~~**Лема 6.1.12.** $x \in C_g(G) \Leftrightarrow x \in PO$ і $u_i(x) \le \beta_i$ для $i \in N$.~~

~~Доведення випливає з двох попередніх лем, звідки $C_g(G) \subseteq C_\gamma(G)$, зокрема, $C_g(G)$ може бути порожнім.♦~~

~~**Контрольні завдання до § 1**~~

~~1. Знайти сильні рівноваги Неша~~

~~1.1~~

~~$X_1 \backslash X_2$~~	~~a_2~~	~~b_2~~	~~c_2~~
~~a_1~~	~~1, 2~~	~~1, 2~~	~~2, 1~~
~~b_1~~	~~1, 2~~	~~1, 3~~	~~2, 1~~
~~c_1~~	~~0, 0~~	~~0, 1~~	~~2, 1~~

~~1.2~~

~~$X_1 \backslash X_2$~~	~~a_2~~	~~b_2~~	~~c_2~~
~~a_1~~	~~3, 1~~	~~2, 2~~	~~1, 1~~
~~b_1~~	~~2, 1~~	~~3, 1~~	~~2, 1~~
~~c_1~~	~~2, 3~~	~~3, 2~~	~~2, 1~~

~~1.3~~

~~$X_1 \backslash X_2$~~	~~a_2~~	~~b_2~~	~~c_2~~
~~a_1~~	~~2, 4~~	~~1, 3~~	~~3, 4~~
~~b_1~~	~~2, 5~~	~~3, 3~~	~~4, 3~~
~~c_1~~	~~1, 1~~	~~4, 2~~	~~4, 2~~

~~2. Знайти рівноваги Неша у спільних змішаних стратегіях:~~

~~2.1~~

~~$X_1 \backslash X_2$~~	~~a_2~~	~~b_2~~
~~a_1~~	~~2, 2~~	~~5, 1~~
~~b_1~~	~~1, 5~~	~~1, 1~~

~~2.2~~

~~$X_1 \backslash X_2$~~	~~a_2~~	~~b_2~~
~~a_1~~	~~2, 2~~	~~5, 1~~
~~b_1~~	~~1, 4~~	~~1, 1~~

§ 2. Ігри у характеристичній формі

У кооперативних іграх доцільно розглядати виграші не лише для окремих гравців (індивідуальні корисності), і не лише для всієї спільноти N (колективна функція корисності, наприклад, утилітарна чи егалітарна), але й для кожної коаліції гравців (не порожньої підмножини) з N.

Нехай $N = \{\overline{1, n}\}$ – множина потенційно можливих споживачів об'єкта колективного користування. Кожен споживач може або обслуговуватись або ні, наприклад, він або отримує телефон, або ні, підключається до центрального водопостачання, або ні і т. д. Витрати на обслуговування коаліції гравців S, $S \subseteq N$, підсумовуються в загальну функцію витрат $c(S) \ge 0$, де $c(S)$ – мінімальні витрати на обслуговування коаліції гравців S найбільш ефективним способом. Необхідно обслужити всіх гравців і поділити відповідні витрати, тобто визначити вектор $x=(x_i)_{i\in N}$ такий, що $\sum_{i\in N} x_i = c(N)$. Зокрема, для деякого j може бути, що $x_j=0$ (j-й гравець не несе жодних витрат), для деякого k $x_k<0$ (k-му гравцю "доплачують").

Розглянемо типовий приклад такої проблеми з області планування капіталовкладень – побудова сусідніми трьома містечками спільної системи водопостачання. Опишемо витрати на будівництво. Місто A окремо – 120 одиниць витрат ($c(A)=120$), $c(B)=140$, $c(C)=120$. Якщо міста A і B об'єднають свої зусилля, то $c(A,B)=170$; $c(B,C)=190$; $c(A,C)=160$. Якщо проект буде реалізуватись спільно всіма, то $c(A,B,C)=255$. Зазначимо, що для зручності позначення $c(A,B,C)$ означає $c(\{A,B,C\})$.

