~~4. Проаналізувати рівноваги Неша на стійкість~~

~~4.1~~

~~X_1 \ X_2~~	~~a_2~~	~~b_2~~	~~c_2~~
~~a_1~~	~~1, 0~~	~~1, 1~~	~~2, 1~~
~~b_1~~	~~1, 5~~	~~0, 5~~	~~1, 4~~
~~c_1~~	~~5, 1~~	~~1, 2~~	~~2, 2~~

~~4.2~~

~~X_1 \ X_2~~	~~a_2~~	~~b_2~~	~~c_2~~
~~a_1~~	~~3, 1~~	~~3, 2~~	~~3, 3~~
~~b_1~~	~~2, 2~~	~~3, 3~~	~~1, 3~~
~~c_1~~	~~3, 1~~	~~2, 4~~	~~4, 2~~

~~4.3~~

~~X_1 \ X_2~~	~~a_2~~	~~b_2~~	~~c_2~~
~~a_1~~	~~2, 4~~	~~1, 3~~	~~3, 4~~
~~b_1~~	~~2, 5~~	~~3, 3~~	~~4, 3~~
~~c_1~~	~~1, 1~~	~~4, 2~~	~~4, 2~~

~~4.4~~

~~X_1 \ X_2~~	~~a_2~~	~~b_2~~	~~c_2~~
~~a_1~~	~~1, 1~~	~~1, 3~~	~~3, 2~~
~~b_1~~	~~1, 3~~	~~2, 2~~	~~3, 1~~
~~c_1~~	~~3, 2~~	~~2, 3~~	~~3, 3~~

§ 4. Змішані стратегії

Почнемо з класичного прикладу 5.4.1 ("Гра де Монмора").

У кінці XVIII ст. французький математик Рене де Монмор розглянув наступну ситуацію. Для того, щоб зробити подарунок своєму синові, батько пропонує: "Я візьму золоту монету у праву (*П*) або ліву (*Л*) руку, а ти назвеш одну з них. Якщо монета в мене у правій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш одну золоту монету. Якщо ж монета у мене у лівій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш дві монети; інакше ти не отримаєш нічого".

Матрицю виграшів сина у грі де Монмора наведено у табл. 5.4.1. Де Монмор запитує, як можна оцінити для сина цей подарунок, беручи до уваги, що "якщо у цій грі гравці однаково проникливі й спостережливі, то немає можливості виробляти правило поведінки" (не існує оптимальної стратегії).

Таблиця 5.4.1

X_1 \ X_2	***Л***	***П***
Л	2	0
П	0	1

Ця гра не має ціни ($\sup\limits_{x_1}\inf\limits_{x_2} u(x_1,x_2)=0\neq\inf\limits_{x_2}\sup\limits_{x_1} u(x_1,x_2)=1$), у жодного з гравців немає оптимальної стратегії. Але знання стратегії супротивника дозволяє домогтися хорошого результату. Отже, виникає боротьба за другий хід, у якій кожен гравець хоче приховати свій кінцевий стратегічний вибір і у той же час розвідати наміри супротивника. Але навіть найглибшої секретності не досить, щоб не дозволити розумному противнику вгадати стратегічний вибір.

Єдиним способом зробити власний вибір непередбачуваним полягає у тому, щоб зробити його випадковим: замість вибору так званої чистої стратегії x_1 з множини $\{\Lambda,\Pi\}$ син може використати рандомізовану (випадкову) стратегію μ_1, вибираючи значення Λ і Π відповідно з ймовірностями p_1, $1-p_1$, $0\leq p_1\leq 1$. Очікуваний виграш (математичне сподівання) сина при цьому буде не меншим за:

$$\upsilon_1=\inf\{2p_1,1-p_1\}=\begin{cases}2p_1,\ 2p_1\leq 1-p_1\Rightarrow p_1\leq 1/3,\\ 1-p_1,\ 1-p_1\leq 2p_1\Rightarrow p_1\geq 1/3.\end{cases}$$

Отже, гарантований виграш сина дорівнює $\alpha_1=2/3$ (при $p_1=1/3$). Програш батька при виборі стратегій $\{\Lambda,\Pi\}$ із ймовірностями p_2, $1-p_2$ відповідно буде не більшим за $\upsilon_2=2/3$ і гарантований програш $\alpha_2=2/3$.

