткої множини при звичайному відображенні.

Введемо тепер визначення прообразу нечіткої множини при нечіткому відображенні.

Визначення 7.1.2. *Прообразом А нечіткої множини В у Y при нечіткому відображенні* $\mu_\phi : X \times Y \to [0,1]$ називається об'єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать (є підмножинами) нечіткій множині *B*.

Якщо образ нечіткої множини *a* при відображенні μ_ϕ позначати як $a \circ \mu_\phi$, то прообразом нечіткої множини *B* є об'єднання всіх множин *a*, що задовольняють умові $a \circ \mu_\phi \subseteq B$ чи, іншими словами, $\sup_{x \in X} \min\left\{\mu_\phi(x,y), \mu_a(x)\right\} \le \mu_B(y), \quad \forall y \in Y$.

Явний вираз для функції належності прообразу визначається так:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_B(y), & x \in X_0, \\ 1, & x \in X \setminus X_0, \end{cases}$$

де $X_0 = \left\{x \in X \middle| \exists y \in Y, \ \ \mu_\phi(x,y) > \mu_B(y)\right\}$, $N_x = \left\{y \in Y \middle| \ \mu_\phi(x,y) > \mu_B(y)\right\}$.

Приклад 7.1.7. Нехай в універсальній множині $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ нечітка множина *A* задається функцією належності $\mu_A(x)$ (табл. 7.1.2), а нечітке відображення $\phi: X \to Y$ функцією належності $\mu_\phi(x,y)$: $X \times Y \to [0,1]$ (табл. 7.1.3).

Таблиця 7.1.2

x	$\mu_A(x)$
x_1	0,4
x_2	0,6
x_3	1,0

Таблиця 7.1.3

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,7	1,0	0,1	0,3	0,6
x_2	0,7	0,4	0,7	0,5	0,6
x_3	0,3	0,4	0,1	0,2	1,0

1. Знайти образ *B* нечіткої множини *A*, що задається нечітким відображенням $\mu_\phi(x,y)$.

Для зручності позначимо через $M(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_\phi(x,y)\}$ і складемо табл. 7.1.4. З останнього рядка цієї таблиці отримаємо функцію належності $\mu_B(y)$ (табл. 7.1.5) образу *B* нечіткої множини *A* у *Y*, що задається нечітким відображенням $\mu_\phi(x,y)$.

Таблиця 1.4

x	$M(x,y_1)$	$M(x,y_2)$	$M(x,y_3)$	$M(x,y_4)$	$M(x,y_5)$
x_1	0,4	0,4	0,1	0,3	0,4
x_2	0,6	0,4	0,6	0,5	0,6
x_3	0,3	0,4	0,1	0,2	1,0
$\mu_B(y)$	0,6	0,4	0,6	0,5	1,0

2. Знайти прообраз A^* нечіткої множини B^* із функцією належності $\mu_{B^*}(y)$ (табл. 7.1.5), що задається відображенням $\mu_\phi(x,y)$. Побудуємо:

$$X_0=\left\{x\in X \,\middle|\, \exists y\in Y,\ \ \mu_\phi(x,y)>\mu_{B^*}(y)\right\}=\{x_1,x_2\}.$$

Відмітимо, що елемент x_3 множини *X* не буде належати множині X_0, оскільки, при будь-яких *y* числа у відповідних комірках рядка x_3 табл. 7.1.3 є не більшими за числа у відповідних комірках стовпчика $\mu_{B^*}(y)$ табл. 7.1.6. Тому одразу можна записати, що $\mu_{A^*}(x_3)=1$, і не будувати множину N_{x_3}. Для x_1, x_2 визначимо множини:

$$N_{x_1} = \left\{ y \in Y \,\middle|\, \mu_\phi(x_1, y) > \mu_B(y) \right\} = \left\{ y_1, y_2 \right\},$$
$$N_{x_2} = \left\{ y \in Y \,\middle|\, \mu_\phi(x_2, y) > \mu_B(y) \right\} = \left\{ y_1, y_3 \right\}.$$

