~~**Контрольні завдання до § 2**~~

~~1. Обчислити вектор Шеплі для кооперативної гри:~~ $\cancel{c(1)=2}$, $\cancel{c(2)=1}$, $\cancel{c(3)=3}$, $\cancel{c(12)=2}$, $\cancel{c(13)=4}$, $\cancel{c(23)=3}$.

~~2. Знайти вектор Шеплі для кооперативної гри "Внески користувачів":~~ $\cancel{c_1=10}$, $\cancel{c_2=7}$, $\cancel{c_3=5}$, $\cancel{c_4=4}$, $\cancel{c_5=3}$.

~~3. Знайти *N* ядро для кооперативної гри з п. 2.~~

§ 3. Механізми колективного прийняття рішень

У цьому параграфі застосуємо введені у Розділі 2, § 4 поняття до деяких мікроекономічних проблем поділу витрат і розподілу прибутку.

При поділі витрат на виробництво неподільного суспільного продукту (наприклад, мосту) маються лише дані про загальні витрати на його будівництво й доходи, які кожен гравець має від експлуатації цього об'єкта. Іншою інтерпретацією моделі поділу витрат є розрахунок при банкротстві фірми. Кожен гравець має виражену у грошах претензію на її власність, але вся власність фірми виявляється меншою за суму претензій. Проблема полягає в тому, щоб поділити власність між кредиторами.

Задача поділу прибутку полягає в тому, що необхідно поділити виручку від неподільного кооперативного заходу, наприклад, футбольного матчу, між його учасниками – футболістами, тренерами, лікарями. Правило поділу повинно базуватись на оцінці "ринкової вартості" кожного гравця, що враховує його повні витрати (наприклад, його зарплату). Нехай гонорар від матчу перевищує суму повних витрат. Як він повинен бути розподіленим між учасниками?

Модель поділу прибутку. Об'єднання з n гравців отримують від кооперації дохід $r>0$. Повні витрати гравця i дорівнюють $c_i>0$. Кооперація прибуткова, тобто $\sum_{i=1}^{n} c_i < r$. Як поділити дохід r?

Перший принцип розподілу доходу r – індивідуальна раціональність. Кожен гравець повинен отримати не менше своїх повних витрат, інакше він не буде кооперуватись. Після цих виплат залишається прибуток $s=r-\sum_{i=1}^{n} c_i$, який потрібно поділити.

Оскільки прибуток отримується від кооперації гравців, то всі вони мають права на нього і чому б не вважати ці права рівними (ми не маємо інформації про внесок окремого гравця або коаліції гравців в отримання прибутку). Отже, при "егалітарному" розв'язку доля i-го гравця $y_i = c_i + s/n$.

Звичайно, гравець, у якого повні витрати перевищують середній рівень, може не погодитись із такою аргументацією. Необхідно розглядати, скаже він, повні витрати як фактори процесу виробництва, у якому дохід є результатом. На одиницю повних витрат дістається $r\Big/\sum_{i=1}^{n} c_i$ одиниць доходу і справедливим буде розподілити дохід пропорційно участі кожного, яка оцінюється індивідуальними витратами c_i, $i = \overline{1,n}$.

Отже, маємо "пропорційний" розв'язок $y_i = c_i\left(r\Big/\sum_{j=1}^{n} c_j\right)$, який також випливає з егалітарного принципу – віддача на одиницю індивідуальних витрат для всіх однакова. Але пропорційний поділ теж не позбавлений недоліків.

Нехай останні свої гроші перед стипендією три студенти витратили на торт вартістю 50 грн. (2010 р.). Один студент вклав 40 грн, другий – 9 грн, третій – 1 грн. Пропорційний поділ виділить першому 800 г торта, другому – 180 г, третьому – 20 г. Навряд чи третій студент погодиться отримати 20 г. Він відмовиться вносити свою гривню і внаслідок чого і перший, і другий студенти залишаться з нічим.

А який принцип поділу запропонували б Ви?

Модель поділу витрат. Колективний об'єкт (міст) коштує $c > 0$ й приносить дохід $b_i \geq 0$ кожному з його користувачів $i = \overline{1,n}$. Будівництво об'єкта ефективне: $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Як розподілити витрати c між гравцями? Формально ця модель є симетричною попередній моделі поділу прибутку, якщо розглядати b_i як повні витрати гравця i, а $s = \sum_{i=1}^{n} b_i - c$ як спільний прибуток. Але змістовна інтерпретація моделі поділу прибутку дасть нам нові принципи прийняття рішень.