Таким чином, внесення тактичної невизначеності у стратегічний вибір приводить до ціни $\alpha=2/3$. Це означає, що якщо гра буде повторятись багато разів (теоретично – нескінченно) і батько й син будуть вибирати стратегії з ймовірністю $1/3$, то у кожних трьох випадках її реалізації син буде отримувати 2 монети.

Змішане розширення гри. Формалізуємо зроблені нами висновки.

Визначення 5.4.1. Нехай $G=(X_i,u_i;i\in N)$, де X_i – скінченна множина при всіх $i\in N$. *Змішаною стратегією* гравця i називається імовірнісний розподіл $\mu_i=\mu_i(x_i)_{x_i\in X_i}$ на X_i, $0\leq\mu_i(x_i)\leq 1$, $x_i\in X_i$; $\sum\limits_{x_i\in X_i}\mu_i(x_i)=1$, $i\in N$ ($\mu_i(x_i)$ – імовірність вибору i-м гравцем його "чистої" стратегії з $x_i\in X_i$).

Отже, множина M_i змішаних стратегій i-го гравця є одиничним симплексом у просторі його стратегій $E^{|X_i|}$.

Змішаним розширенням гри G називається гра $\overline{G}=(M_i,\overline{u}_i,i\in N)$, де:

$$\bar{u}_i(\mu) = \sum_{x \in X_N} u_i(x)\mu_1(x_1)\ldots\mu_n(x_n); \ \forall\ \mu \in M_N = \prod_{i=\overline{1,n}} M_i . \qquad (5.4.1)$$

Мається на увазі, що "лотерея" *i*-го гравця не залежить від "лотереї" *j*-го для всіх $j \neq i$, лише гравець *i* знає стратегію x_i, яка дійсно випала у лотереї. Оскільки випадкові змінні незалежні у сукупності, то $\bar{u}_i(\mu)$ є очікуваним виграшем (математичним сподіванням виграшу) гравця *i*.

Визначення 5.4.2. Чиста стратегія $x_i \in X_i$ гравця *i* у початковій грі ототожнюється зі змішаною стратегією $\delta_{x_i} \in M_i$, у якій вибирається x_i із імовірністю одиниця: $\delta_{x_i}(x_i) = 1;\ \delta_{x_i}(y_i) = 0,\ y_i \in X_i,\ y_i \neq x_i$.

У цьому випадку з формули (5.4.1) випливає: $\bar{u}_i(\delta_x) = u_i(x)$, $\forall\ x \in X_N$, $\delta_x = \left(\delta_{x_i}\right)_{i \in N}$. Тому будемо розглядати X_i як підмножину M_i, а $\bar{u}_i$ – як розширення області визначення u_i з X_N на M_N.

Із теорії ігор двох осіб із нульовою сумою відомо, що у змішаному розширенні гри завжди існує її ціна та сідлова точка. Аналогічна ситуація мається і для рівноваг Неша.

Теорема 5.4.1. Якщо X_i – скінченні множини стратегій для всіх $i \in N$, то множина рівноваг Неша у грі $\bar{G}$ є непорожнім компактом у M_N і містить множину рівноваг Неша у початковій грі *G*: $NE(G) \subseteq NE(\bar{G}) \neq \varnothing$.

Доведення. Нехай x^* – рівновага Неша у грі *G*. Позначимо $\delta_{x_{N\setminus i}} = \left(\delta_{x_j}\right)_{j \neq i} \in M_{N\setminus\{i\}}$. Із визначення δ_x, лінійності функції $\bar{u}_i$ по змінній μ_i на M_i (опуклій оболонці X_i) маємо:

$$\sup_{\mu_i \in M_i} \bar{u}_i\left(\mu_i, \delta_{x_i}\right) = \sup_{y_i \in X_i} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right). \qquad (5.4.2)$$

Із $x^* \in NE$ випливає:

$$\sup_{y_i \in X_i} u_i\left(y_i, x^*_{N\setminus i}\right) = u_i\left(x^*\right) = \bar{u}_i\left(\delta_{x_i}, \delta_{X^*\setminus i}\right). \qquad (5.4.3)$$

Із рівностей (5.4.2), (5.4.3) маємо, що δ_{x^*} є рівновагою Неша у грі $\bar{G}$.