Нехай про співпрацю домовились A і B, тоді економія витрат $\Delta c(A,B)$ для них дорівнює $c(A)+c(B)-c(A,B)=90$. Якщо A і B домовились поділити $\Delta c(A,B)=90$ порівну (егалітарне рішення), то остаточні витрати будуть $c_A=120-45=75$, $c_A=140-45=95$.

Оскільки загальні витрати будуть рівними $290=170+120$ (C будує самостійно), то при раціональній поведінці всіх гравців їм потрібно кооперуватись (щоб мати витрати 255 одиниць).

Нехай усі три гравці співпрацюють, економія

$$\Delta c(A,B,C)=c(A)+c(B)+c(C)-c(A,B,C)=125$$

ділиться порівну. Тоді

$$c_A=120-\frac{1}{3}(125)=78\frac{1}{3},\ c_B=140-\frac{1}{3}(125)=98\frac{1}{3},$$

$$c_C=120-\frac{1}{3}(125)=78\frac{1}{3}.$$

Хоча загальні витрати у даному випадку менші за попередній варіант, але "раціонально мислячі" A і B на нього не погодяться! Адже вони несуть витрати більші ($c_A+c_B=176\,{}^1\!/_3$), ніж у попередньому випадку, коли "відділяться" ($c(A,B)=170$). Отже, егалітарний поділ спільної економії у даному випадку нелогічний.

"*Принцип відокремлення*" говорить, що будь-яка коаліція не заплатить ціну, що є більшою за витрати, які вона понесе, якщо захоче обслуговуватись самостійно:

$$\forall S\subseteq N:\ \sum_{i\in S} x_i \le c(S). \qquad (6.2.1)$$

Визначення 6.2.1. Будемо говорити, що задана кооперативна гра у *характеристичній формі* (N,c), якщо задано $N=\{1,\ldots,n\}$ – множину гравців і функцію витрат c, яка пов'язує з кожною коаліцією $S\subseteq N$ її витрати $c(S)\geq 0$.

Визначення 6.2.2. Ядром гри (N,c) називається розподіл витрат $x=(x_i)_{i\in N}$, $\sum\limits_{i\in N}x_i=c(N)$, що задовольняє умові (6.2.1).

Принцип відокремлення можна переписати в еквівалентній формі у вигляді "принципу відсутності субсидій": ніяка коаліція не повинна платити менше, ніж додаткові витрати на її обслуговування (різниця у витратах з коаліцією та без неї): $\forall S\subseteq N$:

$$\sum_{i\in S}x_i\geq c(N)-c(N\setminus S). \qquad (6.2.2)$$

Т. я. $\sum\limits_{i\in N}x_i=c(N)$, то з (6.2.1)

$$\sum_{i\in S}x_i\geq\sum_{i\in N}x_i-c(N\setminus S)\Leftrightarrow c(N\setminus S)\geq\sum_{i\in N\setminus S}x_i.$$

Якщо розглядається кооперативна гра (N,v) по розподілу прибутку, то у формулах (6.2.1), (6.2.2) необхідно відповідно поміняти знаки.

Повернемось до нашого прикладу. Знайдемо розподіл витрат із ядра гри (при такому розподілі, якщо він існує, будь-якій коаліції гравців не вигідно відділятись). Ядро визначається такими співвідношеннями:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=255,\ x_1\leq 120,\ x_2\leq 140,\ x_3\leq 120,\\ x_1+x_2\leq 170,\ x_2+x_3\leq 190,\ x_1+x_3\leq 160.\end{cases} \qquad (6.2.3)$$

Для того, щоб подати розв'язок системи (6.2.3) більш наглядно, зробимо заміну змінних $y_i=c(i)-x_i$ (y_i – "економія" витрат гравця i). Отримаємо систему:

$$\begin{cases}y_1+y_2+y_3=125,\ y_i\geq 0,\ i=1,2,3,\\ y_1+y_2\geq 90,\ y_2+y_3\geq 70,\ y_1+y_3\geq 80.\end{cases} \qquad (6.2.4)$$

