Розділ 6
КООПЕРАТИВНЕ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

У попередньому розділі розглядався випадок задач прийняття рішень, у яких гравці діяли некооперативно, тобто обмін інформацією між ними був відсутній. Це, як правило, призводить до неефективності (домінованості) рівноважних ситуацій. У випадку можливості обміну інформацією можна сподіватись на кооперацію у процесі прийняття рішень (вибору стратегій). Умови кооперації визначаються гравцями під час переговорів, у яких можуть взаємно з'ясовуватися функції виграшу, різноманітні психологічні аспекти поведінки супротивників (колег), проводить торги тощо. Унаслідок цього гравці приходять до кооперативної домовленості, яка може бути обов'язковою (коли підписується контракт про використання певних стратегій і виконання цього контракту забезпечується деяким контролюючим органом, якому підкоряються всі гравці) або необов'язковим (коли такого органу не існує й тому домовленість нагадує міжнародні договори, які діють до того часу, поки невигідно їх порушувати).

§ 1. Кооперативна поведінка гравців

Будемо розглядати необов'язкові домовленості з погляду їхньої стабільності, яка розуміється як невигідність відхилення від неї гравцями. Стабільність є не таким уже простим поняттям, як може здаватись на перший погляд. Дійсно, відхилення деяких гравців від домовленості (необов'язкової) може примусити інших гравців (які спочатку не збирались порушувати домовленість) змінити свої стратегії. Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо чи ні, що порушення домовленості знищить дух кооперації та призведе до некооперативної поведінки гравців. Тому будемо вважати, що необов'язкові домовленості будуть складатись із домовленостей про ситуацію, а також із сценарію реагування кожного гравця i на відхилення будь-якої коаліції, що не містить гравця i. Цей сценарій оголошується заздалегідь і є "сценарієм погроз". Зокрема, реакція на порушення домовленості може полягати у відсутності будь-якої реакції ("сценарій ігнорування").

Як домовленість може виступати будь-яка ситуація гри, але логічно використовувати "стабільні" ситуації, від яких невигідно відхилятись. Основним прикладом стабільної домовленості є домовленість, що базується на рівновазі Неша. Її стабільність забезпечується взаємним незнанням остаточних стратегічних виборів.

Сильна рівновага Неша. Розглянемо приклад 6.1.1 (табл. 6.1.1). Перший гравець може запропонувати вибрати ситуацію (b_1, b_2), погрожуючи, у разі відмови іншого, перейти на стратегію a_1 (і другий взагалі нічого не матиме). Нескладно придумати приклади, у яких другий гравець погодиться на ситуацію (b_1, b_2) – "краще мати хоча б щось". Але спокуса іншого відхилитись від b_2 буде залишатись.

Таблиця 6.1.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1, 0	1, 0
b_1	10, 10	99, 1

Ситуація (b_1, a_2) здається ідеальною для переговорів (від неї невигідно відхилятись обом), але у першого гравця також завжди буде спокуса запропонувати ситуацію (b_1, b_2) – у ній він має виграш у 10 разів більший!

На прикладі цієї гри маємо знов (як і у § 2.4) проблему "рівність–ефективність". Ситуація (b_1, b_2) описує багате "рабовласницьке" суспільство $(u_1 + u_2 = 100)$, (b_1, a_2) – відносно бідне "демократичне" суспільство $(u_1 + u_2 = 20)$, точки (a_1, a_2), (a_1, b_2) відповідають "революційним" ситуаціям.

Спочатку узагальнимо концепцію рівноваги Неша, потім розглянемо стабільність на основі погроз. Узагальнення концепції рівноваги Неша можливе у двох напрямах. Якщо гравці – порушники можуть утворювати коаліції, то виконання домовленості підпадає під небезпеку зі сторони потенційних відхилень будь-якої коаліції. Це приводить до концепції "сильної" рівноваги. Якщо гравці можуть використовувати випадковий механізм, який реалізує корельовано рандомізовані стратегії і посилає гравцям ізольовано сигнал про те, якої стратегії йому дотримуватись, то виникає поняття рівноваги у спільних змішаних стратегіях.

Розглянемо приклад 6.1.2 (табл. 6.1.2). Маємо дві нешівські рівноваги – (a_1,a_2) й (b_1,b_2). Але, якщо від ситуації (a_1,a_2) невигідно відхилятись будь-якому (але одному! – стратегія другого є фіксованою), то від (b_1,b_2) невигідно відхилятись обом одночасно (якщо від ситуації (a_1,a_2) одночасно відхиляться обоє, то вони перейдуть у ситуацію (b_1,b_2), вигіднішу для обох).

Таблиця 6.1.2

X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	1, 1	1, 0
b_1	0, 1	2, 2

Визначення 6.1.1. Для гри $G=(X_i,u_i,i\in N)$ ситуація x^* є *сильною рівновагою* Неша, якщо не існує коаліції гравців, для яких було б вигідно відхилятись від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція не реагує на відхилення: $\forall\, T\subset N$, $\forall\, x_T\in X_T$ несумісна система нерівностей:

$$u_i\left(x_T,x^*_{N\setminus T}\right)\ge u_i\left(x^*\right),\forall i\in T;\ \exists j\in T:\ u_j\left(x_T,x^*_{N\setminus T}\right)>u_j\left(x^*\right). \quad (6.1.1)$$

Множину сильних рівноваг у грі *G* позначатимемо через *SNE(G)*. Ця множина може бути порожньою.

Покладаючи у формулах (6.1.1) $T=\{i\}$, $i\in N$, маємо, що сильна рівновага Неша є просто рівновагою Неша, тобто $SNE(G)\subseteq NE(G)$. Покладаючи $T=N$, отримуємо, що сильна рівновага є Парето-оптимальною (ефективною) ситуацією. Отже, для $n=2$ сильні рівноваги Неша – це ефективні рівноваги Неша.

У прикладі 6.1.2 дві рівноваги Неша – (a_1,a_2), (b_1,b_2), але лише (b_1,b_2) є сильною рівновагою. При $n\ge 3$ потрібно аналізувати ефективні рівноваги Неша на предмет вигідності відхилення від них "проміжних" коаліцій T ($1<|T|<N$). Розглянемо приклад 6.1.3. Єдина нешівська рівновага (a_1,c_2,a_3) (див. табл. 6.1.3) не є сильною рівновагою, оскільки не є ефективною (вона домінується (a_1,c_2,b_3)).

Таблиця 6.1.3

a_3: $X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 1, 3	1, 2, 1	2, 2, 2
b_1	2, 1, 4	2, 1, 1	1, 3, 2

b_3: $X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 2, 1	1, 5, 1	2, 3, 2
b_1	1, 3, 2	2, 1, 2	1, 1, 1

У прикладі 6.1.4 (табл. 6.1.4) дві нешівські точки, які є ефективними ((a_1,a_2,a_3) й (b_1,b_2,b_3)), але лише одна є сильною рівновагою – (b_1,b_2,b_3). Від ситуації (a_1,a_2,a_3) вигідно відхилятись, наприклад, коаліції $T=\{2, 3\}$ у точку (a_1,b_2,a_3).

Таблиця 6.1.4

a_3: $X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	2, 2, 2	1, 2, 3
b_1	1, 2, 3	1, 3, 1

b_3: $X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1, 1, 1	1, 2, 1
b_1	1, 2, 1	1, 3, 2

Інтерпретація властивості стабільності (6.1.1) базується на двоетапному процесі прийняття рішень. На першому етапі гравці приходять до домовленості про деяку конкретну ситуацію x^*. Далі обмін інформацією припиняється й кожен гравець самостійно приймає рішення про свою остаточну стратегію. Будь-який гравець $i \in N$ може відмовитись від використання стратегії x^*, але не може інформувати останніх про своє відхилення. Може бути також сформованою будь-яка коаліція T, яка відхиляється від x_T^* і вибирає x_T, але гравці поза даною коаліцією не можуть бути проінформованими про цю зміну, тому очікується, що вони будуть притримуватись стратегій із домовленості x_T^*.

На прикладі ігор двох осіб ми переконались, що непорушність будь-якої *NE*–ситуації руйнується, якщо виникає боротьба за лідерство. Аналогічна ситуація можлива у грі n осіб.

Гра "Переговори". У цій грі n гравців повинні поділити одну гривню. Гравці подають свої заявки арбітру, який задовольняє їх, якщо у сумі вони не перевищують 1 гривню. Інакше жоден гравець нічого не отримує: $X_i=[0,1]$, $i \in N$,

$$u_i(x)=\left\{x_i,\ \text{якщо}\ \sum_{j\in N}x_j\le 1;\ \ 0,\ \text{якщо}\ \sum_{j\in N}x_j>1\right\}.$$

Розв'язок $x^0=(0,\ldots,0)$ не є сильною рівновагою, оскільки він домінується, наприклад, точкою $\bar{x}=(1/n)_{j=\overline{1,n}}$. Аналогічно, розв'язок $x'=(x'_j)_{j=\overline{1,n}}$, $\sum_{j\in N}x'_j<1$, також є домінованим (наприклад, точкою $\tilde{x}=(\tilde{x}_j)_{j=\overline{1,n}}$, $\tilde{x}_j=x'_j$, $j=\overline{1,n-1}$, $\tilde{x}_n=x'_n+\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}x^1_j\right)$). Відхилення будь-якої коаліції від точки $x^*=(x^*_j)_{j=\overline{1,n}}$, $\sum_{j=1}^{n}x^*_j=1$, може лише погіршити результат хоча б одному члену коаліції. Отже, $SNE(G)=\left\{x\in X_N \mid \sum_{i\in N}x_i=1\right\}$.