Оскільки гра $\bar{G}$ задовольняє умовам теореми Неша, доведення теореми завершено.♦

Як наслідок із леми 5.2.3 всі *NE*–ситуації у грі $\bar{G}$ є індивідуально-раціональними у грі $\bar{G}$. Насправді вони є індивідуально-раціональними й у початковій грі *G*.

Лема 5.4.1. Гарантований виграш гравця *i* у початковій грі не перевищує його гарантований виграш у змішаному розширенні гри:

$$\forall i \in N : \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \le \sup_{\mu_i \in M_i} \inf_{\mu_{N\setminus i} \in M_{N\setminus\{i\}}} \bar{u}_i\left(\mu_i, \mu_{N\setminus i}\right).$$

Доведення. Фіксуємо у гравця $i \in N$ чисту стратегію $x_i \in X_i$ і для кожного $j \in N \setminus \{i\}$ деяку змішану стратегію $\mu_j \in M_j$. Тоді $\bar{u}_i\left(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus\{i\}}\right)$ є математичним сподіванням функції $u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right)$ (звуження u_i на X_i для фіксованого x_i) відносно добутку імовірнісних мір μ_j на $X_{N\setminus\{i\}}$. Отже, $\inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \le \bar{u}_i\left(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus\{i\}}\right)$.

Оскільки ця нерівність справедлива для всіх $\mu_{N\setminus i} \in M_{N\setminus\{i\}}$, то $\inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \le \inf_{\mu_i \in M_{N\setminus\{i\}}} \bar{u}_i\left(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus i}\right) \le \sup_{\mu_i \in M_i} \inf_{\mu_i \in M_{N\setminus\{i\}}} \bar{u}_i\left(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus\{i\}}\right)$. Оскільки вибір x_i довільний, доведення завершено.♦

Як наслідок з теореми 5.2.4 і леми 5.2.2 для $n = 2$ отримуємо:

Теорема 5.4.2 (фон Неймана–Моргенштерна). Змішане розширення $\bar{G} = \left(M_1, M_2, \bar{u}_1\right)$ скінченої гри двох осіб із нульовою сумою $G = \left(M_1, M_2, u_1\right)$ має хоча б одну сідлову точку і ціну $\bar{v}$, для якої $\tilde{v} = \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} u_1\left(x_1, x_2\right) \le \bar{v} \le \inf_{x_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} u_1\left(x_1, x_2\right) = \tilde{\tilde{v}}$.

Якщо початкова гра *G* має ціну й у кожного гравця мається оптимальна стратегія, то змішане розширення гри $\bar{G}$ має ту ж ціну й довільні випуклі комбінації оптимальних стратегій у грі *G* є оптимальними стратегіями у грі $\bar{G}$. Якщо ж гра *G* не має ціни й, отже, у гравців немає оптимальних стратегій, то у грі $\bar{G}$ кожен гравець має хоча б одну оптимальну змішану стратегію й ціна гри лежить на відрізку $\left[\tilde{v}, \tilde{\tilde{v}}\right]$. Типовим прикладом є гра де Монмора зі змішаною ціною $2/3$ й оптимальними обережними стратегіями обох гравців $\left(1/3\,\Lambda + 2/3\,\Pi\right)$.

У змішаному розширенні гри "Дилема в'язня" агресивна стратегія продовжує залишатись єдиною домінуючою стратегією для кожного гравця, тому $NE(G) = NE\left(\bar{G}\right)$.

У грі "Перехрестя" є дві *NE*–ситуації у чистих стратегіях. У змішаному розширенні виникає ще одна *NE*–ситуація $\mu^* = \left(\mu_1^*, \mu_2^*\right)$ (про її знаходження див. нижче): $\mu_1^* = \mu_2^* = \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\delta_I + \frac{1}{2-\varepsilon}\delta_{II}$, де δ_I (δ_{II}) – змішана стратегія, при якій із імовірністю 1 гравець проїжджає перехрестя (зупиняється). Маємо:

$$\bar{u}_1\left(\delta_I, \mu_2^*\right) = \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\cdot 1 + \frac{1}{2-\varepsilon}\cdot\left(1-\varepsilon\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon},$$

$$\bar{u}_1\left(\delta_{II}, \mu_2^*\right) = \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\cdot 2 + \frac{1}{2-\varepsilon}\cdot 0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Із лінійності $\bar{u}_1$ відносно μ_1 отримуємо $\bar{u}_1\left(\mu_1, \mu_2^*\right) = \bar{u}_1\left(\mu_1^*, \mu_2^*\right)$, $\forall \mu_1 \in M_1$. У силу симетрії гравців: $\bar{u}_2\left(\mu_1^*, \mu_2\right) = \bar{u}_2\left(\mu_1^*, \mu_2^*\right)$, $\forall\ \mu_2 \in M_2$.