Нарешті, за табл. 7.1.6 знайдемо:

$$\mu_{A^*}(x_1) = \min\{0,3,\quad 0,4\} = 0,3,$$
$$\mu_{A^*}(x_2) = \min\{0,3,\quad 0,7\} = 0,3\ .$$

Таблиця 7.1.5

y	$\mu_B(y)$
y_1	0,6
y_2	0,4
y_3	0,6
y_4	0,5
y_5	1,0

Таблиця 7.1.6

y	$\mu_{B^*}(y)$
y_1	0,3
y_2	0,7
y_3	0,4
y_4	0,6
y_5	1,0

Приклад 7.1.8. Нехай задана нечітка множина $A = \left\{ x \,\middle|\, \mu_A(x) = e^{-x/2} \right\}$ (рис. 7.1.6) в універсальній множині $X = E_{\geq 0}$ також нечітке відображення у множину $Y = E_{\geq 0}$ із функцією належності $\mu_\phi(x, y) = e^{-|x-y|}$ (графік при фіксованому y на рис. 7.1.7).

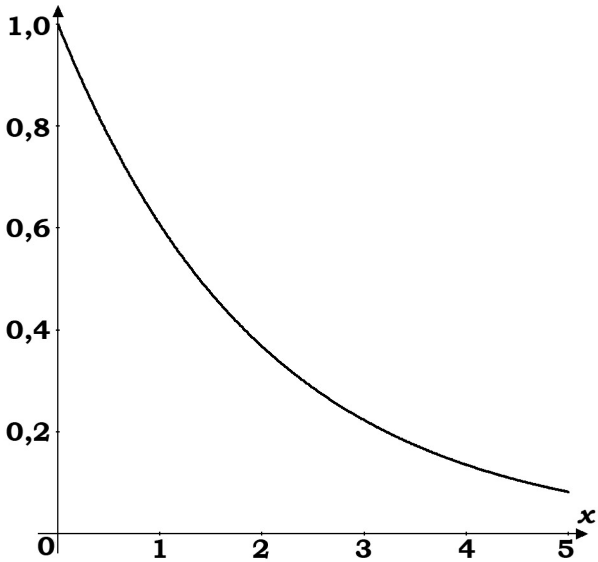

Рис. 7.1.6

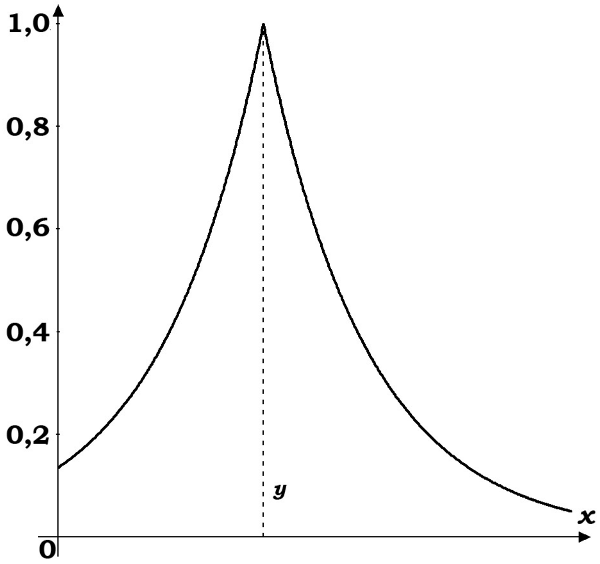

Рис. 7.1.7

1. Знайти образ *B* нечіткої множини *A*, що задається нечітким відображенням $\mu_\phi(x,y)$.

За означенням $\mu_B(y)=\sup\limits_{x\in X}\min\{\mu_\phi(x,y),\mu_A(x)\}$. На рис. 7.1.8 жирною лінією виділено графік функції $\min\left\{e^{-|x-y|},e^{-\frac{1}{2}x}\right\}$, із якого ми бачимо, що функція $\min\left\{e^{-|x-y|},e^{-\frac{1}{2}x}\right\}$ має два максимуми у точках $x=2/3y$ і $x=2y$, серед яких перший, для $\forall y\in E_{\geq}$, є глобальним. Таким чином, образ *B* нечіткої множини *A*, що задається нечітким відображенням $\mu_\phi(x,y)$ є нечіткою множиною з функцією належності

$$\mu_B(y)=\max_{x\in E_{\geq 0}}\min\left\{e^{-|x-y|},e^{-\frac{1}{2}x}\right\}=e^{-\frac{1}{3}y}.$$