Відмітимо, що коли коаліція T діє у ролі лідера та вибирає набір стратегій x^*_T так, що $\sum_{i\in T}x^*_i=1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, то коаліції $N\backslash T$ залишається вибрати $x^*_{N\backslash T}$ такий, що $\sum_{j\in N\backslash T}x^*_j=\varepsilon$. Отже, будь-який учасник або коаліція, привласнивши собі право лідера, може забрати собі майже всю гривню (наприклад, 99 коп.)!

Виберемо тепер конкретну *SNE*–ситуацію для переговорів, наприклад, $x^*_i=1/n$, $i\in N$. Для того, щоб зробити таку домовленість стабільною, кожен гравець повинен вирішити не звертати уваги на заявки гравців, більші за $1/n$. Найкраще така політика "глухоти" може бути реалізованою шляхом обмежень в обміні інформацією між гравцями. Ці обмеження повинні бути або законом (як у системі таємного голосування) або фізичним обмеженням (супутники Одіссея затикали вуха воском, щоб не бути звабленими сиренами). Отже, необов'язкові домовленості вимагають деяких обов'язкових обмежень в обміні інформацією.

Рівновага у спільних змішаних стратегіях. Із кооперативної точки зору рівновага Неша у змішаних стратегіях є необов'язковою домовленістю, яка забезпечується таємністю проведення лотерей, що організовують гравці для випадкового вибору остаточного рішення.

Розглянемо приклад 6.1.5 ("Ввічливі водії", у літературі цей приклад відомий також під назвою "Сімейна суперечка"). Модифікуємо виграші у грі "Перехрестя": якщо один водій зупиняється, то для нього го краще, щоб інший проїхав. Виграші наведено у табл. 6.1.5. На доповнення до трьох чистих *NE*–ситуацій із векторами виграшів $(1+\varepsilon, 2)$, $(2, 1+\varepsilon)$ (як і раніше $0<\varepsilon<1$, величині ε відповідає степінь "ввічливості" водія) ця гра має цілком змішану рівновагу (μ_1^*, μ_2^*): $\mu_1^* = \mu_2^* = \frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}\delta_I + \frac{1}{2+\varepsilon}\delta_{II}$ із вектором виграшів $\left(1+\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}, 1+\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)$. Ця змішана *NE*–ситуація домінується обома чистими *NE*–ситуаціями, тому її можна рекомендувати як переговорну лише у зв'язку із її "справедливістю" (їй відповідають однакові виграші гравців). Однак у цій змішаній *NE*–ситуації кожен гравець отримує виграш $1+\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, рівний гарантованому виграшу у змішаних стратегіях. Разом із тим стратегії μ_i^*, що утворюють *NE*–ситуацію, не є обережними, а тому не гарантують гравцеві цього виграшу. Дійсно, ціна гри у змішаних стратегіях дорівнює $1+\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$ і єдина рівноважна ситуація є (μ_1^0, μ_2^*), де $\mu_1^0 = \frac{2}{2+\varepsilon}\delta_I + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\delta_{II}$. Більше того, $u_1(\mu_1^*, \delta_{II}) = \frac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} < 1+\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} = u_1(\mu_1^*, \mu_2^*) = u_1(\mu_1^0, \delta_{II})$, звідки зрозуміло, що змішана *NE*–ситуація μ_1^* є більш ризикованою, ніж обережна стратегія μ_i^0. Єдиним аргументом на користь рівноваги у змішаних стратегіях є стабільність. Якщо гравці можуть таємно проводити лотереї, то необов'язкова домовленість про реалізацію цілком змішаної *NE*–ситуації є стабільною. Отже, для кожного гравця дії інших цілком передбачувані. Із цього погляду аргументація на користь обережних стратегій оманлива, оскільки застосування обережних стратегій приводить до послідовності найкращих відповідей, що робить результат непередбачуваним.

Таблиця 6.1.5

X_1 \ X_2	**З**	**Р**
З	1, 1	$1+\varepsilon$, 2
Р	2, $1+\varepsilon$	0, 0

З одного боку, змішана *NE*–стратегія є розумною, якщо гравець вважає свого партнера таким само раціональним, як і він сам, хоча *NE*–ситуація є більш ризикованою, ніж обережна стратегія, якщо партнер може зіграти нерозумно (тут потрібно згадати слова

Л.М. Толстого, який говорив, що 90 % вчинків росіянина пояснюються елементарною дурістю). З іншого – обережна змішана стратегія вибирається з міркувань мінімуму ризику і, отже, максимально безпечна. Тим не менш, у раціонального гравця виникає бажання одностороннього відхилення від ситуації, що складається з пари змішаних обережних стратегій, оскільки це збільшує виграш.

Повертаючись до гри "Перехрестя", побудуємо випадковий механізм, який не зводиться до незалежної рандомізації стратегій, тому дозволяє зробити рівноважну ситуацію Парето-оптимальною.

Приклад 6.1.6 ("Перехрестя зі світлофором"). Гравці встановлюють світлофор, який показує "зелене – червоне" й "червоне – зелене" з рівною ймовірністю. Домовленість полягає у тому, щоб на зелене світло проїжджати без зупинки, на червоне – зупинятись. Ця домовленість є стабільною, оскільки при кожній реалізації лотереї маємо рівновагу Неша. Математичне сподівання виграшу дорівнює $3/2+\varepsilon/2$ для кожного гравця, чим забезпечується Парето – оптимальність і справедливість.

Визначення 6.1.1. Для гри $G=(X_i,u_i;i\in N)$ із скінченною множиною стратегій *спільною лотереєю* назвемо імовірнісний розподіл $L=\left(L(x)\right)_{x\in X_N}$ на X_N. Для всіх $i\in N$ і для всіх $x_i\in X_i$ позначимо через L_{x_i} умовну ймовірність реалізації $x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash\{i\}}$:

$$L_{x_i}\left(x_{N\backslash i}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sum\limits_{y_{N\backslash i}\in X_{N\backslash\{i\}}}L\left(x_i,y_{N\backslash i}\right)}\cdot L\left(x_i,x_{N\backslash i}\right), & \sum\limits_{y_{N\backslash i}\in X_{N\backslash\{i\}}}L\left(x_i,y_{N\backslash i}\right)\neq 0,\\ 0, \text{ якщо } L\left(x_i,y_{N\backslash i}\right)=0 \text{ для всіх } y_{N\backslash i}\in X_{N\backslash\{i\}}.\end{cases}$$

Скажемо, що L є *рівновагою у спільних змішаних* стратегіях у грі G, якщо виконані такі нерівності: $\forall\ i\in N$, $\forall\ x_i,y_i\in X_i$,

$$\sum_{x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash\{i\}}}u_i\left(x_i,x_{N\backslash i}\right)L_{x_i}\left(x_{N\backslash i}\right)\geq\sum_{x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash\{i\}}}u_i\left(y_i,x_{N\backslash i}\right)L_{x_i}\left(x_{N\backslash i}\right). \qquad (6.1.2)$$

Позначимо через $CNE(G)$ множину всіх рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі G.

Кооперативний сценарій, що є обґрунтуванням даного визначення, полягає у такому. Гравці спільно будують випадковий датчик, який може реалізувати вибір ситуацій $x\in X_N$ із імовірністю $L(x)$. Якщо реалізувалась ситуація x, то гравець i отримує інформацію лише про компоненту x_i. Далі кожен гравець вибирає вільно й незалежно, а також таємно, свою справжню стратегію. Сигнал x_i сприймається гравцем i як необов'язкова пропозиція зіграти x_i. Умови (6.1.2) означають, що виконання домовленості про вибір x_i гравцем i забезпечуються автоматично при тій самій обмеженій інформації, яка доступна кожному гравцеві. Дійсно, нехай гравцеві i запропоновано використати стратегію x_i. Він робить висновок із загального розподілу L, що з імовірністю $L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)$ набір $x_{N\setminus i}$ буде вибрано. Отже, $M\left(y_i, L_{x_i}\right) = \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right) L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)$ є математичним сподіванням його виграшу при використанні стратегії $y_i \in X_i$, якщо всі інші гравці згодні у виборі стратегій слідувати сигналу. Таким чином, умова (6.1.2) означає, що використання стратегії, що пропонується датчиком, є оптимальною відповіддю гравця i при заданому рівні інформації у припущенні, що всі інші гравці підкоряються сигналу.

Нехай стратегія x_i така, що $L\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) = 0$ для всіх $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}$, тобто ймовірність того, що стратегія x_i буде запропонована датчиком, дорівнює нулю. Для такої стратегії x_i умова (6.1.2) виконується тривіально, отже, система (6.1.2) переписується в еквівалентному вигляді: $\forall\ i \in N$, $\forall\ x_i, y_i \in X_i$,

$$\sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) L\left(x_{N\setminus i}\right) \geq \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right) L\left(x_{N\setminus i}\right). \qquad (6.1.3)$$

Звідси випливає, що лотерея L є рівновагою у спільних змішаних стратегіях тоді й лише тоді, коли ці стратегії задовольняють системі лінійних нерівностей (6.1.3). Ця система завжди має розв'язок, як показує такий результат.