Звідси випливає, що $\left(\mu_1^*, \mu_2^*\right)$ – *NE*–ситуація у змішаному розширенні гри "Перехрестя". Відмітимо, що на відміну від *NE*–ситуацій у чистих стратегіях, змішана *NE*–ситуація неефективна (домінується вектором виграшів (1, 1)), але симетрична ($\mu_1^* = \mu_2^*$) і рівноправна для обох гравців ($u_1^* = u_2^*$). Тому її можна рекомендувати гравцям у якості "переговорної".

Насправді отриманий результат невипадковий – у симетричних іграх завжди існує симетрична змішана *NE*–ситуація. Аналогічно чистим *NE*–ситуаціям змішані *NE*–ситуації також можуть не бути обережними.

Таким прикладом є гра з табл. 5.4.2 (упевніться самостійно, що *NE*–ситуація у змішаному розширенні цієї гри складається не з обережних стратегій).

Таблиця 5.4.2

X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	0, 1	2, 0
b_1	2, 0	1, 1

Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях. Нехай X_i – скінченна множина стратегій гравця $i \in N$. Для довільної змішаної стратегії $\mu_i \in M_i$ позначимо через $\left[\mu_i\right] = \left\{x_i \in X_i \middle|\ \mu_i\left(x_i\right) > 0\right\}$ – "*носій*" μ_i, тобто множину чистих стратегій гравця *i*, які входять у μ_i із додатною ймовірністю.

Визначення 5.4.3. Змішана стратегія μ_i називається *цілком змішаною,* якщо $\left[\mu_i\right] = X_i$ (носієм μ_i є вся множина чистих стратегій).

Визначення 5.4.4. Ситуація μ у грі $\bar{G}$ називається цілком змішаною, якщо μ_i – цілком змішана стратегія при всіх $i \in N$.

Теорема 5.4.3. Нехай початкова гра $G = (X_i, u_i, i \in N)$ має скінченні множини стратегій. Нехай $\mu^* \in NE(\bar{G})$ рівновага Неша у змішаних стратегіях. Тоді справедлива така система рівностей:

$$\forall\, i \in N, \forall\, x_i \in [\mu_i^*], \bar{u}_i(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus i}^*) = \bar{u}_i(\mu^*). \tag{5.4.4}$$

Доведення. Фіксуємо $i \in N$. Тоді за визначенням рівноваг Неша маємо:

$$\bar{u}_i(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus i}^*) \le \bar{u}_i(\mu^*) \text{ для } x_i \in [\mu_i]. \tag{5.4.5}$$

Покладемо, що хоча б одна з цих нерівностей строга: $\bar{u}_i(\delta_{x_i^0}, \mu_{N\setminus i}^*) < \bar{u}_i(\mu^*)$. Перемножуючи всі нерівності (5.4.5) на $\mu_i(x_i)$ і, враховуючи, що $\mu_i(x_i^0) > 0$, маємо:

$$\bar{u}_i(\mu^*) = u_i \sum_{x_i \in [\mu_i]} \mu_i(x_i) \cdot \bar{u}_i(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus i}^*) < \left\{ \sum_{x_i \in [\mu_i]} \mu_i(x_i) \right\} \cdot \bar{u}_i(\mu^*) = \bar{u}_i(\mu^*).$$

Отримане протиріччя доводить, що всі нерівності у (5.4.5) насправді перетворюються у рівності (5.4.4).♦

Згідно з теоремою, рівновага Неша у змішаних стратегіях μ має властивість: будь-яка змішана стратегія μ_i' із тим самим носієм, що і μ_i, є найкращою відповіддю гравця *i* на $\mu_{N\setminus i}$.

Зокрема, якщо μ є цілком змішаною рівновагою, то будь-яка стратегія гравця *i* є найкращою відповіддю на набір $\mu_{N\setminus i}$ рівноважних стратегій останніх гравців.

