§ 3. Поведінка гравців в умовах мінімальної інформованості

Кажуть, що гра відбувається в умовах *мінімальної інформованості*, якщо гравці знають лише свої функції виграшу, але на відміну від умов повної неінформованості гравців, гра може відбуватися необмежену кількість разів і гравці можуть разом спостерігати її наслідки.

Проаналізуємо мотивацію концепції рівноваги Неша із "філософського" погляду. Можливі два "крайніх" сценарії.

1. Із "нормативного" погляду покладемо, що гравці спільно обговорюють вибір сценарію до того часу, поки не домовляться до "необов'язкової" домовленості. Далі вони розходяться й обмін інформацією припиняється. Після цього кожен гравець таємно вибирає свою "справжню" стратегію, не знаючи дійсних стратегічних виборів останніх. Кожен гравець може бути вірним досягнутій домовленості, а може й відступити від неї. Тоді і лише тоді, коли узгоджена ситуація є рівновагою Неша, отримуємо стабільну домовленість.

2. З "описового" погляду ми шукаємо "стійкі" ситуації "короткозорих" процедур "намацування", у яких кожен гравець притримується оптимальної стратегії за умови (яка постійно порушується), що останні не змінюють своїх стратегій. Коли ця "процедура намацування Курно" (див. нижче) збігається, отримуємо рівновагу Неша.

Перший сценарій ("стратегічний") передбачає повну інформованість гравців (кожен знає всі цільові функції) і актуальну можливість знаходження нешівських рівноваг; другий сценарій ("тактичний") реалізується в умовах мінімальної інформованості гравців (кожен знає лише свою цільову функцію, контакти гравців зводяться до спільного спостереження стратегій) і, не завжди приводить до нешівської рівноваги. Розглянемо другий сценарій детальніше.

Процедура Курно. Розглянемо класичний приклад.

Приклад 5.3.1 ("Дуаполія Курно з призначенням випусків"). Два гравці поставляють на ринок один і той самий товар в об'ємах x_i, $i = 1, 2$, за ціною $p(x_1 + x_2) = 1 - (x_1 + x_2)$. Максимальні виробничі можливості кожного гравця дорівнюють $1/2$. Розглядаються два варіанти:

- ✓ постійні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x$ на виробництво x одиниць продукції);
- ✓ спадаючі витрати (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2$).

Для випадку а) маємо гру в нормальній формі:

$$\left\langle X_i = \left[0, \tfrac{1}{2}\right],\ \ u_i(x) = x_i\,(1 - x_1 - x_2) - \tfrac{1}{2}x_i;\ i = 1, 2 \right\rangle.$$

Оскільки множини стратегій компактні, функції виграшу диференційовані й увігнуті, отримуємо оптимальні відповіді i-го гравця на фіксовані стратегії j-го з розв'язку системи:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,,\ i = 1, 2\,.$$

Маємо: $R_i = \left\{ (x_i, x_j) \middle| x_i = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ 0 \le x_j \le \frac{1}{2} \right\}$.

Єдина NE–ситуація знаходиться як перетин множин R_i (прямих R_i на рис. 5.3.1), тобто: $NE = R_1 \cap R_2 = \{(1/6, 1/6)\}$.

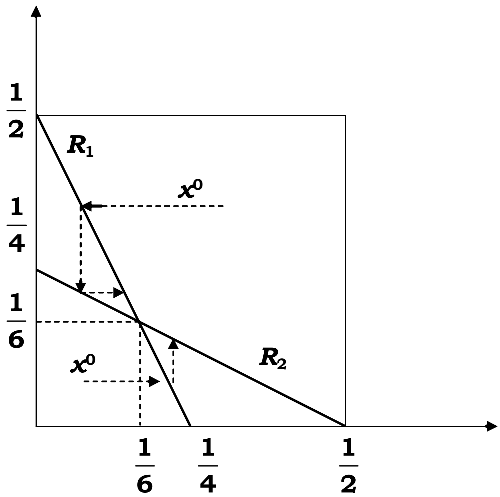

Рис. 5.3.1

Процедура намацування Курно починається з довільної точки $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, $0 \le x_i^0 \le \frac{1}{2}$, далі кожен гравець послідовно використовує свою оптимальну відповідь на поточну стратегію партнера:

$$\begin{array}{l} \left(x_1^0, x_2^0\right) \to \left(x_1^1, x_2^0\right) = \left(\alpha\left(x_2^0\right), x_2^0\right) \in R_1 \to \\ \left(x_1^1, x_2^1\right) = \left(x_1^1, \alpha\left(x_1^1\right)\right) \in R_2 \to \ldots \to \end{array} \to \left(x_1^t, x_2^{t-1}\right) \in R_1 \to \left(x_1^t, x_2^1\right) \in R_2\,.$$