Лема 6.1.1. Множина $CNE(G)$ рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі G є непорожньою опуклою компактною підмножиною одиничного симплекса у $E^{|X_N|}$. Якщо $\mu = \left(\mu_i\right)_{i\in N}$ є ситуацією змішаного розширення гри $\bar{G}$, то лотерея L, що визначається по цій ситуації, є рівновагою у спільних змішаних стратегіях у G тоді й лише тоді, коли μ – ситуація рівноваги у $\bar{G}$.

Отже, *NE*–ситуація як у початковій грі, так і у її змішаному розширенні, ототожнюється з рівновагою L у спільних змішаних стратегіях, де імовірнісний розподіл L є набором незалежних випадкових індивідуальних стратегій.

Приклад 6.1.7 ("Музичні стільці"). Маємо двох гравців і три стільці (a, b, c). Стратегія гравця полягає у виборі стільця. Обидва гравці несуть втрати при виборі одного й того ж стільця. Якщо ж їхні вибори різні, то гравець, чий стілець безпосередньо слідує за стільцем супротивника (вважаємо, що *b* безпосередньо слідує за *a*, *c* за *b*, *a* за *c*) виграє вдвічі більше. Отже, виникає біматрична гра (табл. 6.1.6). У ній a_i – вибір гравцем *i* стільця *a*. У початковій грі рівноваги Неша відсутні. Єдиною цілком змішаною рівновагою Неша є $\mu_1^* = \mu_2^* = \frac{1}{3}\delta_a + \frac{1}{3}\delta_b + \frac{1}{3}\delta_c$. Ця ситуація рівноваги приносить кожному гравцеві виграш рівний 1 і є домінованою. Причина цього полягає в тому, що у змішаній ситуації (μ_1^*, μ_2^*) "погані" для обох гравців діагональні ситуації реалізуються з ймовірністю $1/3$. Розглянемо таку лотерею L на $X_1 \times X_2$: $L(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/6, \text{ якщо } x_1 \neq x_2, \\ 0, \text{ якщо } x_1 = x_2. \end{cases}$. Дана лотерея L є рівновагою у змішаних стратегіях у даній грі. Нехай, наприклад, реалізується (з імовірністю $1/6$) ситуація (b_1, c_2). При даній L гравець 1 може вивести, що гравцю 2 запропоновано використовувати одну зі стратегій a_2 або c_2 з однаковою ймовірністю $1/2$, тобто використовувати змішану стратегію $\mu_2 = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c$.

Таблиця 6.1.6

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	0, 0	1, 2	2, 1
b_1	2, 1	0, 0	1, 2
c_1	1, 2	2, 1	0, 0

Найкращою відповіддю на цю стратегію і є стратегія b_1, оскільки $\bar{u}_1(\delta_b, \mu_2) = \frac{3}{2} > \bar{u}_1(\delta_a, \mu_2) = 1 > \bar{u}_1(\delta_c, \mu_2) = \frac{1}{2}$. Аналогічно гравець 2, якому поступає сигнал використати стратегію c_2, виводить, що гравцю 1 пропонується вибрати змішану стратегію $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c$. У цьому випадку стратегія c_2 і є найкращою відповіддю гравця 2 (аналогічно вище наведеному).

У силу симетричності гри отримуємо властивість стабільності лотереї L при будь-яких допустимих реалізаціях. Відмітимо, що лотерея L приводить до оптимальних за Парето і справедливих виграшів

$(3/2,3/2)$, що спонукає гравців вступати в кооперацію на основі використання спільних змішаних стратегій.

Розглянемо приклад 6.1.8 (табл. 6.1.7). Рівновагою Неша (також і рівновагою в домінуючих стратегіях) є ситуація (a_1,a_2), у якій кожен отримує виграш 1. Ситуація (a_1,a_2) є Парето – оптимальною так, як і (a_1,b_2), і (b_1,a_2). Але ж в останніх ситуаціях один із гравців отримує виграш у 10 разів більший! Якщо гра повторюється неодноразово, то у гравців може виникнути ідея використовувати ситуації (a_1,b_2) та (a_2,b_1) по черзі. Але не виключена ситуація, коли одному з гравців буде вигідно порушити цю домовленість (наприклад, він хоче вийти з гри). Єдиним способом запобігти таким порушенням є застосування випадкового механізму – ситуації (a_1,b_2), (a_2,b_1) вибирати з імовірністю $1/2$, тобто за лотереєю $L=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Зрозуміло, як реалізувати подібну "справедливу" (яка дає кожному з гравців середній виграш) лотерею. Але подібна справедливість відносна.

Таблиця 6.1.7

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1, 1	10, 0
b_1	0, 10	0, 0

Розглянемо приклад 6.1.9. У ситуації (b_1,a_2) перший гравець отримує втричі більший виграш, ніж у ситуації (a_1,b_2), у той час, як різниця у виграшах другого гравця дорівнює 2 (див. табл. 6.1.8). Тому перший гравець частіше хотів би отримувати першу ситуацію, інший – другу. На практиці гравці можуть домовитись про "середню" частоту – у даному прикладі перший гравець хотів би використовувати ситуацію (b_1,a_2) із частотою $3/4$, другий – $1/3$, тому "середня" частота використання стратегії (b_1,a_2) дорівнює: $3/4+1/3=7/12$ ((a_1,b_2) – $5/12$). Математичне сподівання виграшів $M_1=9\cdot\frac{7}{12}+3\cdot\frac{5}{12}=6{,}5$,

$M_2 = 1 \cdot \frac{7}{12} + 2 \cdot \frac{5}{12} = 1\frac{5}{12} \approx 1,4$. Зазначимо, що про рівновагу у спільних змішаних стратегіях тут не йдеться.

Таблиця 6.1.8

X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	0, 0	3, 2
b_1	9, 1	0, 0

У наступному прикладі перехід до змішаного розширення гри не дає нічого нового, крім єдиної рівноваги Неша (детермінованої). Але буде наведено механізм кооперації, який є більш обов'язковою формою стабільної домовленості, що базується на спільних змішаних стратегіях і який дозволить покращити за Парето *NE*–ситуацію.

Приклад 6.1.10 ("Конкуренція зі спеціалізацією"). Два дуополісти постачають на ринок один товар, але різної якості – низької (*Н*), середньої (*С*) й високої (*В*) (виграші у табл. 6.1.9). Для гравців, що притримуються некооперативної поведінки, ця гра, розв'язна за домінуванням і ситуація (*С*, *С*) є єдиною рівновагою як самої гри, так і її змішаного розширення.

Таблиця 6.1.9

X_1 \ X_2	***Н***	***С***	***В***
Н	0, 0	0, 2	1, 3
С	2, 0	1, 1	2, 0
В	3, 1	0, 2	0, 0

Ця гра має також єдину рівновагу у спільних змішаних стратегіях, яка реалізується на лотереї, що вибирає (*С*, *С*) з імовірністю 1. Тим не менш, оптимальний за Парето виграш (2, 2) може бути оптимальним у результаті наступної домовленості.

Побудуємо лотерею з імовірнісним розподілом $L = \frac{1}{2}\delta_{(B,H)} + \frac{1}{2}\delta_{(H,B)}$. Кожен гравець незалежно й таємно вибирає та посилає нейтральному арбітру, що обирається обома гравцями, обов'язковий сигнал s_i, який приймає одне з чотирьох значень для кожного гравця: три чистих стратегії і сигнал А (згідно лотереї). Отримавши пару повідомлень

(s_1, s_2), арбітр визначає випадкову ситуацію (x_1, x_2) відповідно до лотереї L. Фінальна ситуація гри визначається за таким правилом (за цим слідкує арбітр):

$$\begin{cases} (x_1, x_2), \text{ якщо } s_1 = s_2 = A, \\ (x_1, s_2), \text{ якщо } s_1 = A, \ s_2 = H, C, B, \\ (s_1, x_2), \text{ якщо } s_1 = H, C, B, \ s_2 = A, \\ (s_1, s_2), \text{ якщо } s_i = H, C, B, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

Тоді для $\forall \ y_1, y_2 \in \{H, C, B\}$:

$$\bar{u}_1(A, A) = \frac{1}{2} u_1(B, H) + \frac{1}{2} u_1(H, B) = 2 > \bar{u}_1(y_1, A) = \frac{1}{2} u_1(y_1, H) + \frac{1}{2} u_1(y_1, B),$$

$$\bar{u}_2(A, A) = \frac{1}{2} u_2(H, y_2) + \frac{1}{2} u_2(B, H) > \frac{1}{2} \bar{u}_2(A, y_2) = \frac{1}{2} u_2(B, y_2) + \frac{1}{2} u_2(H, y_2).$$

Отже, з імовірністю $1/2$ будуть реалізуватись ситуації (*H*, *B*) й (*B*, *H*) і математичне сподівання виграшу кожного гравця дорівнює 2.

Зауважимо, що на відміну від рівноваги у змішаних стратегіях рівновага про домовленість із лотереєю не може бути відміненою після реалізації конкретної ситуації. Це рішення повинно бути прийнятим раз і назавжди до випадкової реалізації.