Отже, у грі двох осіб у стані цілком змішаної рівноваги гравець *i* вибирає стратегію, яка вирівнює виграші гравця *j* при всіх його змішаних стратегіях. Ця стратегія не залежить від функції виграшу гравця *i* (цей факт, проілюстрований на прикладі "Перехрестя"). У той же час у грі трьох і більше осіб стратегії цілком змішаної рівноваги повинні визначатись гравцями спільно. Причому μ_i залежить від функції виграшу u_i у силу системи (5.4.4).

Теорема 5.4.3 є основним інструментом, що дозволяє обчислювати рівноваги Неша у змішаних стратегіях.

Дійсно, нехай ми шукаємо ситуацію $\mu \in NE(\bar{G})$, вважаючи носії всіх стратегій μ_i заданими, тобто:

$$[\mu_i] = Y_i \subseteq X_i,\ i \in N. \tag{5.4.6}$$

Тоді система (5.4.4) переписується так:

$$\forall\ i \in N\ ,\ \forall\ x_i, y_i \in Y_i\ \ \bar{u}_i\left(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus i}\right) = \bar{u}_i\left(\delta_{y_i}, \mu_{N\setminus i}\right). \qquad (5.4.7)$$

Система (5.4.7) має $\sum_{i\in N}\left(\left|Y_i\right| - 1\right)$ незалежних одновимірних рівнянь. Згідно (5.4.6) кожна стратегія μ_i складається з $\left(\left|Y_i\right| - 1\right)$ незалежних змінних (беручи до уваги умову $\sum_{x_i \in Y_i} \mu_i\left(x_i\right) = 1$).

Коли множини стратегій X_i, $i \in N$, містять невелике число елементів, то наступний алгоритм дозволяє повністю визначити $NE\left(\bar{G}\right)$.

Фіксуємо підмножину Y_N з X_N. Розв'язуємо систему (5.4.6), (5.4.7) відносно змінних $\mu_i \in M_i$ для всіх $i \in N$. Для кожного розв'язку μ тепер потрібно перевірити нерівності:

$$\forall\ i \in N\ ,\ \forall\ x_i \in X_i \setminus Y_i\ \ \bar{u}_i\left(\delta_{x_i}, \mu_{N\setminus i}\right) \le \bar{u}_i\left(\mu_i, \mu_{N\setminus i}\right).$$

Для біматричних ігор змішані рівноваги Неша можна подати в аналітичній формі. Нехай виграші гравців задаються матрицями $U_i = \left[u_i\left(x_1, x_2\right)\right]_{x_1 \in X_1}^{x_2 \in X_2}$, де X_1 – множина рядків, X_2 – стовпців.

Змішана стратегія μ_1 є вектор-рядком $\mu_1 = \left[\mu_1\left(x_1\right)\right]_{x_1 \in X_1}$, змішана стратегія μ_2 є вектор-стовпчиком $\mu_2 = \left[\mu_2\left(x_2\right)\right]_{x_2 \in X_2}$.

Тоді виграш гравця i є $\bar{u}_i\left(\mu_1, \mu_2\right) = \mu_1 U_i \mu_2$. Нехай $\left(\mu_1^*, \mu_2^*\right)$ – цілком змішана *NE*–ситуація. Тоді система (4.7) набуде вигляду:

$$U_1 \mu_2^* = \upsilon_1 J_{X_1}\ ,\ \mu_1^* U_2 = \upsilon_2 J_{X_2}\ , \qquad (5.4.8)$$

де $\upsilon_i = \mu_1^* U_i \mu_2^*$ – *NE*–виграш гравця *i*; J_{X_1}, J_{X_2} – відповідно вектор-стовпчик і вектор-рядок, усі компоненти яких рівні 1.