2. Знайти прообраз A^* нечіткої множини B^*, яка задана функцією належності $\mu_{B^*}(y)=e^{-\frac{1}{4}y}$ (рис. 7.1.9), при нечіткому відображенні $\mu_\phi(x,y)$ (на рис. 7.1.10 представлений графік функції належності нечіткого відображення $\mu_\phi(x,y)$ при фіксованому $y=x$).

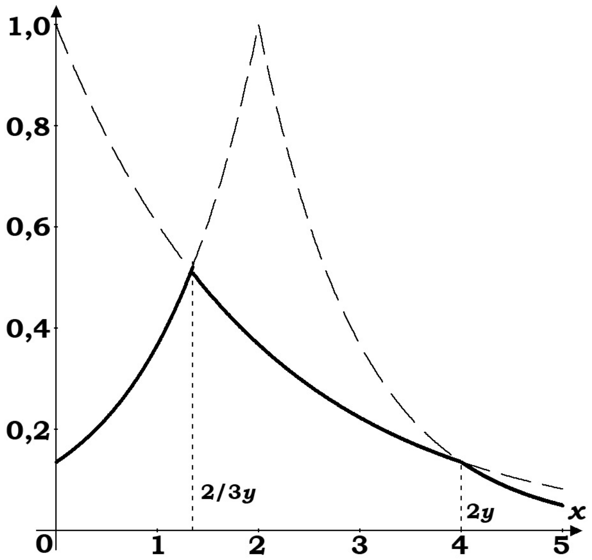

Рис. 7.1.8

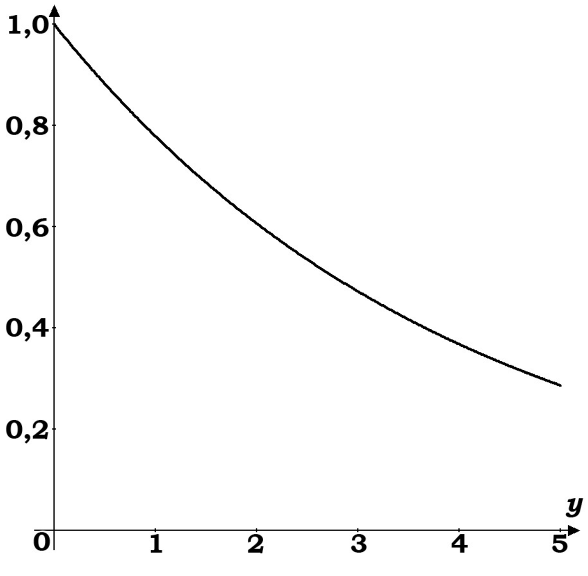

Рис. 7.1.9

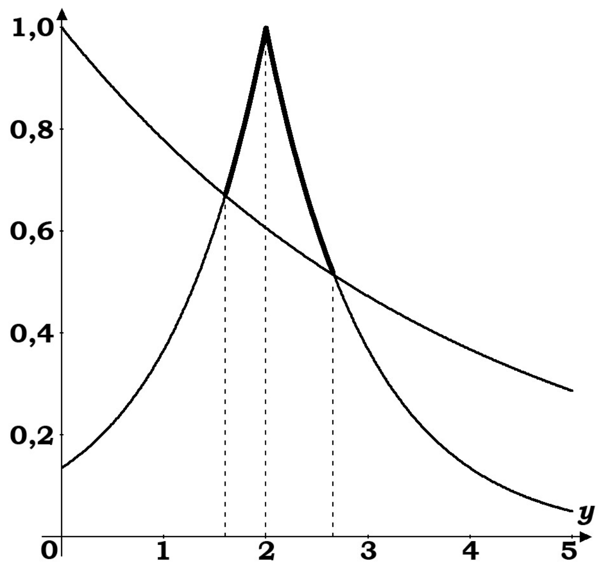

Рис. 7.1.10

Розв'язок. Побудуємо

$$X_0 = \left\{ x \middle| \exists y \in Y, \mu_\phi(x,y) > \mu_{B^*}(y) \right\} =$$

$$= \left\{ x \in E_{\geq 0} \middle| \exists y \in E_{\geq 0},\ e^{-|x-y|} > e^{-\frac{1}{4}y} \right\} = \left\{ x \in E_{\geq 0} \middle| \exists y \in E_{\geq 0},\ \frac{3}{4}y < x < \frac{5}{4}y \right\} = E_{>0}\,.$$

Одержали всі додатні точки числової осі.