Визначення 6.1.2. Для всіх $i \in N$ позначимо через $L_{N \setminus i}$ звуження розподілу L на $X_{N \setminus \{i\}}$: $L_{N \setminus i}(x_{N \setminus i}) = \sum_{x_i \in X_i} L_i(x_i, x_{N \setminus i})$ для $\forall \ x_{N \setminus i}$. Назвемо лотерею L слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G, якщо виконані нерівності:

$$\forall i \in N, \ \forall y_i \in X_i, \ \sum_{x \in X_N} u_i(x) L(x) \geq \sum_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus \{i\}}} u_i(y_i, x_{N \setminus i}) L_{N \setminus i}(x_{N \setminus i}).$$

Позначимо множину слабких рівноваг через *WCNE(G)*.

Лема 6.1.2. Множина $WCNE(G)$ є непорожньою опуклою компактною підмножиною одиничного симплекса у $E^{|X_N|}$, причому $WCNE(G) \supseteq CNE(G)$. Якщо μ – ситуація розширеної гри $\bar{G}$, то відповідна лотерея L є слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G тоді й лише тоді, коли ситуація μ є рівновагою Неша у грі $\bar{G}$.

Доведення. За (6.1.2) лотерея L належить $WCNE(G)$ тоді й лише тоді, коли

$$\forall i \in N, \forall y_i \in X_i, \ \sum_{x \in X_N} u_i(x) L(x) \geq \sum_{x \in X_N} u_i(y_i, x_{N \setminus i}) L(x). \qquad (6.1.4)$$

Лотерея L є рівновагою у спільних змішаних стратегіях тоді й лише тоді, коли вона задовольняє системі нерівностей для $\forall x_i y_i \in X_i$, $\forall i \in N$:

$$\sum_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) L\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \geq \sum_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right) L\left(x_i, x_{N\setminus i}\right). \qquad (6.1.5)$$

Взявши у нерівностях (6.1.5) суми по $x_i \in X_i$ при фіксованих i і y_i, отримаємо (6.1.4). Отже, $CNE(G) \subseteq WCNE(G)$. Інші твердження леми очевидні.♦

Отже, $NE(G) \subseteq NE(\bar{G}) \subseteq CNE(G) \subseteq WCNE(G)$.

Проходячи по цьому ланцюжку зліва направо, ми повинні накладати все більше інформаційних обмежень для того, щоб рівноважна ситуація стала стабільною домовленістю. Для *NE*–ситуації та змішаної *NE*–ситуації вимагається лише дотримуватись секретності у виборі індивідуальних стратегій. Для *CNE*–ситуації у доповненні до цього потрібно вимагати, щоб окремі гравці могли спостерігати лише свої власні реалізації спільної лотереї. Для $WCNE(G)$–ситуації необхідно мати нейтрального арбітра, який реалізує випадкову ситуацію лотереї, нічого не повідомляючи окремим гравцям. Далі цей арбітр опитує незалежно й таємно кожного гравця, чи згоден той "всліпу" використовувати ту стратегію, яка зреалізувалась при проведенні лотереї. Потім він повинен повідомити тим гравцям, які добровільно погодились із проведенням лотереї, ситуацію, що випала, і примусити цих гравців дійсно використовувати ці стратегії.

Загальною рисою цих сценаріїв є неможливість із досягненням домовленості про вибір деякої спільної стратегії вести прямий обмін інформації між гравцями. У випадку багаторазового проведення лотереї кооперація стає неявною та важко розпізнати сам факт її існування. Така форма мовчазного зговору описана у літературі про поведінку фірм в умовах олігополії під назвою "Зговір по електричному обладнанню 1950-х рр.", у якому були замішані 29 компаній США. Уряд США організував аукціон, у якому кожна фірма повинна була таємно й незалежно одна від одної назвати свою ціну на деякий вид електротехнічного обладнання. Однак фірми провели попередні таємні переговори, у яких було визначено частку кожної фірми. Потім продавці узгодили свою політику призначення цін на аукціоні так, щоб кожен із них виявився таким, що призначив найменшу ціну (і, отже, отримав би замовлення від уряду) достатню кількість разів для захоплення визначеної частки ринку. Це було досягнуто за рахунок поділу ринку на чотири зони, причому до кожної зони були приписані різні продавці. Продавці, що були прикріплені до однієї зони, чергували свої ставки. При визначенні привілеїв призначення найменшої ціни орієнтувались на "фази місяця". Унаслідок чого утворився начебто випадковий процес, що імітував незалежну поведінку учасників.

Стабільність на основі погроз. Погроза може слугувати сильним механізмом кооперації. Для досягнення стабільності домовленості (наприклад, вибору рівноваги Неша) гравці оголошують деяку схему реагування на можливі відхилення інших. Оскільки гравцеві, який відхилиться, може стати погано, якщо оголошена погроза здійсниться, то він остерігатиметься відхилень, і необов'язкова домовленість виявиться стабільною. Таким чином, попередження є "розумним використанням потенціальної сили". Успішною є та погроза, яка ніколи не реалізується (Шеллінг, 1970).

Стабільні домовленості, що розглядались у попередньому розділі, вимагали повної секретності у прийнятті рішень. На противагу цьому погроза є ефективною лише тоді, коли відхилення неможливо приховати. Отже, для досягнення стабільності на основі застережень потрібно, щоб усі індивідуальні вибори стратегій відбувались відкрито.

Приклад 6.1.11 ("Дилема в'язня"). Нешівською рівновагою є агресивна поведінка кожного. Для забезпечення доброзичливості (стабілізації ситуації (M, M)) кожен гравець оголошує принцип своєї поведінки (що є погрозою партнеру):

- ✓ Якщо ти будеш поводитись мирно, то і я буду доброзичливим.
- ✓ Якщо ти будеш агресивним, то і я буду поводитись агресивно.

Узявши до уваги таку погрозу від опонента, кожен гравець змушений бути люб'язним, щоб не втратити у виграші.

Звернемо увагу на те, що тут не все так просто – якщо різниця у виграшах при відхиленні дуже велика ("життя – смерть"), то погроза може не зупинити суперника (у СРСР перед Другою світовою війною була така пісня "Нас не трогай, мы не тронем, а затронешь спуску не дадим, и в воде мы не утонем, и в огне мы не сгорим", що однак, не зупинило агресію). Для зняття цієї складності можна вважати, що гра повторюється і короткотерміновий виграш від некооперативного відхилення перекривається довготерміновими втратами.

Визначення 6.1.3. Сценарієм попередження у грі $G=(X_i,u_i;i\in N)$ називається набір $(x_i,\xi_{N\backslash i};i\in N)$, де відображення $\xi_{N\backslash i}: X_i \to X_{N\backslash i}$ - *погроза* гравцю *i*, де

$$\xi_{N\backslash i}(x_i)=x_{N\backslash i},\ \forall y_i\in X_i\backslash\{x_i\}:\ u_i(y_i,\xi_{N\backslash i}(y_i))\le u_i(x). \qquad (6.1.6)$$

Проілюструємо сценарій попередження, розглядаючи гру на нескінченному інтервалі часу. У кожен конкретний момент часу кожен гравець вибирає деяку стратегію, причому він може поміняти свою стратегію в будь-який час. Гра відбувається у відкриту, тобто стратегії всіх гравців усім відомі. Це є головним інформаційним припущенням, яке робить неможливим таємне порушення договору. Гравець, який виконує домовленість, спочатку вибирає узгоджену з іншими стратегію x_i і потім спостерігає за стратегіями $y_{N\backslash i}$ інших гравців. Поки $y_{N\backslash i}=x_{N\backslash i}$, гравець i зберігає стратегію x_i. Як тільки будь-який гравець, скажімо j, переключається на стратегію $y_j \neq x_j$, гравець i переключається раз і назавжди на i-ту компоненту $\xi_{N\backslash j}\left(y_j\right)$. Умова стабільності (6.1.6) означає, що якщо гравці виконують договір, що базується на сценарії попередження, то в жодного гравця не виникає приводу для одностороннього порушення домовленості. Справді, виграш на нескінченному інтервалі часу завжди перевищує виграш на будь-якому інтервалі скінченної довжини.

Звичайно, інколи важко виконати вимогу вести відкриту гру. Так, зокрема, у сучасному світі раптовий напад стає небезпечним (згадаймо події 11 вересня 2001 р. у США). Прикладом механізму обміну інформацією типу попереджувальних погроз є домовленості про взаємну інспекцію ядерної зброї або створення демілітаризованих зон.

Лема 6.1.3. Нехай $\left(x_i,\xi_{N\backslash i};i\in N\right)$ – сценарій попередження. Тоді ситуація x є індивідуально раціональною:

$$\sup_{y_i}\inf_{y_{N\backslash i}} u_i\left(y_i,y_{N\backslash i}\right)\leq u_i\left(x\right),\forall\ i\in N.$$

Доведення. Із (6.1.6) маємо $\inf\limits_{y_{N\backslash i}} u_i\left(y_i,y_{N\backslash i}\right)\leq u_i\left(y_i,\xi_{N\backslash i}\left(y_i\right)\right)\leq u_i\left(x\right)$ для $\forall\ y_i\in X_i$, зокрема для y_i, на якому досягається супремум.♦

Лема 6.1.4. Нехай X_i – компакт, u_i – неперервна, $i\in N$. Тоді у грі $G=\left(X_i,u_i;i\in N\right)$ існує хоча б одна індивідуально-раціональна ситуація. Для кожної такої ситуації x при всіх $i\in N$ існує набір погроз $\xi_{N\backslash i}$ такий, що $\left(x_i,\xi_{N\backslash i},i\in N\right)$ є сценарієм попередження.