При пропорційному розв'язку кожен гравець платить $x_i = b_i \dfrac{c}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$, $i = \overline{1,n}$. Зазначимо, що для $\forall i$: $0 \leq x_i \leq b_i$ (ніхто не отримує субсидій і не платить більше за свій дохід).

Егалітарний принцип може застосовуватись двома способами: вирівнюванням частки витрат і вирівнюванням чистої економії на витратах. Розв'язок із "рівномірним розподілом витрат" приписує кожному гравцю витрати $x_i = c/n$, розв'язок із "рівним прибутком" (тобто $b_i - x_i = b_j - x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)\Big/ n$ для всіх i, j) приписує кожному гравцеві витрати $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)\Big/ n$. Очевидний недолік рівномірного розподілу витрат полягає в тому, що якийсь гравець, можливо, повинен буде заплатити більше за свій дохід (тобто $\exists k$: $x_k = c/n > b_k$). При вирівнюванні прибутку можлива ситуація, коли якийсь гравець отримує субсидію за споживання продукту (тобто $\exists k$: $x_k = b_k - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)\Big/ n < 0$).

Оподаткування. Спробуємо модифікувати два останні принципи поділу, приймаючи $0 \le x_i \le b_i$, $i = \overline{1,n}$, як обмеження.

Визначення 6.3.1. Рівневий податок – це (єдиний) розподіл витрат $(x_1, \ldots, x_n)$ у моделі розподілу витрат при $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$, що є розв'язком задачі:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in A = \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i = c,\ 0 \le y_i \le b_i,\ \forall i \right\},$$

$$(b_1 - x_1, \ldots, b_n - x_n) LM (b_1 - y_1, \ldots, b_n - y_n),\ \forall y \in A,$$

де LM – лексимінний порядок на E^N.

Визначення 6.3.2. Подушний податок – це (єдиний) розподіл витрат $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, що задовольняє:

$$(x_1, \ldots, x_n) LM (y_1, \ldots, y_n),\ \forall y \in A.$$

Отже, рівневий податок вирівнює прибутки (чисті доходи) при обмеженнях $0 \le x_i \le b_i$, у той час, як подушний податок вирівнює витрати. Якщо частки витрат рівневого прибутку (рівномірний розподіл витрат) задовольняє цим обмеженням, то він збігається з рівневим податком (подушним податком).

Єдиність обох розв'язків випливає із єдиності лексимінного оптимуму на опуклій множині $A \subset E^n$.

"Податкова" термінологія належить Янгу (1987), який інтерпретував неподільний суспільний продукт як послуги, що надаються податківцем. Дохід гравця i до сплати податків дорівнює b_i, а його дохід після сплати податків дорівнює $b_i - x_i$. Таким чином, c – необхідна загальна сума податків (бюджет збирача податків).

Рівневий і подушний податки можна легко обчислити за допомогою такого параметричного представлення.

Теорема 6.3.1. Для задачі розподілу витрат $(b_1,\ldots,b_n;c)$, $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$, подушний податок обчислюється з розв'язку такого рівняння відносно параметра $\lambda \ge 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = c \;\Rightarrow\; x_i = \min\{\lambda, b_i\}. \qquad (6.3.1)$$

Рівневий податок обчислюється з розв'язку такого рівняння відносно $\lambda \ge 0$: $\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \Rightarrow x_i = b_i - \min\{\lambda, b_i\}$.

Знайдемо явний вираз для подушного й рівневого податків при $n = 2$. Нехай $b_1 < b_2$, розглянемо три випадки: 1) $\lambda \le b_1$; 2) $b_1 < \lambda \le b_2$ і 3) $b_2 < \lambda$.

За формулою (3.1) для першого випадку маємо: $\lambda + \lambda = c \Rightarrow \lambda = c/2 \le b_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = c/2$ при $0 \le c \le 2b_1$; для другого: $b_1 + \lambda = c \Rightarrow b_1 < \lambda = c - b_1 \le b_2 \Rightarrow x_1 = b_1$, $x_2 = c - b_2$, при $2b_1 < c < b_1 + b_2$. Для третього: $b_1 + b_2 = c$, що суперечить умові задачі.

Аналогічно отримуємо для рівневого податку:

$$\lambda = b_2 - c,\; x_1 = 0,\; x_2 = c, \text{ при } 0 \le c \le b_2 - b_1;$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - c),\, b_1 - x_1 = b_2 - x_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - c),\; b_2 - b_1 \le c < b_1 + b_2.$$

Бачимо, що подушний податок збігається з рівномірним розподілом витрат для малих значень c, а рівневий податок збігається з рівним прибутком для великих значень c. Ця властивість зберігається і для $\forall n$. Якщо кожне b_i додатне та $c/n \le \min\{b_j\}$, то подушний податок $x_i = c/n$, $i = \overline{1,n}$.