Використаємо барицентричні координати – виділимо на площині три точки, яким відповідають розв'язки системи (6.2.4) $(y_1,y_2,y_3)\in\{(125,0,0),(0,125,0),(0,0,125)\}$, (відповідно до вершин трикутника ABC (рис. 6.2.1). Тоді рівнянню $y_1+y_2=80$ буде відповідати пряма, паралельна стороні AC, $y_1+y_3=90$ – паралельна AB, $y_2+y_3=70$ – паралельна BC. Ядром гри будуть точки заштрихованого трикутника. Логічно вибрати за розв'язок центр цього трикутника (центр описаного кола) – егалітарний розв'язок $y^*=\left(51\tfrac{2}{3},41\tfrac{2}{3},31\tfrac{2}{3}\right)$.

Повертаючись до змінних x_i, матимемо $x^* = \left(68\,{}^1\!/_3, 98\,{}^1\!/_3, 88\,{}^1\!/_3\right)$. Відмітимо, що ядро кооперативної гри може бути порожнім, тобто "повна кооперація" неможлива – існує хоча б одна коаліція, якій вигідно відділитись. Так, нехай витрати всіх власних коаліцій у нашому прикладі залишають без змін, витрати максимальної коаліції $c(A, B, C) > 260$. Тоді з $\{x_1 + x_2 \le 170,\ x_2 + x_3 \le 190,\ x_1 + x_3 \le 160\} \Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) \le 520$, що суперечить $x_1 + x_2 + x_3 > 260$.

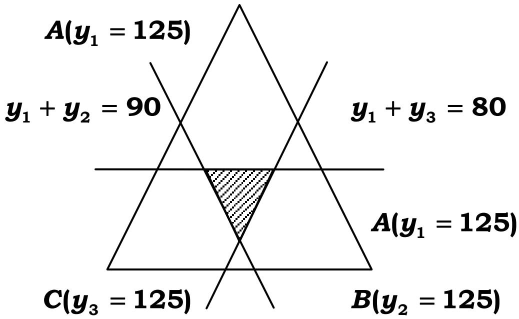

Рис. 6.2.1

Виникає питання: за яких умов ядро кооперативної гри не порожнє? Необхідною умовою непорожності ядра є *субадитивність*: якщо коаліції $S_1, \dots, S_k$ утворюють розбиття максимальної коаліції

$$(S_i \cap S_j = \varnothing,\ i \ne j,\ \bigcup_{i=1}^{k} S_i = N), \text{ то } \sum_{i=1}^{k} c(S_i) \ge c(N). \tag{6.2.5}$$

Дійсно, нехай (6.2.5) не виконується, тобто $\sum_{i=1}^{k} c(S_i) < c(N)$. Із принципу відокремлення $\sum_{i \in S_j} x_i \le c(S_j)$ для $\forall j = \overline{1,k}$. Беручи суму по $j = \overline{1,k}$, маємо суперечність : $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i \in S_j} x_i = \sum_{i \in N} x_i = c(N) \le \sum_{j=1}^{k} c(S_j) < c(N)$.

Але субадитивність є лише необхідною умовою непорожності ядра. У нашому прикладі для витрат, наприклад, $c(A, B, C) = 261$ ядро порожнє, хоча властивість субадитивності виконується:

$$c(A, B, C) \le c(A) + c(B) + c(C),\ c(A, B, C) \le c(A) + c(B, C),$$
$$c(A, B, C) \le c(B) + c(A, C),\ c(A, B, C) \le c(C) + c(A, B).$$

Необхідною й достатньою умовою непорожності ядра гри (N,c) є суттєве підсилення властивості (6.2.5).

Визначення 6.2.3. Збалансованим покриттям N є таке відображення δ з $2^N \setminus \{N\}$ (множина власних коаліцій) у $[0,1]$, що $\sum_{S:i\in S} \delta_S = 1, \forall i \in N$, де сума береться по всіх власних коаліціях, яким належить гравець i.