Одразу можна записати, що $\mu_{A^*}(0) = 1$.

Визначимо множину:

$$N_x = \left\{ y \in Y \middle| \mu_\phi(x_1, y) > \mu_B(y) \right\} = \left\{ y \in E_{\geq 0} \middle| e^{-|x-y|} > e^{-\frac{1}{4}y} \right\} =$$

$$= \left\{ y \in E_{\geq 0} \middle| \frac{4}{5}x < y < \frac{4}{3}x \right\},\ \forall x \in E_{>0}$$

(це легко побачити з рис. 7.1.10; жирною лінією на графіку виділена частина, для якої нерівність виконується). Тепер знайдемо $\forall x \in E_{>0}$ функцію належності:

$$\mu_{A^*}(x) = \inf_{y \in N_x} \mu_B(y) = \min\left\{ e^{-\frac{1}{4}y} \middle| \frac{4}{5}x < y < \frac{4}{3}x,\quad y > 0 \right\} = e^{-\frac{1}{3}x}$$

(із рисунку бачимо, що мінімум досягається при $y = \frac{4}{3}x$). Остаточно отримаємо, $\mu_{A^*}(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$, $\forall x \in E_{\geq 0}$.

Нечіткі бінарні відношення. Аналогічно "звичайним" бінарним відношенням можна ввести *поняття нечіткого бінарного відношення* на множині X як нечітку підмножину декартового добутку $X \times X$ із функцією належності $\mu_R(x,y)$. Для нечітких бінарних відношень поняття носія й множини рівня нечіткого відношення на множині X, а також операції об'єднання, перетину, доповнення вводяться аналогічно введеним поняттям та операціям для нечітких множин так:

✓ носієм нечіткого відношення $\mu_R(x,y)$ на множині X називається нечітка множина $\sup \mathrm{p}R = \{x \,|\, x \in X,\ \ \mu_R(x,y) > 0\}$, $\forall x,y \in X$;

✓ множиною рівня α нечіткого відношення $\mu_R(x,y)$ на множині X називається чітка множина $R_\alpha = \{x \,|\, x \in X,\ \ \mu_\mathrm{R}(x,y) \geq \alpha\}$, $\forall x,y \in X$;

✓ об'єднанням нечітких відношень $\mu_R(x,y)$ і $\mu_S(x,y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R\cup S}(x,y) = \max\{\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\},\ \ \forall x,y \in X \ ;$$

✓ перетином нечітких відношень $\mu_R(x,y)$ і $\mu_S(x,y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R\cap S}(x,y) = \min\{\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\},\ \ \forall x,y \in X \ ;$$

✓ доповненням нечіткого бінарного відношення $\mu_R(x,y)$ на множині X називається нечітка множина з функцією належності

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y),\ \ \forall x,y \in X \ .$$

Операція композиції (добутку) вводиться різними способами:

✓ для максмінної композиції нечітких відношень R і S

$$\mu_{R\times S}(x,y) = \sup_{z\in X} \min(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y));$$

✓ для мінімаксної композиції

$$\mu_{R\times S}(x,y) = \inf_{z\in X} \max(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y));$$

✓ для максимультиплікативної композиції

$$\mu_{R\times S}(x,y) = \sup_{z\in X}(\mu_R(x,z) \circ \mu_S(z,y)).$$

Оскільки для $\forall x,y,z \in X$ виконуються нерівності :

$$\max(\mu_R(x,z), f_S(z,y)) \geq \min(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y)) \geq \mu_R(x,z) \circ \mu_S(z,y),$$

то, якщо позначити через R_1^2, R_2^2, R_3^2 – відповідно максмінну, мінімаксну та максимультипликативну композиції відношення R самого на себе, матимемо: $R_1^2 \supseteq R_2^2 \supseteq R_3^2$.