У той же час, якщо $\sum_{j=1}^{n} b_j - n \cdot \min\{b_j\} \le c \le \sum_{j=1}^{n} b_j$,то податок $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c \right) / n$, $i = \overline{1,n}$.

Розглянемо п'ять гравців із доходами: $b_1 = 4$, $b_2 = 12$, $b_3 = 20$, $b_4 = 24$, $b_5 = 30$. Загальний дохід дорівнює $\sum_{j=1}^{5} b_j = 90$. Розглянемо спочатку досить низькі витрати $c = 30$ (табл. 6.3.1). Однак, вони все ж не досить низькі, щоб подушний податок збігався з рівномірним розподілом ($x_i = 6$, для всіх i). Гравець 1 може заплатити лише $x_1 = 4$, після чого останні гравці рівномірно розподіляють витрати, що залишились. Разом із тим, рівневий податок дуже приємний для гравців 1 і 2, у той час, як останні гравці мають $14\frac{2}{3}$ одиниць прибутку. Тепер виберемо досить великі загальні витрати $c = 66$ (табл. 6.3.2).

Таблиця 6.3.1

Доходи	**4**	**12**	**20**	**24**	**30**	**Витрати**
Подушний податок	4	6.5	6.5	6.5	6.5	30
Пропорційний	$4/3$	4	$20/3$	8	10	30
Рівневий	0	0	$16/3$	$28/3$	$46/3$	30

Таблиця 6.3.2

Доходи	**4**	**12**	**20**	**24**	**30**	**Витрати**
Подушний податок	4	12	$50/3$	$50/3$	$50/3$	66
Пропорційний	2.9	8.8	14.7	17.6	22	66
Рівневий	0	7	15	19	25	66

При рівневому податку всі гравці, крім першого, отримують по п'ять одиниць прибутку. При подушному податку перші два гравці не отримують ніякого прибутку, останні три мають по $16\frac{2}{3}$ одиниць прибутку. Зазначимо, що в цих двох прикладах пропорційний податок, як правило, але не завжди, знаходиться між подушним і рівневим податками. Необхідність верхньої та нижньої границі на частки витрат ($0 \le x_i \le b_i$, $i = \overline{1,n}$) відповідають поняттю ядра у кооперативній грі, що описує повні витрати коаліцій так:

$$v(S) = \max\left(\sum_{i\in S} b_i - c, 0\right), \tag{6.3.2}$$

тобто коаліція S може отримати прибуток за рахунок будівництва та покриття витрат на нього (зокрема $v(S) = 0$, якщо $\sum_{i\in S} b_i \le c$).

Нехай $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Витрати $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$ задовольняють принципу відокремлення для даної кооперативної гри тоді й лише тоді, коли вектор прибутків $y = (b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n)$ належить ядру гри, тобто: $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$, $\forall S \subseteq N:\ \sum_{i \in S}(b_i - x_i) \ge v(S)\ \Leftrightarrow\ \sum_{i \in S}(b_i - x_i) \ge \max\left(\sum_{i \in S} b_i - c, 0\right) = \sum_{i \in S} b_i - c\ \Leftrightarrow$ $\sum_{i \in S} x_i \le c \Leftrightarrow \sum_{i \in S} x_i \le \min\left(c, \sum_{i \in S} b_i\right)$, оскільки $\sum_{i \in S} x_i \le \sum_{i \in S} b_i$.

Якщо взяти $S = \{i\}$, то з останньої нерівності випливає, що $x_i \le b_i$, для $\forall i$. Якщо взяти $S = N \setminus \{i\}$, то $\sum_{j \in S} x_j \le c - x_i \le \min\left(c,\ \sum_{j \in S} b_j\right)$. Якщо $c \le \sum_{j \in N \setminus \{i\}} b_j$, то $c - x_i \le c\ \Rightarrow\ x_i \ge 0$, для $\forall i$. Якщо $c \ge \sum_{j \in N \setminus \{i\}} b_j$, то $c - x_i \le \sum_{j \in N \setminus \{i\}} b_j\ \Rightarrow\ x_i \ge c - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} b_j \ge 0$. Отже, умова $\{0 \le x_i \le b_i \text{ для } \forall i\}$, еквівалентна умові належності вектора витрат x, $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$, ядру кооперативної гри (N, c) із функцією витрат (6.3.2). Тому, пропорційний розподіл, що є подушним або рівневим податком, належить ядру гри (N, c) (6.3.2).