Доведення. Із припущень леми очевидним образом випливає існування в кожного гравця хоча б однієї обережної стратегії x_i і те, що $x=\left(x_i\right)_{i\in N}$ є індивідуально-раціональною ситуацією. Для кожного $i\in N$ і для $\forall y_i\in X_i$, $y_i\neq x_i$, виберемо елемент $y_{N\backslash i}=\xi_{N\backslash i}\left(y_i\right)\in X_{N\backslash i}$, що $u_i\left(y_i,y_{N\backslash i}\right)=\inf\limits_{z_{N\backslash i}} u_i\left(y_i,z_{N\backslash i}\right)\leq\sup\limits_{z_i}\inf\limits_{z_{N\backslash i}} u_i\left(z_i,z_{N\backslash i}\right)\leq u_i\left(x\right)$.♦

Визначення 6.1.4. Поділом у грі $G=\left(X_i,u_i,i\in N\right)$ називається оптимальна за Парето індивідуально-раціональна ситуація.

Позначимо через $I\left(G\right)$ множину поділів у грі G.

Лема 6.1.5. Нехай для $\forall\, i \in N$ множина X_i компактна, функція u_i неперервна. Тоді у грі G є хоча б один поділ.

Доведення. Позначимо через $IR(G)$ непорожню компактну підмножину індивідуально-раціональних ситуацій у грі G. Виберемо елемент x із $IR(G)$, який максимізує $\sum_{i\in N} u_i$ на $IR(G)$. Тоді x є оптимальною за Парето ситуацією. Покладемо від супротивного, що ситуація y домінує за Парето ситуацію x. Тоді $y \in IR(G)$ й $\sum_{i\in N} u_i(x) < \sum_{i\in N} u_i(y)$. Отримане протиріччя доводить лему.♦

Із леми 6.1.3 поділ є необов'язковою домовленістю, стабільної відносно індивідуальних відхилень, а також відносно відхилень коаліції N усіх гравців (оптимальність за Парето). З іншого боку, двома мінімальними вимогами для кооперативних домовленостей якраз і є індивідуальна раціональність і оптимальність за Парето. Отже, множина $I(G)$ є максимальною областю переговорів про кооперацію. Якщо множина $I(G)$ одноелементна, то кооперативний результат гри не викликає сумнівів. Але в більшості ігор множина $I(G)$ містить не один елемента й вибір серед них є гострою конфліктною ситуацією.

Приклад 6.1.12 ("Торг"). Гравець I продає неподільний товар гравцю II. Гравець I повинен вирішити, яку призначити ціну: високу (*ВЦ*) чи низьку (*НЦ*). Гравець II (покупець) може або придбати товар (*ПТ*) або відмовитись від нього (*ВТ*). Виграші наведені у табл. 6.1.10. Ситуація (*ВЦ*, *ПТ*) є рівновагою у домінуючих стратегіях і оптимальною за Парето. Якщо гравці не обмінюються інформацією, то це беззаперечний результат гри. Але звернемо увагу, що поділів у грі 2 – (*ВЦ*, *ПТ*), (*НЦ*, *ПТ*). Тому при можливості обміну інформацією, другий гравець може виграти, погрожуючи першому: "Я буду купувати лише за низькою ціною та відмовлятись від товару при призначенні високої ціни". Аналогічно, перший гравець може об'явити, що буде продавати товар лише за високою ціною. Результатом здійснення погроз може стати домінована ситуація з виграшем (0, 0), тобто програють обоє.

Таблиця 6.1.10

I \ II	***ПТ***	***ВТ***
ВЦ	2, 1	0, 0
НЦ	1, 2	0, 0

Ще раз повторимо, що "успішною є та погроза, яка ніколи не реалізується". З іншого боку, успішне застосування погроз як механізму попередження вимагає, щоб погрожуючий гравець був зобов'язаний приводити погрозу в дію або принаймні щоб усі в це вірили (погроза "Страшного суду"). Навіть найбільш переконливі й успішні погрози є ризикованими, якщо об'явлена реакція на відхилення не збігається з найкращою відповіддю гравця, що погрожує. У цьому сенсі доцільно розділити погрози на "агресивні" та "попереджувальні".

Розглянемо гру двох осіб (X_1, X_2, u_1, u_2), де множини X_i компактні, а функції u_i неперервні, $i = 1, 2$. Найкращим поділом для гравця i є ситуація x^i така, що

$$u_i\left(x^i\right) = \sup_{x \in I(G)} u_i(x) = \sup_{x}\left\{u_i(x) \middle|\ u_k(x) \geq \sup_{y_k}\inf_{y_j} u_k\left(y_k, y_j\right), k \neq j\right\}.$$

Лема 6.1.6. Нехай x^i – найкращий поділ гравця *i*, ξ_i – погроза (агресивна) гравця *i*:

$$\begin{cases} \xi_i\left(x_j^i\right) = x_i^i, \\ \forall y_j \in X_j \setminus \left\{x_j^i\right\},\ u_j\left(y_i, \xi_i\left(y_j\right)\right) = \inf_{y_i} u_j\left(y_j, y_i\right); \end{cases}$$

ξ_j – попередження гравця *j*:

$$\begin{cases} \xi_j\left(x_i^i\right) = x_j^i, \\ \forall y_j \in X_i \setminus \left\{x_i^i\right\},\ u_j\left(\xi_j\left(y_j\right), y_i\right) = \sup_{y_j} u_j\left(y_j, y_j\right). \end{cases}$$

Тоді $\left(x^i, \xi_i, \xi_j\right)$ – сценарій попереджень.

Доведення. Із визначення погрози маємо:

$$u_j\left(y_j, \xi_i\left(y_j\right)\right) \leq \sup_{z_j}\inf_{z_i} u_j\left(z_j, z_i\right) \text{ для } \forall\ y_j \in X_j \setminus \left\{x_j^i\right\}.$$

Оскільки поділ x^i є індивідуально раціональним, то маємо: $u_j\left(y_j, \xi_i\left(y_j\right)\right) \leq u_j\left(x^i\right)$ для $\forall\ y_j \in X_j \setminus \left\{x_j^i\right\}$. Із визначення попередження маємо: $u_j\left(\xi_j\left(y_i\right), y_i\right) \geq \inf_{z_i}\sup_{z_j} u_j\left(z_j, z_i\right), \forall\ y_i \in X_i \setminus \left\{x_i^i\right\}$.

Зафіксуємо стратегію y_i, $y_i \neq x_i^i$, і покладемо $u_i\left(\xi_j\left(y_i\right), y_i\right) > u_i\left(x^i\right)$. Останні дві нерівності разом з умовою $x^i \in IR(G)$ дозволяють стверджувати, що $u_j\left(\xi_j\left(y_i\right), y_i\right) \geq \inf_{z_i}\sup_{z_j} u_j\left(z_j, z_i\right)$. Із неперервності функцій виграшу на компактних множинах стратегій випливає, що існує Парето-оптимальна ситуація z така, що $u_i(y) \le u_i(z)$, $u_j(y) \le u_j(z)$. Отже, для поділу z справедлива нерівність $u_i(x^i) < u_i(z)$. Маємо суперечність. Таким чином, $u_i(\xi_j(y_i), y_i) \le u_i(x^i)$ для $\forall\, y_i \in X_i \setminus \{x_i^i\}$. ♦

Для даної гри двох осіб (X_1, X_2, u_1, u_2) із скінченою множиною стратегій позначимо через $S(1, G)$ її розширення, у якому гравець 1 діє як підлеглий (сприймає стратегії другого як екзогенно задані): $S(1, G) = (X_1^{X_2}, X_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. Нехай гра G задається табл. 6.1.11. Тоді гра $S(1, G)$ задається табл. 6.1.12. Розглянемо гру $H = S(r, S(1, G))$ ("метагру" Ховарда [7]), у якій гравець 2 є підлеглим.

Таблиця 6.1.11

$X_1 \backslash X_2$	x_2^1	x_2^2
x_1^1	1, 4	4, 1
x_1^2	2, 3	3, 2

Таблиця 6.1.12

$\tilde{X}_1$	$X_1^{X_2} \backslash X_2$	x_2^1	x_2^2
$\tilde{x}_1^1$	(x_2^1, x_1^1)	1, 4	4, 1
$\tilde{x}_1^2$	(x_2^1, x_1^2)	2, 3	3, 2
$\tilde{x}_1^3$	(x_2^2, x_1^1)	4, 1	1, 4
$\tilde{x}_1^4$	(x_2^2, x_1^2)	3, 2	2, 3

Лема 6.1.7. Пара (a_1, a_2) є вектором виграшів для деякої *NE*–ситуації гри *H* тоді й лише тоді, коли виконуються такі властивості:

а) (a_1, a_2) – допустимий вектор виграшів у грі *G*, тобто для деякого x^* має місце $(a_1, a_2) = (u_1(x^*), u_2(x^*))$;

б) виконується: $\inf\limits_{x_2} \sup\limits_{x_1} u_1(x_1, x_2) \le u_1(x^*)$, $\sup\limits_{x_2} \inf\limits_{x_1} u_2(x_1, x_2) \le u_2(x^*)$.