Теорема 6.2.1 (Бондарева,1961). Ядро гри не порожнє тоді й лише тоді, коли для будь-якого збалансованого покриття δ

$$\sum_{S\subset N} \delta_S \cdot c(S) \ge c(N). \qquad (6.2.6)$$

Доведення. Нехай x належить ядру гри (N,c) і δ – збалансоване покриття. Тоді для $\forall S \subset N$: $\sum_{i\in S} x_i \le c(S) \Rightarrow \delta_S \left(\sum_{i\in S} x_i \right) \le \delta_S \cdot c(S)$. Беручи суму в останній нерівності та враховуючи (6.2.6): $\sum_{S\subset N} \delta_S c(S) \ge \sum_{S\subset N} \delta(S) x(S) = \sum_{i\in N} \sum_{S:i\in S} \delta_S x_i = \sum_{i\in N} x_i = c(N)$.

Нехай тепер ядро гри (N,c) порожнє. Це означає, що гіперплощина $\sum_{i\in N} x_i = c(N)$ не перетинається з непорожньою опуклою підмножиною з E^N, що визначається нерівностями: $\sum_{i\in N} x_i \le c(S)$ для $\forall S \subset N$. За теоремою опуклого аналізу про відділяючу гіперплощину, маємо для кожної коаліції S існування такого невід'ємного числа δ_S, що для $\forall x \in E^N$, $\sum_{i\in N} x_i = \sum_{S\subset N} \delta_S \left(\sum_{i\in S} x_i \right)$ і $\sum_{S\subset N} \delta_S c(S) < c(N)$, що суперечить (6.2.6).♦

Для гри з розподілом прибутків (6.2.6) заміняється умовою:

$$\sum_{S\subset N} \delta_S v(S) \le v(N). \qquad (6.2.7)$$

Умови (6.2.6), (6.2.7) називаються збалансованістю гри (N,c) та змістовно вони означають, що кооперативні витрати $c(S)$ власних коаліцій не повинні бути занадто малими порівняно з витратами $c(N)$ максимальної коаліції (відповідно прибутки $v(S)$ власних коаліцій – занадто великими порівняно з $v(N)$).

Зазначимо, що субадитивність є частинним випадком умови (6.2.6) (покладемо $\delta_{S_i} = 1$ для $i = \overline{1,k}$, $\delta_S = 0$ для всіх інших коаліцій).

Зазначимо також, що збалансовані покриття утворюють опуклий компактний многогранник у $E^{2^N \setminus \{N\}}$. Отже, властивість (6.2.6) досить перевірити для крайніх точок цього многогранника, що означає скінченність системи лінійних нерівностей виду (6.2.6).

Розглянемо гру з трьома гравцями. Збалансовані покриття утворюють многогранник у E^6 розмірності 3 із п'ятьма крайніми точками. Чотири з них відповідають розбиттям: $(\{1\},\{2\},\{3\})$, $(\{1\},\{2,3\})$, $(\{2\},\{1,3\})$, $(\{3\},\{1,2\})$. Для п'ятого покриття $\delta_S = 1/2$ для $|S| = 2$ і $\delta_S = 0$ для $|S| = 1$.

Отже, гра (N, c) із трьома гравцями має непорожнє ядро тоді й лише тоді, коли

$$\begin{gathered} c(1)+c(2)+c(3) \geq c(N),\ c(1)+c(2,3) \geq c(N), \\ c(2)+c(1,3) \geq c(N),\ c(3)+c(2,1) \geq c(N), \\ 0{,}5\big(c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)\big) \geq c(N). \end{gathered} \tag{6.2.8}$$

У кооперативній грі з чотирма гравцями збалансовані покриття утворюють многогранник у E^{14} із 23 крайніми точками! Кількість нерівностей виду (6.2.6) можна суттєво скоротити, якщо гра "супераддитивна": для $\forall S, T$, $S \cap T = \varnothing \;\Rightarrow\; c(S)+c(T) \geq c(S \cup T)$ (зазначимо, що більшість "економічних" ігор є супераддитивними).