Для оберненого відношення R^{-1} : $\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x), \forall x,y.$

Якщо задавати бінарне відношення матрицею, то її елементи будуть довільними числами з відрізка [0, 1]. За змістом ця матриця аналогічна матриці, що описує "звичайне" бінарне відношення, але оскільки її елементи приймають значення не лише 0 чи 1, а й проміжні між ними, факт, що елемент r_{ij} цієї матриці дорівнює $\alpha \in [0,1]$ означає, що ступінь виконання відношення $x_i R x_j$ дорівнює α. Інтерпретація операцій над нечіткими бінарними відношеннями у термінах матриць, які їх задають, є такою ж самою як і у випадку "звичайних" бінарних відношень.

Найважливішими властивостями нечітких бінарних відношень, що використовуються у теорії прийняття рішень є:

- ✓ рефлексивність $(\mu_R(x,x)=1, \forall x)$;
- ✓ антирефлексивність $(\mu_R(x,x)=0, \forall x)$;
- ✓ симетричність $(\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x), \forall x,y)$;
- ✓ антисиметричність $(\min((\mu_R(x,y),\mu_R(y,x))=0, \forall x \neq y)$;
- ✓ транзитивність ($R \circ R \subseteq R$).

Варто зазначити, що оскільки операція композиції може бути введеною трьома способами (максмінна композиція, мінімаксна композиція, максимультипликативна композиція), то і властивість транзитивності визначається відповідно.

Нечіткі відношення переваги, байдужності, подібності та строгої переваги. Нехай X – задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги* на X будемо називати будь-яке задане на цій множині рефлексивне нечітке бінарне відношення. Оскільки нечітке відношення можна розуміти як нечітку підмножину декартового добутку $X \times X$, то нечітке відношення переваги $R_{\geq}$ на множині X будемо описувати функцією належності виду $\mu_{\geq}: X \times X \to [0,1]$, яка володіє властивістю рефлексивності, тобто $\mu_{\geq}(x,x)=1, \ \forall x \in X$.

Якщо $\mu_{\geq}$ нечітке відношення переваги на множині альтернатив X, то для будь-якої пари альтернатив $x, \ y \in X$, значення $\mu_{\geq}(x,y)$ розуміється як ступінь переваги "x не гірше за y" або $x \geq y$. Рівність $\mu_{\geq}(x,y)=0$ може означати або те, що з позитивним ступенем має місце зворотна перевага $y \geq x$, тобто, $\mu_{\geq}(y,x)>0$ або те, що альтернативи x і y є непорівнянні між собою з жодним позитивним ступенем, тобто, $\mu_{\geq}(y,x)=0$.

Рефлексивність нечіткого відношення переваги відбиває той природний факт, що будь-яка альтернатива $x \in X$ не гірша самої себе.

За заданим на множині X нечітким відношенням переваги $\mu_{\geq}$ можна однозначно визначити три відповідних йому нечітких відношення: *байдужності* $R_{\sim}$ (функцію належності будемо позначати через $\mu_{\sim}$), *подібності* $R_{\approx}(\mu_{\approx})$ (квазіеквівалентності) і *строгої переваги* $R_{>}(\mu_{>})$.

За аналогією зі звичайними відношеннями переваги ці три відношення можна визначити так:

$$R_{\sim} = (X \times X \setminus R_{\geq} \cup R_{\geq}^{-1}) \cup (R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1}),$$

$$R_{\approx} = R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1}, \quad R_{>} = R_{\geq} \setminus R_{\geq}^{-1},$$

де $R_{\geq}^{-1}$ – зворотне до відношення $R_{\geq}$, позначається через $R_{\leq}$ і описується функцією належності $\mu_{\leq}(x,y) = \mu_{\geq}(y,x), \quad \forall (x,y) \in X \times X$.