На рис. 5.3.1 вказано дві такі послідовності. Легко переконатись, що для будь-якої початкової позиції x^0 з квадрата $[0,1/2] \times [0,1/2]$ процедура намацування Курно збігається (зі швидкістю геометричної прогресії) до NE–ситуації $(1/6,\ 1/6)$. У цьому випадку NE–ситуація $(1/6,\ 1/6)$ є стійкою.

Для випадку б) маємо таку гру в нормальній формі:

$$\left\langle X_i = \left[0,\ \tfrac{1}{2}\right],\ \ u_i(x) = x_i(1 - x_1 - x_2) - (\tfrac{1}{2}x_i - \tfrac{3}{4}x_i^2) \right\rangle.$$

При знаходженні оптимальних відповідей гравців на фіксовані стратегії супротивника, врахувавши крайові оптимуми, маємо (рис. 5.3.2):

$$R_i = \left\{(x_i, x_j) \middle| x_i = \beta\left(x_j\right),\ 0 \le x_j \le 1/2\right\},\ \beta\left(x\right) = \begin{cases} \tfrac{1}{2},\ 0 \le x \le \tfrac{1}{4}, \\ 1 - 2x,\ \tfrac{1}{4} \le x \le \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

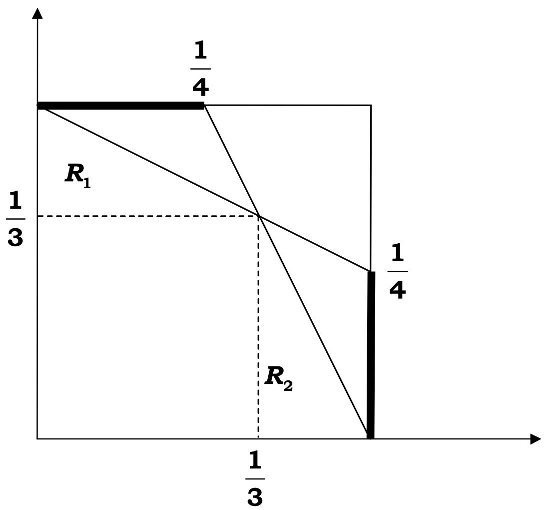

Рис. 5.3.2

Одержимо три *NE*–ситуації: $NE = \{\ (1/3,\ 1/3), (0{,}5,\ 0), (0,\ 0{,}5)\ \}$.

Починаючи з будь-якої початкової позиції $x^0 \ne (1/3,\ 1/3)$, процедура намацування Курно за скінченну кількість кроків збігається до $(0{,}5,\ 0)$ або до $(0,\ 0{,}5)$. Це залишається справедливим, навіть, якщо точка x^0 знаходиться як завгодно близько до точки $(1/3,\ 1/3)$, але не збігається з нею. Отже, *NE*–ситуацію $(1/3,\ 1/3)$ логічно назвати нестійкою, а $(0{,}5,\ 0)$, $(0,\ 0{,}5)$ – стійкими (локально).

Можна дати різні визначення процедури намацування Курно для ігор n осіб: гравці можуть змінювати свої стратегії одночасно або послідовно (порядок має значення). Відповідні поняття збігаються для $n = 2$ і не збігаються для $n \ge 3$.

Нехай кожен гравець має єдину стратегію оптимальної відповіді $r_i\left(x_{N\setminus i}\right)\in R_i$ на стратегії інших гравців $x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}$. Із будь-якою ситуацією $x^0\in X_N$ пов'язана *процедура одночасного намацування Курно*, що будує послідовність $x^0, x^1, \ldots, x^t, \ldots$ з X_N таку, що $x_i^t = r_i\left(x_{N\setminus i}^{t-1}\right)$, $i\in N$, $t=1,2,\ldots$.