Знайдемо найкращий поділ у грі *G* для 1-го гравця – це буде (x_1^2, x_2^1). Відмітимо, що виграш у ньому 1-го гравця збігається з 1– виграшем за Штакельбергом у грі $S(1, G)$. Виявляється, що цей збіг не випадковий.

Лема 6.1.8. У грі $S(i, G)$ i – виграш Штакельберга збігається з виграшем в найкращому поділі *i*-го гравця у грі *G*.

Визначення 6.1.5. Для гри $G = (X_i, u_i; i \in N)$ α – *ядром* називається підмножина $C_\alpha(G)$ таких ситуацій x^*, що для будь-якої коаліції

$T \subseteq N$ знайдеться така погроза коаліції $N\backslash T$ проти потенційних відхилень коаліції T, що $\left(x^*, \xi_T; T \subseteq N\right)$ – коаліційний сценарій попередження, тобто не знайдеться коаліції $T \subseteq N$ й спільної стратегії $x_T \in X_T$, для яких було б виконано: $u_i\left(x_T, \xi_{N\backslash T}\left(x_T\right)\right) \geq u_i\left(x^*\right)$ для $\forall\, i \in T$, $\exists j \in T : u_j\left(x_T, \xi_{N\backslash T}\left(x_T\right)\right) > u_j\left(x^*\right)$.

Згідно з визначенням, ситуація x^* належить α – ядру, якщо будь-якому відхиленню x_T коаліції T може бути протиставлений хід $x_{N\backslash T}$ доповнювальної коаліції $N\backslash T$, який застерігає хоча б одного члена коаліції T від прийняття стратегії x_T, оскільки в цьому випадку цей гравець програє: $u_i\left(x_T, x_{N\backslash T}\right) < u_i\left(x^*\right)$ (або ж усі гравці коаліції отримують такий саме виграш, як раніше $u_i\left(x_T, x_{N\backslash T}\right) = u_i\left(x^*\right), \forall\, i \in T$). Застосовуючи цю властивість до коаліцій $T = N$ й $T = \{i\}$, $i \in N$, маємо, зокрема, що будь-яка ситуація у α – ядрі є також поділом: $C_\alpha(G) \subset I(G)$. Зазначимо також, що оптимальна за Парето *NE*–ситуація також є поділом (разом із пасивною погрозою, що полягає у відсутності реакції, він утворює сценарій попередження). Сильна рівновага також міститься у α – ядрі: $NE(G) \cap PO(G) \subset I(G)$, $SE(G) \subset C_\alpha(G)$. Можна довести, що поділ x з α – ядра не обов'язково є сильною рівновагою. Тим не менш, із $SE(G) = \varnothing$ випливає $C_\alpha(G) = \varnothing$ і навпаки.

У грі з порожнім α – ядром кооперативна стабільність не може бути досягнутою лише за рахунок попереджувальних погроз, оскільки можливе існування коаліції, для якої відхилення є вигідним, не дивлячись на відповідні дії інших гравців. У цьому випадку для забезпечення стабільності можна ввести сценарій поведінки, у якому деякі гравці з коаліції "відступників" підкуповуються таким чином, щоб останні члени коаліції "відступників" понесли суттєві втрати.

Розглянемо гру "Вибір більшістю голосів" (див. Розділ 3), у якій порядки переваги утворюють цикл Кондорсе: $u_1(a) > u_1(b) > u_1(c)$, $u_2(b) > u_2(c) > u_2(a)$, $u_3(c) > u_3(a) > u_3(b)$.

Розглянемо ситуації $x = (b, b, c)$, за якими обирається кандидат *b*. Стабільність ситуації x може бути порушеною коаліцією $\{1, 3\}$: гравці 1 і 3, обираючи кандидата *a*, покращують свій виграш. Тим не менш, гравець 2 може запропонувати гравцю 3 кращий варіант, підтримуючи кандидата *c*. При цьому гравець 1 отримає найменший виграш.

Передбачаючи, що гравець 2 може підкупити гравця 3, гравець 1 не буде входити у коаліцію $\{1, 3\}$ відхилення від початкового договору, оскільки внаслідок двоетапного порушення початкової домовленості (*b*, *b*, *c*), він може отримати найгірший результат.

Приклад 6.1.13 ("Дилема в'язня з трьома гравцями"). У кожного з гравців є агресивна стратегія (*A*) і кооперативна стратегія (*K*). Гра симетрична. Нижче пераховані чотири варіанти виграшів гравців: $(K, K, K) \to (2, 2, 2)$, $(A, K, K) \to (3, 1, 1)$, $(A, A, K) \to (2, 2, 0)$, $(A, A, A) \to (1, 1, 1)$ (інші 4 – симетричні).

Легко перевірити, що в цій грі рівновага у домінуючих стратегіях є домінованою за Парето і не існує сильної рівноваги, α – ядро містить чотири елементи та збігається з множиною поділів.

Приклад 6.1.14 ("Голосування за одного з трьох кандидатів"). Кожен гравець пропонує одного з трьох кандидатів, зокрема, самого себе. Отже, $X_i = \{1, 2, 3\}$. Сім із 27 можливих (3^3) векторів виграшів приводяться нижче (останні відновлюються за симетрією): $(1, 2, 3) \to (0, 0, 0)$, $(1, 2, 1) \to (0, 0, -1)$, $(1, 3, 1) \to (0, 0, 0)$, $(1, 1, 1) \to (3, 1, 1)$, $(1, 3, 2) \to (0, 2, 2)$, $(2, 3, 1) \to (2, 2, 2)$, $(2, 3, 2) \to (-1, 3, 3)$.

Легко перевірити, що у цій грі немає рівноваги Неша, існує п'ять поділів, α – ядро складається з двох ситуацій (типу (2, 3, 1)).

Визначення 6.1.6. β – *ядром* гри $G = (X_i, u_i;\ i \in N)$ називається множина $C_\beta(G)$ ситуацій x^*, що задовольняють такій властивості. Для будь-якої коаліції $T \subset N$, існує спільна стратегія доповнювальної коаліції $x_{N\setminus T} \in X_{N\setminus T}$ така, що для $\forall\, x_T \in X_T$ не може бути виконаною така система нерівностей:

$$\begin{cases} u_i\left(x_T, x_{N\setminus T}\right) \geq u_i\left(x^*\right) \text{ для } \forall i \in T, \\ u_j\left(x_T, x_{N\setminus T}\right) > u_j\left(x^*\right) \text{ для деякого } j \in T. \end{cases}$$

Стабільність ситуацій із β – ядра є більш сильною, ніж стабільність ситуацій із α – ядра. Коаліція $N\setminus T$ може попередити відхилення коаліції *T*, навіть якщо члени коаліції *T* вибирають свою спільну стратегію таємно. Порівнюючи визначення 6.1.4 – 6.1.6, маємо $SE(G) \subseteq C_\beta(G) \subseteq C_\alpha(G)$. Для того, щоб дати інтерпретацію визначенню 6.1.6, уявимо, що гра $G(\infty)$ повторюється у часі. У момент *t*, $t = 1, 2, \ldots$, кожен гравець *i*, знаючи попередні ходи $x^1, \ldots, x^{t-1}$, вибирає стратегію x_i^t. Виграш кожного гравця після зробленого ходу x^t:

$$u_i(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}u_i\left(x^s\right) \text{ ("середнє Чезаро").} \qquad (6.1.7)$$

Можна показати, що всі ситуації зі змішаного β-ядра гри *G* можуть бути отриманими як сильні рівноваги у грі $G(\infty)$. Навпаки, виграші, що відповідають сильним рівновагам у грі $G(\infty)$, покривають опуклу оболонку виграшів, що відповідають змішаному β-ядру гри *G*. Таким чином, із допомогою гри, що повторюється, формалізується поняття кооперації із застосуванням погроз. Відхилення, тактично вигідні, стають невигідними стратегічно, якщо об'явлена погроза приводиться у виконання. Для цього необхідно, щоб довготривалі виграші завжди перевищували короткотривалі (середнє Чезаро забезпечує виконання цієї умови).

Розглянемо більш простий варіант гри, що повторюється, у якій загальний виграш є "дисконтованою" сумою поточних виграшів.

Нехай у момент $t=1$ розігрується гра *G* і реалізується ситуація x^1. Деякий випадковий механізм диктує або закінчити гру з імовірністю $(1-\delta)$, $0<\delta<1$, або продовжити гру з імовірністю δ і тоді гра *G* наново розігрується в момент $t=2$. Нехай гра *G* розігрується нескінченну кількість разів, тоді загальний виграш гравця $i\in N$ дорівнює:

$$u_i(\infty)=(1-\delta)\left(u_i\left(x^1\right)+\delta u_i\left(x^2\right)+\ldots+\delta^{t-1}u_i\left(x^t\right)+\ldots\right). \qquad (6.1.8)$$

Відомо, що при $\delta\to 1$ сума ряду (6.1.8) прямує до *середнього Чезаро* (6.1.7), якщо границя в (6.1.7) існує. Покладемо $\beta_i=\inf\limits_{x_{N\setminus i}}\sup\limits_{x_i}u_i(x)$ – максимальний виграш гравця *i*, який він може собі забезпечити за умови, що на момент вибору своєї стратегії він знає стратегії всіх інших гравців. Виберемо поділ x^* так, щоб виконувалась умова $\beta_i<u_i\left(x^*\right)$ для $\forall\ i\in N$.