Для такої гри умови непорожності ядра зводяться до перевірки нерівностей:

$$\tfrac{1}{3}\big(c(1,2,3)+c(2,3,4)+c(1,3,4)+c(1,2,4)\big) \geq c(N), \tag{6.2.9}$$

$\tfrac{1}{2}\big(c(1,2,3)+c(2,3,4)+c(1,4)\big) \geq c(N)$ та 5 аналогічних (6.2.9) нерівностей з врахуванням перестановки гравців.

Вище ми розглянули таку концепцію визначення розподілу кооперативних ігор – розподіл "розумно" вибирати з ядра гри (якщо воно непорожнє), тобто фактично застосували принцип егалітаризму. Як ми бачили вище, принцип егалітаризму не є єдиною можливою концепцією вибору й до того ж не позбавлений негативних властивостей ("рівність у бідності"). Тому виникає закономірне питання – як можна застосувати принцип утилітаризму до знаходження розподілу гри та які основні властивості "егалітарних" і "утилітарних" розподілів?

Нехай коаліційні можливості суспільства збільшуються ($v(N)$ зростає або відповідно $c(N)$ зменшується), а можливості всіх інших коаліцій не змінюються. Чи будуть при цьому збільшуватись прибутки всіх членів суспільства (відповідно зменшуватись витрати)? Якщо так, то розподіл задовольняє властивості "коаліційної монотонності". Виявляється, що: або "принцип відокремлення" (вибір із ядра), або "коаліційна монотонність"!

Розглянемо вибір розподілу, що відповідає принципу утилітаризму. У ньому доля прибутку кожного гравця в розподілі $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ залежить від його "внеску" у прибуток кожної коаліції, тобто від величини $(v(S \cup i) - v(S))$, $i \notin S$ (прибуток коаліції S з гравцем i та без нього, так званий "маргінальний прибуток".

Визначення 6.2.4. Для гри (N,v) *вектором Шеплі* σ називається наступний розподіл прибутку максимальної коаліції $v(N)$:

$$\sigma_i = \sum_{0 \le s \le n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{S \subseteq N \setminus i,\ |S|=s} \left(v(S \cup i) - v(S)\right),\ i = \overline{1,n},\ v(\varnothing) = 0. \quad (6.2.10)$$

Змістовно формула (6.2.10) пояснюється так. Нехай гравці з N упорядковані $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ випадково з рівною ймовірністю для кожного упорядкування. Вага внеску i-го гравця в коаліцію S відповідає ймовірності того, що у черзі $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ перед гравцем i стоять у точності елементи з множини S. Ця ймовірність, очевидно, дорівнює $s!(n-s-1)!/n!$, де $s = |S|$. Перевіримо рівність $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = v(N)$ безпосередньо з формули (2.10). Зафіксуємо довільну власну коаліцію S тоді її коефіцієнт: $s\left(\frac{(s-1)!(n-(s-1)-1)!}{n!}\right) - (n-s)\left(\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\right) = 0$, коефіцієнт же при $v(N)$ дорівнює $n\left(\frac{(n-1)!0!}{n!}\right) = 1$. Для гри (N,c) у формулах (6.2.10) замість v необхідно підставити c. Розглянемо гру (N,v) трьох осіб. Формула (6.2.10) для $i = 1$ набуває вигляду:

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{3} v(1) + \tfrac{1}{6}\left(\left(v(1,2) - v(2)\right) + \left(v(1,3) - v(3)\right)\right) + \tfrac{1}{3}\left(v(N) - v(2,3)\right) =$$
$$= \tfrac{1}{3} v(N) + \tfrac{1}{6}\left(v(1,2) + v(1,3) - 2v(2,3)\right) + \tfrac{1}{6}\left(2v(1) - v(2) - v(3)\right).$$

Аналогічно, заміною індексу $i = 1$ на $i = 2, 3$ отримуємо σ_2 й σ_3.