Стійкі, локально стійкі та нестійкі рівноваги Неша

Визначення 5.3.1. Рівновага Неша x^* *стійка*, якщо для $\forall\, x^0\in X_N$, процедура намацування Курно, що починається з x^0, збігається до x^*.

Зазначимо, що стійка *NE*–ситуація обов'язково є єдиною рівновагою Неша у грі, оскільки, якщо x^0 є рівновагою Неша (у визначенні x^0 може будь-якою, зокрема, *NE*–ситуацією), то процедура намацування Курно приводить до стаціонарної послідовності.

Для заданого порядку гравців $N=\{1,2,\ldots,n\}$ процедурою $\{1,2,\ldots,n\}$ – *послідовного намацування Курно*, що починається з x^0, називається послідовність $\left\{x^t\right\}$, де $x_i^t = r_i\left(x_1^t,\ldots,x_{i-1}^t,x_{i+1}^{t-1},\ldots,x_n^{t-1}\right)$, $i\in N$, $t=1,2,\ldots$.

Визначення 5.3.2. NE–ситуація $x^*\in\{1,2,\ldots,n\}$ – стійкою, якщо для $\forall\, x^0$ процедура $\{1,2,\ldots,n\}$ – послідовного намацування Курно, що починається у x^0, збігається до x^*.

Приклад 5.3.2 (табл. 5.3.1). Почнемо з ситуації $x^0=(a_1,a_2)$. Перший гравець оптимізує свій виграш при фіксованій стратегії другого гравця, для чого з a_1 переходить на b_1. Далі другий гравець оптимізує свій виграш, переходячи на b_2 або c_2 (у даній грі не гарантується єдиність оптимізуючої стратегії). Якщо буде вибрана стратегія b_2, то процедура зупиниться, оскільки з ситуації (b_1,b_2) перший гравець свій виграш покращити вже не може. Якщо ж буде вибрана стратегія c_2, то матимемо: $(b_1,c_2)\to(c_1,c_2)\to(c_1,a_2)\to(b_1,a_2)\to(b_1,b_2)$ або (b_1,c_2).

Таблиця 5.3.1

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 3	2, 4	3, 3
b_1	4, 2	3, 3	2, 3
c_1	3, 4	2, 2	4, 3

Отже, у випадку неоднозначності вибору оптимізуючих стратегій хоча б одним гравцем процедура може зупинитись навіть при єдиній *NE*–ситуації (як у даному прикладі: (b_1,b_2) є єдиною нешівською рівновагою). В умовах визначень 5.3.1, 5.3.2 подібного зациклення бути не може (вибір оптимізуючих стратегій однозначний).

Приклад 5.3.3 (табл. 5.3.2). Почнемо з $x^0=(b_1,b_2)$. Процедура (1, 2) – генерує: $(b_1,b_2)\rightarrow(c_1,b_2)\rightarrow(c_1,c_2)\in NE$. Процедура (2, 1) – дає послідовність ситуацій: $(b_1,b_2)\rightarrow(b_1,a_2)\rightarrow(a_1,a_2)\in NE$. Як бачимо від порядку фіксації стратегій залежить побудова тієї чи іншої *NE*–ситуації.

Таблиця 5.3.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 2	3, 1	0, 0
b_1	1, 3	2, 2	1, 1
c_1	0, 0	4, 1	2, 2

У прикладі 5.3.4 (табл. 5.3.3). нешівською рівновагою є єдина ситуація (c_1,c_2). Якщо x^0 належить декартовому квадрату множин стратегій $\{a_1,b_1\}\times\{a_2,b_2\}$, то процедура намацування Курно зациклюється незалежно від порядку фіксації стратегій. До (c_1,c_2) може привести лише (2, 1) – послідовне намацування Курно з точок (c_1,a_2) і (c_1,b_2).