Оскільки ми звели задачу розподілу витрат до кооперативної гри, логічно знайти це значення у вигляді *N*-ядра та вектора Шеплі.

Теорема 6.3.2. (Ауман, Машлер, 1985). *N*-ядро гри (6.3.2) відповідає таким долям витрат (λ – параметр):

1) $c \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i:\ \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\} = c\ \Rightarrow\ x_i = \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\},\ i = \overline{1,n}$;

2) $c \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i:\ \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c\ \Rightarrow\ x_i = b_i - \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\},\ i = \overline{1,n}$.

Ауман і Машлер звернули увагу на те, що *N*-ядро є розв'язком цікавої загадки з Талмуда (IV ст. до н. е.).

Помирає чоловік, у якого залишаються три дружини, претензії яких на спадщину дорівнюють відповідно 100, 200 й 300 одиниць. Талмуд рекомендує частки для величини спадщини з табл. 6.3.3.

Який логічний метод (алгоритм, принцип) лежить в основі розв'язку? Якщо при поділі "малої" спадщини у 100 одиниць (сума заявок $\sum_{j=1}^{3} b_j = 600$) долі відповідають методу рівного прибутку, то в інших випадках поділ прибутку відрізняється від рівневого, подушного та пропорційного податків (перевірте це). Виявляється, що долі прибутку, наведені у табл. 6.3.3 відповідають N-ядру (перевірте, застосуйте теорему 6.3.2 для величини витрат $c = b_1 + b_2 + b_3 - s$, де s – сума спадщини).

Таблиця 6.3.3

Заявка	100	200	300	Сума спадщини
Долі	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	100
	50	75	75	200
	50	100	150	300

Вектор Шеплі гри (6.3.2) не має такої простої формули як N-ядро. Однак його "податкова" інтерпретація дозволяє його легко обчислити. Гравці намагаються втекти від збирача податків. Він ловить їх одного за одним у випадковому порядку (усі порядки рівноймовірні). Спіймані гравці платять повну суму своїх доходів, поки витрати не будуть покриті. Нехай порядок затримання збігається з порядком $(1, 2, \ldots, n)$, витрати покриваються лише після затримання гравця $k+1$: $\sum_{j=1}^{k} b_j < c \le \sum_{j=1}^{k+1} b_j$. Тоді перші k гравців платять b_i, гравець $k+1$ платить $c - \sum_{i=1}^{k} b_i$, інші гравці не платять нічого.

В інтерпретації з банкрутством маємо симетричну історію. Гравці біжать у банк і отримують спадщину повністю у відповідності із заявкою (за принципом "хто перший прийшов, той перший і обслуговується"), поки спадщина повністю не вичерпається. У прикладі з Талмуда вектор Шеплі збігається з N-ядром, якщо спадщина дорівнює 100 або 300, але відрізняється від нього, якщо спадщина складає 200. У цьому випадку витрати дорівнюють $c = 600 - 200 = 400$. Тоді гравець 1 заплатить повністю свій дохід, якщо буде спійманим першим або другим, і нічого не заплатить, якщо буде спійманим останнім. Отже, його доля дорівнює $66\frac{2}{3}$. Далі, гравець 2 повинен заплатити 200, якщо буде спійманим першим, 100 або 200 із рівною ймовірністю, якщо спійманим другим, і нічого, якщо спійманим останнім. Отже, його доля дорівнює $116\frac{2}{3}$. Отже, спадщина за Шеплі ділиться як $\left(33\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}\right)$.

Розглянемо аксіоматичні моделі розподілу витрат і прибутку. Ці питання почали вивчатися в останні два десятиріччя.

Визначення 6.3.3. Для даної спільноти $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *механізмом розподілу витрат* називається відображення *x*, що ставить у відповідність кожній задачі $(b_1, \ldots, b_n; c)$, $\sum_{i \in N} b_i \geq c$, вектор часток витрат $x(b, c) = \left(x_i\left(b_1, \ldots, b_n; c\right)\right)_{i \in N}$, для якого $\sum_{i \in N} x_i(b, c) = c$.