Для прикладу, розглянутого на початку параграфа, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left(73\tfrac{1}{3}, 98\tfrac{1}{3}, 83\tfrac{1}{3}\right)$. Цей розподіл ядру не належить ($\sigma_1 + \sigma_2 = 171\tfrac{2}{3} > 170$).

Розглянемо ще один приклад ("Внески користувачів"). Об'єднання з n авіакомпаній розподіляють витрати на будівництво злітної смуги. Витрати на будівництво пропорційні довжині смуги. Для i-ї авіакомпанії досить, щоб довжина смуги була рівною c_i. Без обмеження загальності нехай: $c_n \le c_{n-1} \le \ldots \le c_2 \le c_1$.

Маємо таку гру розподілу витрат: $c(S) = \max_{i \in S}\{c_i\}$, $\forall S \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Формула (6.2.10) дає такий результат: $\sigma_n = \frac{1}{n} c_n$,

$$\sigma_{n-1} = \frac{1}{n} c_n + \frac{1}{n-1}(c_{n-1} - c_n), \ \ldots, \ \sigma_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}(c_j - c_{j+1}), \ i = \overline{1,n}, \ c_{n+1} = 0 .$$

Тобто у будівництві найкоротшої смуги беруть участь усі компанії (і ділять витрати порівну), у будівництві відрізка смуги $(c_n - c_{n-1})$ бере участь $(n-1)$ – а компанія (крім компанії з номером n) і теж ділять витрати порівну і т. д.

Як ми бачили вище, вектор Шеплі може не належати ядру гри. Важливим класом ігор, у яких ядро не порожнє і містить вектор Шеплі, є "опуклі ігри".

Визначення 6.2.5. Кооперативна гра (N,v) називається *опуклою*, якщо вона задовольняє одній із двох еквівалентних умов ($v(\varnothing) = 0$):

1) $\forall i \in N$, $\forall S,T \subseteq N \setminus \{i\}$: $(S \subseteq T) \Rightarrow (v(S \cup i) - v(S) \le v(T \cup i) - v(T))$;

2) $\forall S,T \subseteq N$: $v(S) + v(T) \le v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

Лема 6.2.1. Нехай (N,v) – опукла гра, $N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Тоді вектор маргінальних внесків $x_{i_k} = v(i_1, \ldots, i_k) - v(i_1, \ldots, i_{k-1})$ належить ядру гри. Отже, вектор Шеплі також належить ядру.

Справедливе й обернене твердження – якщо всі вектори маргінальних внесків належать ядру, то гра є опуклою.

В опуклих іграх вектор Шеплі займає "центральне положення" у ядрі, оскільки ядро опуклої гри є опуклою оболонкою векторів маргінальних внесків [7].

Визначення 6.2.6. Оператором значення гри (N,v) є відображення ϕ із E^{2^N} у E^N, що ставить у відповідність кожній грі (N,v) розподіл $\phi(v)$ величини $v(N)$: $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$.

Визначення 6.2.7. Оператор значення $\phi(v)$ гри (N,v) задовольняє "*аксіомі анонімності*", якщо він комутує з перестановкою гравців, тобто для довільної бієкції τ множини N у себе і $\forall v \in E^{2^N}$ має місце рівність $\tau(\phi(v)) = \phi(\tau(v))$, де $\tau(v)(S) = v(\tau(S))$, при $S \subseteq N$; $\tau(x)_i = x_{\tau(i)}$ при $x \in E^N$.

Визначення 6.2.8. Оператор значення ϕ гри (N,v) задовольняє "*аксіомі адитивності*", якщо $\forall v, w \in E^{2^N}$: $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$.

Визначення 6.2.9. Оператор значення ϕ гри (N,v) задовольняє "*аксіомі бовдура*", якщо $\forall i \in N$, $\forall v \in E^{2^N}$:

$$\{v(S \cup i) = v(S), \forall S \subseteq N \setminus i\} \;\Rightarrow\; \phi_i(v) = 0 .$$

Теорема 6.2.2 (Шеплі, 1953). Існує лише один оператор ϕ , що задовольняє аксіомам анонімності, адитивності й бовдура. Це – вектор Шеплі.