Нехай матриці U_i не вироджені. З (5.4.8) маємо $\mu_2^* = \upsilon_1 U_1^{-1} J_{X_1}$. Перемножуючи на J_{X_2} зліва цю рівність, одержимо: $1 = J_{X_2} \cdot \mu_2^* = \upsilon_1 J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}$, звідки $\upsilon_1 = \dfrac{1}{J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}}$, тому

$$\mu_2^* = \frac{U_1^{-1} J_{X_1}}{J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}}.\ \text{Аналогічно,}\ \mu_1^* = \frac{J_{X_1} U_2^{-1}}{J_{X_1} U_2^{-1} J_{X_2}}. \qquad (5.4.9)$$

Отже, якщо U_i не вироджені матриці й гра $G=(X_1,X_2,U_1,U_2)$ має цілком змішану *NE*–ситуацію (μ_1^*,μ_2^*), то вона єдина і визначається формулами (5.4.9). Навпаки, якщо компоненти векторів μ_1^*, μ_2^*, що визначаються (5.4.9) невід'ємні, то пара (μ_1^*,μ_2^*), очевидно, є змішаною *NE*–ситуацією у грі *G*.

Для зручності обчислень рівноважні виграші v_i доцільно представляти у вигляді: $v_i=\det(U_i)\Big/\sum\limits_{x_1\in X_1,x_2\in X_2}U_i^c(x_1,x_2)$, де $U^c(x_1,x_2)$ позначає алгебраїчне доповнення елемента (x_1,x_2) у матриці *U*.

Важливі властивості виконуються "майже для всіх" ігор.

Визначення 5.4.3. Нехай множини стратегій X_1, X_2 скінченні. Деяка властивість *P виконується майже* для всіх ігор, визначених на $X_1\times X_2$, якщо множина

$$\bar{P}=\left\{(u_1,u_2)\in E^{n_1\times n_2}\times E^{n_1\times n_2}\,\middle|\ \text{для гри } (X_1,X_2,u_1,u_2) \text{ не виконано } P\right\}$$

має міру Лебега рівну нулю й міститься в деякій замкненій підмножині без внутрішніх точок простору $E^{n_1\times n_2}\times E^{n_1\times n_2}$.

Нехай X_1, X_2 – скінченні множини. Майже для всіх ігор, визначених на $X_1\times X_2$, справедливі твердження:

✓ Кількість рівноваг Неша у змішаних стратегіях обмежена й непарна, для будь-якої *NE*–ситуації у змішаних стратегіях множини $[\mu_1]$ й $[\mu_2]$ мають однакову кількість елементів.

✓ Рівноваги Неша у змішаних стратегіях, які не є рівновагами у початковій грі, не є оптимальними за Парето у змішаному розширенні гри.

Розглянемо приклад 5.4.1 – біматричну гру (табл. 5.4.3) із двома стратегіями в кожного гравця. Стратегії першого гравця – *В* (верх), *Н* (низ), другого – *Л* (ліве), *П* (праве), a_i, b_i, c_i, d_i – чотири різних дійсних числа, $i=1,2$ (ця умова гарантує скінченність множини $NE(\bar{G})$).

Таблиця 5.4.3

I \ II	***Л***	***П***
В	a_1, a_2	c_1, c_2
Н	b_1, b_2	d_1, d_2

Розглянемо три класи ігор.

1. У початковій грі G хоча б один гравець, наприклад, перший, має домінуючу стратегію (нехай B). Тоді гра G і її змішане розширення $\bar{G}$ мають єдину ситуацію рівноваги Неша:
$NE(G) = NE(\bar{G}) = \{(B, \Lambda),$ якщо $a_2 > c_2;$ $(B, \Pi),$ якщо $a_2 < c_2\}$, оскільки нерівності $a_1 > b_1$, $c_1 > d_1$ (усі числа – різні) приводять до того, що у грі $\bar{G}$ стратегія B строго домінує усі змішані стратегії.

2. Гра G не має рівноваг Неша. Це може бути, якщо:

$$\{b_1 < a_1, c_1 < d_1, a_2 < c_2, d_2 < b_2\}, \{a_1 < b_1, d_1 < c_1, c_2 < a_2, b_2 < d_2\}, \quad (5.4.11)$$

тоді змішане розширення $\bar{G}$ гри G має єдину NE–рівновагу:

$$\mu_1^* = \left(\frac{d_2 - b_2}{a_2 + d_2 - b_2 - c_2}, \frac{a_2 - c_2}{a_2 + d_2 - b_2 - c_2}\right),$$

$$\mu_2^* = \left(\frac{d_1 - c_1}{a_1 + d_1 - b_1 - c_1}, \quad \frac{a_1 - b_1}{a_1 + d_1 - b_1 - c_1}\right). \quad (5.4.12)$$

із виграшами:

$$\upsilon_1 = \frac{a_1 d_1 - b_1 c_1}{a_1 + d_1 - b_1 - c_1}, \; \upsilon_2 = \frac{a_2 d_2 - b_2 c_2}{a_2 + d_2 - b_2 - c_2}.$$

Ці формули одержуються безпосередньо з формул (5.4.9), (5.4.10). Єдиність гарантується умовами (5.4.11), при їхньому виконанні або U_i – невироджена матриця, або її можна зробити невиродженою, додаванням деякої константи c до елементів матриці (ця операція, очевидно, не змінює множину NE–ситуацій).