Визначення 6.3.4. Кажуть, що механізм розподілу витрат *децентралізується*, якщо частка $x_i(b, c)$ гравця $i \in N$ залежить від величини витрат *c*, його особистого доходу b_i і спільного доходу:

$$\sum_{i \in N} b_i : x_i(b, c) = t_i\left(b_i;\ \sum_{i \in N} b_i;\ c\right).$$

Отже, якщо механізм розподілу витрат децентралізується, то кожен гравець не повинен знати деталі розподілу витрат між партнерами. Необхідно знати лише повний (або середній) дохід. Наслідком властивості децентралізованості є те, що для будь-якої коаліції *S* частка її витрат може бути обчислена за спільним доходом цієї коаліції та її доповнення: $\sum_{i \in S} x_i(b, c) = r_S\left(\sum_{i \in S} b_i;\ \sum_{j \in N \setminus S} b_j;\ c\right)$.

Теорема 6.3.3 (Мулен, 1985). Нехай $n \geq 3$, тоді існує єдиний механізм розподілу витрат, який узгоджується з децентралізацією і належить до ядра ($0 \leq x_i(b, c) \leq b_i,\ \forall i,\ b,\ c$). Це пропорційний податок.

Визначення 6.3.5. Механізм розподілу витрат задовольняє *аксіомі сумісності*, якщо для $\forall i,\ j,\ b,\ b',\ c,\ c'$ з умови $\left\{b_i = b_i',\ b_j = b_j'\right\}$ випливає $\left\{\left(x_i\left(b, c\right) - x_i\left(b', c'\right)\right) - \left(x_j\left(b, c\right) - x_j\left(b', c'\right)\right) \geq 0\right\}$.

Тобто, якщо дохід двох гравців фіксований, а всі інші параметри задачі змінюються, то ці зміни повинні бути вигідними або невигідними одночасно для обох.

Усі розглянуті вище механізми розподілу витрат (пропорційний, подушний, рівневі податки та *N*-ядро) окрім вектора Шеплі, задовольняють аксіомі сумісності. Характеризацію цих методів (необхідні та достатні умови) одержимо приєднанням до аксіоми сумісності ще двох аксіом: анонімності (якщо поміняти індекс *i* на *j*, то частка x_i поміняється на x_j) і неперервності (частка витрат неперервно змінюється при зміні *c*).

Контрольні завдання до § 3

1. Знайти рівневий податок для задач поділу витрат:
   1.1. $b=(1,3,5,6,10)$, $c=10$, $c=20$;
   1.2. $b=(1,5,8,12,14)$, $c=10$, $c=20$, $c=30$.
2. Знайти подушний податок для задачі поділу витрат із п. 1.
3. Знайти рівневий податок для задач поділу прибутку:
   3.1. $c=(1,3,5,6,10)$, $r=30$, $r=40$, $r=50$;
   3.2. $c=(1,5,8,12,14)$, $r=40$, $r=50$, $r=60$.
4. Знайти подушний податок для задач поділу прибутку з п. 3.
5. Знайти N-ядро для задач із п. 1, п. 3.
6. Знайти вектор Шеплі для задач із п. 1, п. 3.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ДО РОЗДІЛУ 6

1. Дайте визначення сильної рівноваги Неша.
2. Що таке рівновага у спільних змішаних стратегіях?
3. Опишіть моделі "Переговори", "Ввічливі водії", "Сімейна суперечка", "Музичні стільці", "Перехрестя із світофором".
4. У чому полягає стабілізація рівноваг Неша на основі погроз?
5. Що таке поділ у грі? Проаналізуйте гру "Торг".
6. Дайте визначення α і β-ядер.
7. Як задається кооперативна гра в нормальній формі?
8. Сформулюйте "принцип відокремлення", дайте визначення ядра кооперативної гри.
9. Сформулюйте теорему Бондаревої.
10. Що таке вектор Шеплі? Сформулюйте теореми Шеплі та Янга.
11. Дайте визначення N-ядра кооперативної гри.
12. Опишіть утилітарний та егалітарний розв'язки в грі "Внески користувачів".
13. Сформулюйте задачі поділу витрат і прибутку, доходу та прибутку.
14. Які основні принципи поділу витрат, їхні переваги та недоліки?
15. Що таке рівневий і подушний податки, як вони обчислюються?
16. Як задачі поділу витрат і прибутку зводяться до кооперативної гри?
17. Сформулюйте теорему Аумана–Машлера.
18. Наведіть "податкову" та "банкрутну" інтерпретацію вектора Шеплі.
19. Проведіть аналіз моделі "Поділ спадщини за Талмудом".
20. Що таке децентралізація механізму розподілу?
21. Сформулюйте теорему Мулена.