Визначення 6.2.10. Оператор значення ϕ гри (N,v) задовольняє аксіомі *маргінальності*, якщо $\phi_i(v)$ залежить лише від вектора $(v(S \cup i) - v(S))_{S \subseteq N \setminus i}$, тобто:

$$\left\{v(S \cup i) - v(S) = w(S \cup i) - w(S), \forall S \subseteq N \setminus i\right\} \;\Rightarrow \phi_i(v) = \phi_i(w) ,$$

$$\forall v, w \in E^{2^N} , \; \forall i \in N ,$$

де $v(\varnothing) = w(\varnothing) = 0$.

Теорема 6.2.3. (Янг, 1985). Існує лише один анонімний і маргінальний оператор значення. Це – вектор Шеплі.

Теореми Шеплі та Янга є "характеризаціями" вектора Шеплі. Маються й інші характеризації та узагальнення вектора Шеплі [7].

Повернемось до принципу егалітаризму у виборі розподілу кооперативної гри. Перший крок – це виділення ядра, другий – знаходження "егалітарного" розподілу з ядра.

Визначення 6.2.11. Лексимінний оптимум $\gamma = (\gamma_i)_{i \in N}$ на множині векторів $e(x) = \left(e(x,S) \equiv \sum_{i \in S} x_i - v(S) \right)_{S \subset N}$ таких, що $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, називається N – *ядром* гри (N,v).

Величина $e(x,S)$ називається *ексцесом*, це по суті "наддохід" коаліції S порівняно з її власними можливостями. Ексцеси різних коаліцій порівнюються егалітарно. У першу чергу, розглядається мінімальний прибуток, який максимізується. Вектор ексцесів $e(\gamma)$ максимізує на множині розподілів x , $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, егалітарну функцію колективної корисності за умови, що корисність кожної коаліції вимірюється її ексцесом:

$$\min_{S \subset N} \left(\sum_{i \in S} \gamma_i - v(S) \right) = \max_{x:\, \sum_{i \in N} x_i = v(N)} \left\{ \min_{S \subset N} \left(\sum_{i \in S} x_i - v(S) \right) \right\} \qquad (6.2.11)$$

Далі серед розв'язків (6.2.11) N-ядро вибирає такий розподіл, при якому максимального значення досягає другий за мінімальністю коаліційний прибуток. Насамкінець такий процес приводить до єдиного розподілу, яке і є *N*-ядром.

Зазначимо, що коли ядро гри (N, v) непорожнє, то всі розв'язки задачі (6.2.11) йому належать. Дійсно, якщо розподіл x належить ядру, то $\min\limits_{S \subset N} e(x, S) \geq 0$. Тоді будь-який розв'язок (6.2.11) задовольняє цій нерівності, що і свідчить про належність його ядру.

Навіть для гри трьох осіб не так легко привести загальну формулу для *N*-ядра. "Геометрично" *N*-ядро займає "центральну" позицію в середині ядра гри.

Розглянемо задачу "Внески користувачів". Нехай як і при обчисленні вектора Шеплі витрати впорядковані: $0 \leq c_n \leq c_{n-1} \leq \ldots \leq c_2 \leq c_1$. Нехай також $\delta_i = c_i - c_{i+1}$, $i = \overline{1, n}$, $c_{n+1} = 0$. Обчислення N-ядра є вельми важкою задачею. Обсудимо лише частинний випадок $\delta_1 \geq \delta_2 \geq .. \geq \delta_n$, для якого існує формула: $\gamma_1 = \delta_1 + \delta_2/2 + \delta_3/4 + \ldots + \delta_n/2^{n-1}$, $\gamma_i = \sum\limits_{j=i}^{n} \delta_j / 2^{j-i+1}$, $2 \leq i \leq n$.

Як видно, *N*-ядро, як і вектор Шеплі, розподіляє δ_i між гравцями $1, 2, \ldots, i$, при цьому доля гравця i є найбільшою. Долі спадають зі швидкістю геометричної прогресії за індексом гравця.