3. Гра G має дві рівноваги Неша. Цей випадок визначається, якщо: $\{b_1 < a_1, c_1 < d_1, c_2 < a_2, b_2 < d_2\}$ чи $\{a_1 < b_1, d_1 < c_1, a_2 < c_2, d_2 < b_2\}$. Тоді у грі $\bar{G}$ виникає ще одна NE–ситуація, що збігається з (5.4.12).

Якщо множини чистих стратегій X_i нескінченні, то навіть для гри двох осіб із нульовою сумою не можна гарантувати існування ціни гри у змішаних стратегіях, тим більше існування NE–ситуації.

Розглянемо гру "Китайський покер". Кожен із двох гравців вибирає невід'ємне ціле число. Гравець, який називає більше число, виграє гривню:

$$X_1 = X_2 = N, \; u_1(x_1, x_2) = \{1 | x_2 < x_1; \; 0 | x_2 = x_1; -1 | x_1 < x_2\}.$$

Імовірнісний розподіл на $X_1 = N$ набуде вигляду: $\mu_i = (\mu_i(n))_{n \in N}$, де $\sum_{n \in N} \mu_i(n) = 1, \mu_i(n) \geq 0, n \in N$. Позначаючи через M_i множину розподілів, маємо гру $(M_1, M_2, \bar{u}_1)$, де

$$\bar{u}_1(\mu_1,\mu_2) = \sum_{x_1,x_2\in N,\ x_2<x_1} \mu_1(x_1)\cdot\mu_2(x_2) - \sum_{x_1,x_2\in N,\ x_1<x_2} \mu_1(x_1)\cdot\mu_2(x_2).$$

Початкова гра є грою з нульовою сумою без ціни:

$$v_1 = \sup_{x_1}\inf_{x_2} u_1 = -1 < +1 = \inf_{x_2}\sup_{x_1} u_1 = v_2 .$$

Але виявляється, що і використання змішаних стратегій не збільшує гарантованого виграшу гравців.

Зафіксуємо μ_1, тоді для $\forall\varepsilon > 0$ знайдеться ціле n_ε таке, що

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{+\infty} \mu_1(n) < \varepsilon .$$

Розглянемо чисту стратегію другого гравця $x_2 = n_\varepsilon$:

$$\bar{u}_1\left(\mu_1,\delta_{x_2}\right) = -\sum_{n<n_\varepsilon}\mu_1(n) + \sum_{n>n_\varepsilon}\mu_1(n) < -(1-\varepsilon)+\varepsilon = -1+2\varepsilon ,$$

звідки: $\bar{v}_1 = \inf_{\mu_2}\bar{u}_1(\mu_1,\mu_2) = \inf_{x_2}\bar{u}_1\left(\mu_1,\delta_{x_2}\right) = -1$. У силу симетрії гри $\bar{v}_2 = 1$.

Із прикладу бачимо, що складність цієї задачі проявляється навіть у випадку, коли множини стратегій є опуклими й компактними.

Контрольні завдання до § 4

1. Знайти змішані рівноваги Неша для $n = 2$:

1.1

X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	2, 1	1, 2
b_1	1, 2	1, 1

1.2

X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	2, 1	1, 2
b_1	1, 2	2, 1

1.3

X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	3, 3	2, 2
b_1	2, 2	2, 3

2. Знайти змішані рівноваги для таких ігрових моделей:

2.1

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 0	1, 1	2, 1
b_1	1, 5	0, 5	1, 4
c_1	5, 1	1, 2	2, 2

2.2

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	3, 2	3, 3
b_1	2, 2	3, 3	1, 3
c_1	3, 1	2, 4	4, 2

2.3

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 4	1, 3	3, 4
b_1	2, 5	3, 3	4, 3
c_1	1, 1	4, 2	4, 2