Знайдемо *NE*–ситуацію σ^* у грі $G(\infty)$, яка дає кожному гравцеві виграш $u_i\left(x^*\right)$. Для цього для кожного $j\in N$ виберемо стратегію $\tilde{x}_{N\setminus j}$ гравців $N\setminus\{j\}$ таку, що $\sup\limits_{x_j}u_j\left(x_j,\tilde{x}_{N\setminus j}\right)=\beta_j$. Тоді для кожного $i\in N$ стратегія σ_i^* гравця *i* у грі $G(\infty)$ визначається так: $x_i^1=x_i^*$; якщо $x^1=x^2=\ldots=x^{t-1}=x^*$, то $x_i^t=x_i^*$; якщо $x^1=x^2=\ldots=x^{t-2}\neq x^{t-1}$, вибрати *j*, для якого $x_j^{t-1}\neq x_j^*$, й далі вибирати $\tilde{x}_i=x_i^t=x_i^{t+1}=\ldots$ для всіх $i\in N\setminus\{j\}$.

Нехай $u_i^*\left(x_{N\backslash i}^*\right)=\sup\limits_{x_i} u_i\left(x_i, x_{N\backslash i}^*\right)$, тоді "короткотерміновий" дохід гравця i у момент t за рахунок відхилення від стратегії x_i^* дорівнює $\Delta_i = u_i^*\left(x_{N\backslash i}^*\right)-u_i\left(x^*\right)$. Порівнюючи його з "довготерміновими" втратами $\varepsilon_i=\sum\limits_{t=1}^{\infty}\delta^t\left(u_i\left(x^*\right)-\beta_i\right)$, отримуємо "умову стабільності": $\Delta_i \le \varepsilon_i$, яка еквівалентна умовам:

$$1-\delta \le \left(u_i\left(x^*\right)-\beta_i\right)\Big/\left(u^*{}_i\left(x_{N\backslash i}^*\right)-\beta_i\right). \qquad (6.1.9)$$

Таким чином, якщо δ є досить близьким до 1, умови (6.1.9) виконуються, і, отже, σ^* є *NE*–ситуацією гри $G(\infty)$.

Лема 6.1.9. При виконанні умов (6.1.9) гра $G(\infty)$ із виграшем (6.1.8) має рівновагу, якій відповідає послідовність $x^* = x^1 = x^2 = \ldots = x^t = \ldots$

Таким чином, *NE*–виграш гравця i дорівнює $u_i\left(x^*\right)$. Розглянемо випадок, у якому кожен гравець бере до уваги тільки останній хід партнерів.

Приклад 6.1.15 (Нескінченна гра "Дилема в'язня"). Раціональна поведінка гравців зводиться до такого: у момент $t \ge 2$ гравець i поводить себе мирно, якщо партнер у момент t-1 поводив себе мирно, й поводить себе агресивно інакше. Стратегією 1-го гравця є трійка (B; C, D), де B – стратегія, яку він вибирає на кроці t-1; C – стратегія, яку він вибирає на мирну стратегію 2-го гравця; D – на агресивну. Тоді у будь-який момент $t \ge 2$ маємо біматричну гру 8×8 із множиною стратегій 1-го гравця:

$$a_1=\left(M_1;M_1,M_1\right),\ a_2=\left(A_1;A_1,A_1\right),\ a_3=\left(M_1;M_1,A_1\right), a_4=\left(A_1;M_1,A_1\right),$$
$$a_5=\left(M_1;A_1,M_1\right),\ a_6=\left(A_1;A_1,M_1\right),\ a_7=\left(M_1;A_1,A_1\right),\ a_8=\left(A_1;M_1,M_1\right).$$

Аналогічно описуються стратегії b_i, $i=\overline{1,8}$, 2-го гравця. Дві стратегії кожного гравця в цій грі можна відкинути (так стратегія $\left(M_1;A_1,A_1\right)$ еквівалентна стратегії $\left(A_1;A_1,A_1\right)$, $\left(A_1;M_1,M_1\right)\sim\left(M_1;M_1,M_1\right)$). Залишається гра 6×6 (див. табл. 6.1.13). "Північно-західна" матриця 2×2 є власне матрицею початкової гри (для зручності значення виграшів змінені). У нескінченній грі гравці "блукають" клітинами цієї матриці. При "зацикленні" виграші визначаються середнім арифметичним відповідних елементів початкової матриці, інакше виграш є "чистим". У цій грі мається дві *NE*–ситуації – $\left(a_2,b_2\right)$ (некооперативна рівновага) й нова *NE*–рівновага $\left(a_3,b_3\right)$, у якій обидва гравці застосовують стратегію "як ти, так і я". Зазначимо, що у цій грі "мирні" стратегії a_1, b_1 не домінуються "агресивними" стратегіями a_2, b_2. Однак після послідовного відкидання домінованих стратегій мирні стратегії будуть відкинуті і складною рівновагою виявиться ситуація (a_3, b_3) (яка до того ж буде і Парето-оптимальною).

Таблиця 6.1.13

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	3, 3	0, 4	3, 3	3, 3	0, 4	0, 4
a_2	4, 0	1, 1	1, 1	1, 1	4, 0	4, 0
a_3	3, 3	1, 1	3, 3	2, 2	2, 2	2, 2
a_4	3, 3	1, 1	2, 2	1, 1	2, 2	2, 2
a_5	4, 0	0, 4	2, 2	2, 2	2, 2	0, 4
a_6	4, 0	0, 4	2, 2	2, 2	4, 0	2, 2

Коротко розглянемо результати для гри двох осіб із скінченними множинами стратегій (хоча більшість результатів залишаються справедливими і для компактних множин стратегій і неперервних функцій виграшів).

Лема 6.1.10. α – ядро гри двох осіб збігається з множиною всіх поділів $(C_\alpha(G) = I(G))$, β-ядро задається умовами:

$$x^* \in C_\beta(G) \Leftrightarrow \left\{ x^* \in PO \left| \inf_{y_i} \sup_{y_j} u_j(y_i, y_j) \le u_j(x^*), \ \ j = 1, 2 \right. \right\}.$$

Доведення випливає з визначень α, β – ядер для $|N| = 2$.

Зазначимо, що β-ядро, зокрема, може бути порожнім.

Приклад 6.1.16. Гравці вибирають число з множини $A = \{1, 2, ..., 10\}$. Нехай вибрано x_1, x_2 й $x_1 + x_2 = 10$, тоді $u_i(x_i) = x_i$. В інших випадках виграш дорівнює (4, 0), якщо $(x_1 + x_2)$ парне, і (0, 4) інакше.

Гарантований виграш i-го гравця $\alpha_i = \sup_{x_i} \inf_{x_j} u_i(x_i, x_j) = 0$, тому поділами є всі Парето-оптимальні ситуації у грі. Очевидно, що такими будуть ситуації, для яких $x_1 + x_2 = 10$. Оскільки $\inf_{x_j} \sup_{x_i} u_i(x_i, x_j) = 4$, $i = 1, 2$, то з леми 6.1.9 випливає, що β-ядро складається з трьох ситуацій (4, 6), (5, 5), (6, 4).

Для того щоб стабілізувати з допомогою попереджувальних погроз, наприклад, поділ (3, 7), необхідно, щоб обидва гравці погодились на вибір стратегій у відкриту. У протилежність до цього, реалізація поділу з β-ядра потребує більш слабкого інформаційного обмеження: потрібен лише сигнал, що інформує гравця про відхилення його партнера. З іншого боку, у багатьох іграх двох осіб α і β ядра збігаються. Зокрема, це справедливо для змішаного розширення, оскільки обидві гри з нульовою сумою $(M_1, M_2, \bar{u}_1)$ й $(M_1, M_2, -\bar{u}_2)$ мають ціну.

Розглянемо підмножину таких поділів, які можуть бути стабілізованими парою попереджень, тобто парою погроз, що збігаються з найкращими відповідями гравців.

Визначення 6.1.7. γ *– ядро* гри двох осіб $C_\gamma(G)$ складається з таких поділів x^*, для яких існує сценарій (x^*,ξ_1,ξ_2), де погрози ξ_i, $i=1,2$, є попередженнями: $\forall x_j \neq x_j^*$ $\begin{cases} u_j\left(x_j,\xi_i\left(x_j\right)\right) \leq u_j\left(x^*\right), \\ u_i\left(x_j,\xi_i\left(x_j\right)\right) = \sup\limits_{x_i} u_i\left(x_j,x_i\right). \end{cases}$

Лема 6.1.11. Нехай функції u_i, $i=1,2$, взаємно однозначні, $S_i = \sup\left\{u_i\left(x_i,x_j\right) \middle| \left(x_i,x_j\right)\in O_j\right\}$ – *i*-виграш Штакельберга, де O_j – множина найкращих відповідей гравця $j \neq i$. Тоді γ-ядро складається з Паретівських ситуацій, для яких

$$S_i \leq u_i(x);\ \ i=1,2\,. \tag{6.1.10}$$

Доведення. Нехай x^* – оптимум Парето, що задовольняє (6.1.10). Для будь-якого $x_i \neq x_i^*$ позначимо через $x_j = \xi_j(x_i)$ найкращу відповідь гравця *j*. За визначенням: $u_i\left(x_i,\xi_j\left(x_i\right)\right) \leq S_i \leq u_i\left(x^*\right)$, $i=1,2$, $x_i \neq x_i^*$. Отже, (x^*,ξ_1,ξ_2) є сценарієм попередження, а тому ситуація x^* індивідуально раціональна. Таким чином, x^* є поділом. Навпаки, нехай $x^* \in C_\gamma(G)$. Тоді існує сценарій попередження (x^*,ξ_1,ξ_2), де $\xi_i(x_j)$ – єдина (за припущенням) стратегія найкращої відповіді гравця *i* на x_j. Покажемо, що x^* задовольняє (6.1.10). Виберемо $x_i \neq x_i^*$. За властивістю ξ_j маємо: $u_i\left(x_i,\xi_j\left(x_i\right)\right) \leq u_i\left(x^*\right)$.