Порівняємо *N*-ядро з вектором Шеплі ($\sigma_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \delta_j / j$, $1 \leq i \leq n$). Очевидно, що при $n \geq 4$: $\sigma_1 \geq \gamma_1$, $\sigma_2 \geq \gamma_2$, $\sigma_{n-1} \leq \gamma_{n-1}$, $\sigma_n \leq \gamma_n$. При $3 \leq i \leq n-2$ можливі знаки нерівностей як "$\geq$", так і "$\leq$".

Існує характеризація *N*-ядра [7], яка є значно складнішою порівняно з характеризацією вектора Шеплі.

Серйозним недоліком *N*-ядра є його немонотонність відносно до прибутку максимальної коаліції. Якщо деякі гравці "страждають" унаслідок покращення загальної ситуації, то вони можуть відмовитись від участі в максимальній коаліції (якщо при зростанні бюджету прибуток деяких членів суспільства падає, то вони будуть не зацікавлені в його зростанні, тобто покращенні добробуту всього суспільства в цілому).

Отже, використання принципу "справедливості" в розподілі благ приводить унаслідок цього до "несправедливості" у їх отриманні. Точне формулювання властивості немонотонності дається такою лемою.

Лема 6.2.2. Якщо N має не менше дев'ять гравців, то існують дві такі гри (N, v) і (N, w) із $v(N) < w(N)$, $v(S) = w(S)$ для $\forall S \subset N$, що для деякого гравця i можлива нерівність $\gamma_i > \mu_i$, де γ_i, μ_i – компоненти *N*-ядер відповідно ігор (N, v) й (N, w).

Контрольні завдання до § 2

1. Обчислити вектор Шеплі для кооперативної гри: $c(1)=2$, $c(2)=1$, $c(3)=3$, $c(12)=2$, $c(13)=4$, $c(23)=3$.

2. Знайти вектор Шеплі для кооперативної гри "Внески користувачів": $c_1=10$, $c_2=7$, $c_3=5$, $c_4=4$, $c_5=3$.

3. Знайти *N*-ядро для кооперативної гри з п. 2.

~~§ 3. Механізми колективного прийняття рішень~~

~~У цьому параграфі застосуємо введені у Розділі 2, § 4 поняття до деяких мікроекономічних проблем поділу витрат і розподілу прибутку.~~

~~При поділі витрат на виробництво неподільного суспільного продукту (наприклад, мосту) маються лише дані про загальні витрати на його будівництво й доходи, які кожен гравець має від експлуатації цього об'єкта. Іншою інтерпретацією моделі поділу витрат є розрахунок при банкротстві фірми. Кожен гравець має виражену у грошах претензію на її власність, але вся власність фірми виявляється меншою за суму претензій. Проблема полягає в тому, щоб поділити власність між кредиторами.~~

~~Задача поділу прибутку полягає в тому, що необхідно поділити виручку від неподільного кооперативного заходу, наприклад, футбольного матчу, між його учасниками – футболістами, тренерами, лікарями. Правило поділу повинно базуватись на оцінці "ринкової вартості" кожного гравця, що враховує його повні витрати (наприклад, його зарплату). Нехай гонорар від матчу перевищує суму повних витрат. Як він повинен бути розподіленим між учасниками?~~

~~**Модель поділу прибутку.** Об'єднання з n гравців отримують від кооперації дохід $r>0$. Повні витрати гравця i дорівнюють $c_i>0$. Кооперація прибуткова, тобто $\sum_{i=1}^{n} c_i < r$. Як поділити дохід r?~~

~~Перший принцип розподілу доходу r – індивідуальна раціональність. Кожен гравець повинен отримати не менше своїх повних витрат, інакше він не буде кооперуватись. Після цих виплат залишається прибуток $s=r-\sum_{i=1}^{n} c_i$, який потрібно поділити.~~

~~Оскільки прибуток отримується від кооперації гравців, то всі вони мають права на нього і чому б не вважати ці права рівними (ми не маємо інформації про внесок окремого гравця або коаліції гравців в~~