За визначеннями перетину, об'єднання й різниці нечітких множин, одержимо такі вирази для функції належності цих відношень:

1. Нечітке відношення байдужності:

$$\mu_{\sim}(x,y) = \max\left\{1 - \max\{\mu_{\geq}(x,y), \mu_{\geq}(y,x)\},\ \min\{\mu_{\geq}(x,y), \mu_{\geq}(y,x)\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\min\{1-\mu_{\geq}(x,y),\ 1-\mu_{\geq}(y,x)\},\ \min\{\mu_{\geq}(x,y),\ \mu_{\geq}(y,x)\}\right\}.$$

2. Нечітке відношення подібності: $\mu_{\approx} = \min\{\mu_{\geq}(x,y),\ \mu_{\geq}(y,x)\}$.

3. Нечітке відношення строгої переваги:

$$\mu_{>}(x,y) = \begin{cases} \mu_{\geq}(x,y) - \mu_{\geq}(y,x), & \mu_{\geq}(x,y) \geq \mu_{\geq}(y,x), \\ 0, & \mu_{\geq}(x,y) \leq \mu_{\geq}(y,x). \end{cases}$$

Розглянуті нечіткі відношення: байдужності $\mu_{\sim}$, подібності $\mu_{\approx}$ і строгої переваги $\mu_{>}$ успадковують властивості їхніх чітких прототипів.

1. Нечіткі відношення байдужності $\mu_{\sim}$ і подібності $\mu_{\approx}$ – рефлексивні та симетричні.

2. Нечітке відношення строгої переваги $\mu_{>}$ – антирефлексивне й антисиметричне.

3. Якщо вихідне нечітке відношення переваги на множині X транзитивне, то цією ж властивістю володіють нечіткі відношення подібності $\mu_{\approx}$ і строгої переваги $\mu_{>}$.

Контрольні завдання до § 1

1. Нехай в універсальній множині $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ задані дві нечіткі множини A і B, задані функціями належності

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0,2	0,1	0	0,1	0,9	0,3	0
$\mu_B(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

Знайти для цих множин: об'єднання; перетин; різницю.

2. Нехай задані дві нечіткі множини $A = \{x \in E^1 \mid x$ – приблизно дорівнює 1}, $B = \{x \in E^1 \mid x$ – приблизно дорівнює 3}. Знайти для цих множин

x	$\mu_A(x)$
x_1	0,2
x_2	0,1
x_3	0,5

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,3	0	0,8	0,2	0,1
x_2	0,5	0,6	0,1	0,5	0,6
x_3	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3

– об'єднання; перетин; різницю.

3. Нехай задано нечіткі множини $A = \left\{x \in E^1 \middle| \mu_A(x) = e^{-x}\right\}$ і $B = \left\{x \in E^1 \middle| \mu_B(x) = e^{-(x-3)^2}\right\}$. Знайти для цих множин об'єднання; перетин; різницю.

4. Нехай в універсальній множині $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ нечітка множина A задається функцією належності $\mu_A(x)$, а нечітке відображення $\phi : X \to Y$ функцією належності $\mu_\phi(x, y) : X \times Y \to [0, 1]$. Знайти образ B нечіткої множини A, що задається нечітким відображенням $\mu_\phi(x, y)$.

5. Нехай задана нечітка множина $A = \left\{x \in E^1 \middle| \mu_A(x) = e^{-x}\right\}$ в універсальній множині $X = E^1$ і також задане нечітке відображення у множину $Y = E^1$ із функцією належності $\mu_\phi(x, y) = e^{(x-y)^2}$. Знайти образ B нечіткої множини A.

~~§ 2. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги~~

~~Якщо інформація про ситуацію прийняття рішення описана у формі звичайного відношення переваги, раціональним, природно вважати вибір недомінованих альтернатив. Застосуємо подібний підхід до задачі прийняття рішень при нечітко описаному відношенні переваги на множині альтернатив. При цьому ми розглянемо спочатку задачі, у яких сама множина альтернатив описана чітко, тобто як звичайна множина, а потім звернемося до загального випадку з нечіткою множиною альтернатив.~~

~~Отже, нехай X – звичайна (чітко описана) множина альтернатив і $\mu_{\geq}$ задане на ньому нечітке відношення нестрогої переваги, а $\mu_{>}$ відпові-~~