Від супротивного доведемо, що $x_j = \xi_j\left(x_i^*\right) \Rightarrow u_i\left(x_i^*,x_j\right) \leq u_i\left(x^*\right)$. Нехай $u_i\left(x^*\right) < u_i\left(x_i^*,x_j\right)$. З оптимальності за Парето x^* отримуємо:

$$\sup_{y_j} u_j\left(x_i^*, y_j\right) = u_j\left(x_i^*, x_j\right) < u_j\left(x^*\right),$$

що суперечить припущенню.♦

Відмітимо, що припущення про взаємну однозначність у формулюванні леми може бути опущеним, якщо S_i замінити на величину $\gamma_i = \sup_{x_i} \inf_{x_j \in O_j(x_i)} u_i\left(x_i, x_j\right)$, що характеризує максимальний гарантований виграш лідера (гравця *i*) без припущення про доброзичливість підлеглого.

Лема встановлює зв'язок між здійсненням стабільності з допомогою попереджень й боротьбою за лідерство. Вона стверджує, що у грі *G* виникає боротьба за лідерство тоді й лише тоді, коли її γ-ядро порожнє. Таким чином, у грі з порожнім γ-ядром стабільності будь-якого поділу загрожує можливість захоплення лідерства одним із гравців. Разом із тим, другий гравець у цьому випадку може використовувати погрозу типу "Машина страшного суду". Правдоподібність успіху однієї та другої тактики з погляду стороннього спостерігача конфлікту однакова.

Приклад 6.1.17. Дві фірми поставляють на ринок товар в об'ємі x_i, $i = 1, 2$. Ціна на товар визначається формулою $p = p_0 - \left(x_1 + x_2\right)$ (для $\left(x_1 + x_2\right) \le p_0$). Витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва однакові в обох фірм і є постійними. Розглядається така гра з параметрами p_0, c, $0 < \frac{1}{2} p_0 < c < p_0$:

$$\left\langle X_1 = X_2 = \left[0, \frac{1}{2} p_0\right], u_i\left(x_1, x_2\right) = \left[p_0 - \left(x_1 + x_2\right)\right] \cdot x_i - c x_i;\ i = 1, 2 \right\rangle.$$

Оскільки $u = u_1 + u_2 = -x^2 + \left(p_0 - c\right) \cdot x$, де $x = x_1 + x_2$, то максимальний загальний дохід $u^0 = \frac{1}{4}\left(p_0 - c\right)^2$ при $x^0 = \frac{1}{2}\left(p_0 - c\right)$ є Парето-оптимальним. Гарантований виграш $\alpha_i = \sup_{x_i} \inf_{x_j} u_i = \sup_{x_i} u_i\left(x_i, \frac{1}{2} p_0\right) = 0$.

Таким чином, поділи утворюють довільний розподіл максимального сумарного доходу. Найкраща відповідь першого гравця: $O_1\left(x_2\right) = \frac{1}{2}\left(p_0 - c\right) - \frac{1}{2} x_2$, тоді

$$\gamma_2 = S_2 = \sup_{0 \le x_2 \le \frac{1}{2} p_0} u_2\left(O_2\left(x_2\right), x_2\right) = \sup_{0 \le x_2 \le \frac{1}{2} p_0} \frac{1}{2}\left[\left(p_0 - c\right) x_2 - x_2^2\right] = \frac{1}{8}\left(p_0 - c\right)^2.$$

Симетрично $S_1 = S_2$. Отже виграш (S_1, S_2) відповідає деякому поділу й за лемою 6.1.10, γ – ядро складається з єдиного поділу $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\frac{1}{4}(p_0 - c), \frac{1}{4}(p_0 - c)\right)$, що порівну розподіляє максимальний сумарний дохід. У цій грі γ-ядро є справедливою кооперативною ситуацією, що реалізується за допомогою природних погроз O_1, O_2. Реалізація будь-якого несправедливого (нерівного) розподілу максимального загального доходу вимагає тактики залякування.

Можливо проаналізувати гру і у випадку непостійних (зростаючих або спадаючих) витрат на одиницю продукції при збільшенні масштабів виробництва.

Цікаву класифікацію ігор двох осіб дає така теорема.

Теорема 6.1.1. γ і β ядра не можуть бути порожніми одночасно. Якщо γ і β ядра непорожні, то вони перетинаються.

Наслідок. Ігри двох осіб розпадаються на три класи:

1. $C_\gamma = \varnothing$, $C_\beta \neq \varnothing$ (боротьба за право першого ходу (за лідерство));
2. $C_\beta = \varnothing$, $C_\gamma \neq \varnothing$ (боротьба за право другого ходу (за підлеглість));
3. $C_\beta \bigcap C_\gamma \neq \varnothing$ (у цьому випадку множина $C_\beta \bigcap C_\gamma$ є областю для кооперації з використанням погроз).

У свою чергу клас 3 розпадається на 4 підкласи:

3.1. $C_\beta \bigcap C_\gamma = C_\gamma$ (лідером бути краще, оскільки $\gamma \geq \beta$, але можливий компроміс, що усуває небезпеку захоплення лідерства підлеглим);

3.2. $C_\beta \bigcap C_\gamma = C_\beta$ (підлеглим бути краще ($\beta \geq \gamma$), але можливий компроміс, коли у лідера не має підстав відмовитись від лідерства);

3.3. $C_\beta \bigcap C_\gamma = \left\{x \middle|\ u_1(x) \geq \gamma_1, u_2(x) \geq \beta_2\right\}$ (лідером є гравець 1);

3.4. $C_\beta \bigcap C_\gamma = \left\{x \middle|\ u_2(x) \geq \gamma_2,\ u_1(x) \geq \beta_1\right\}$ (лідером є гравець2).

На закінчення приведемо ще одне визначення "ядра" (читачу пропонуємо спробувати самому запропонувати концепцію ядра, бажано конструктивну й розумну).

Визначення 6.1.8. Нехай $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$ – сценарій попередження гри *G*. Погроза називається гарантованою, якщо не принесе втрат гравцю, що погрожує:

$$u_1\left(x_1, \xi_2(x_1)\right) \leq u_1\left(x^*\right) \leq u_1\left(\xi_1(x_2), x_2\right),$$
$$u_2\left(\xi_1(x_2), x_2\right) \leq u_2(x^*) \leq u_2\left(x_1, \xi_2(x_1)\right), \forall x_1, x_2.$$

Тоді *g-ядром* гри *G* називається множина $C_g(G)$ таких ситуацій x^*, для яких існує хоча б один гарантований сценарій попередження $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$.

Лема 6.1.12. $x \in C_g(G) \Leftrightarrow x \in PO$ і $u_i(x) \le \beta_i$ для $i \in N$.

Доведення випливає з двох попередніх лем, звідки $C_g(G) \subseteq C_\gamma(G)$, зокрема, $C_g(G)$ може бути порожнім.♦

Контрольні завдання до § 1

1. Знайти сильні рівноваги Неша

1.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 2	1, 2	2, 1
b_1	1, 2	1, 3	2, 1
c_1	0, 0	0, 1	2, 1

1.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	2, 2	1, 1
b_1	2, 1	3, 1	2, 1
c_1	2, 3	3, 2	2, 1

1.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 4	1, 3	3, 4
b_1	2, 5	3, 3	4, 3
c_1	1, 1	4, 2	4, 2

2. Знайти рівноваги Неша у спільних змішаних стратегіях:

2.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	2, 2	5, 1
b_1	1, 5	1, 1

2.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	2, 2	5, 1
b_1	1, 4	1, 1

~~§ 2. Ігри у характеристичній формі~~

~~У кооперативних іграх доцільно розглядати виграші не лише для окремих гравців (індивідуальні корисності), і не лише для всієї спільноти~~ ~~N (колективна функція корисності, наприклад, утилітарна чи егалітарна), але й для кожної коаліції гравців (не порожньої підмножини) з~~ ~~N.~~

~~Нехай~~ ~~$N = \{\overline{1,n}\}$~~ ~~– множина потенційно можливих споживачів об'єкта колективного користування. Кожен споживач може або обслуговуватись або ні, наприклад, він або отримує телефон, або ні, підключається до центрального водопостачання, або ні і т. д. Витрати на обслуговування коаліції гравців~~ ~~S, $S \subseteq N$~~, ~~підсумовуються в загальну функцію витрат~~ ~~$c(S) \ge 0$, де $c(S)$~~ ~~– мінімальні витрати на обслуговування коаліції гравців~~ ~~S~~ ~~найбільш ефективним способом. Необхідно обслужити всіх гравців і поділити відповідні витрати, тобто визначи-~~