Таблиця 5.3.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2	2,3	1,2
b_1	1,3	3,1	2,2
c_1	1,1	2,1	5,5

Резюме. Навіть у скінченній грі в умовах мінімальної інформованості раціональна поведінка гравців (вибір оптимальної стратегії на оптимальну стратегію супротивника) може не привести до розв'язання конфліктної ситуації. Тепер стає зрозумілою природа "зациклення" у багатьох життєвих ситуаціях (політичних, соціальних, економічних, сімейних) – адже в більшості випадків ми застосовуємо саме процедуру намацування Курно в умовах мінімальної інформації! В умовах незнання (або небажання знати!) цілей партнерів. І що залишається у цих умовах? На слово – слово, на дію – дію. Одним словом, "око – за око", "зуб – за зуб"! І внаслідок цього в ситуацію (c_1, c_2) із виграшами (5, 5) (чи (500, 500) – не має значення) взагалі можна ніколи не потрапити.

Маленький імовірнісний аналіз. Із восьми ситуацій (крім (c_1, c_2)) можна піти двома шляхами – по стовпчиках або по рядках. Маємо 16 можливостей, із яких лише відмічених чотири ведуть до цілі. Отже, у даному прикладі з імовірністю $1/4$ (якщо випадково не почали з (c_1, c_2) з імовірністю вже $1/9$) можна прийти до цілі.

Нескладно побудувати приклад із десятком стратегій у кожного гравця, у якому ймовірність розв'язати конфлікт із користю для кожного дуже й дуже мала. А якщо $n \approx 10$, то і взагалі мета практично (й теоретично) недосяжна. Якщо ж домовитись про вибір (необов'язковий!) ситуації (c_1, c_2), то навіть не "дуже розумним" супротивникам не захочеться від неї відхилятись.

Умови стійкості. Достатні умови стійкості *NE*–ситуацій складно отримати і вони виявляються вельми обмежувальними. Якщо послабити поняття стійкості з "глобальної" на "локальну", то з'являється можливість (для $n = 2$) майже повністю описати локально стійкі *NE*–ситуації.

Теорема 5.3.1. Нехай множини X_1, X_2 одновимірні, x^* – рівновага Неша у грі $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$, причому виконуються умови: x_i^* – внутрішня точка X_i, $i = 1, 2$; функції u_i двічі неперервно-диференційовані в околі x^*; частинні похідні $\partial^2 u_i(x^*)/\partial x_i^2 < 0$. Тоді, якщо

$$\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right| < \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right|, \text{ то } x^* \text{ – локально стійка,} \quad (5.3.1)$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right| > \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right|, \text{ то } x^* \text{ – не є локально стійкою} \quad (5.3.2)$$

(усі похідні взято у точці x^*).

З умови теореми випливає, що множини оптимальних відповідей гравців R_i є двома неперервно-диференційованими кривими, що перетинаються у точці x^*. У нерівностях (5.3.1), (5.3.2) просто відбувається порівняння модулів нахилу дотичних до кривих R_1 і R_2 у точці

x^*. Покладемо $\alpha_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_1} \Big/ \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_2}$. Тоді умови (5.3.1), (5.3.2) можна переписати у вигляді:

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| \Rightarrow x^* \text{ – локально стійка,}$$

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| \Rightarrow x^* \text{ – не є локально стійкою.}$$

Коротко розглянемо "процедуру намацування Курно у неперервному часі". Нехай $G = (X_i, u_i; i \in N)$ – гра n осіб, у якій кожна множина стратегій одновимірна, функції виграшів u_i двічі неперервно-диференційовані. Нехай ϕ – дійснозначна функція, визначена на E^1, причому $\phi(0) = 0$, $\phi'(t) > 0$, для $t \in E^1$. Тоді "процедуру намацування Курно у неперервному часі" задає така система диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \phi\left(r_i\left(x_{N \setminus i}\right) - x_i\right), i \in N, \tag{5.3.3}$$

де $r_i\left(x_{N\setminus i}\right)$ – оптимальна відповідь *i*-го гравця на вектор стратегій $x_{N\setminus i}$ інших гравців. Якщо x^* є *NE*–стратегією, то $x_i^* = r_i\left(x_{N\setminus i}^*\right)$, $\phi(0) = 0$, і точка x^* є нерухомою (стаціонарною) точкою системи (5.3.3). Можна показати, що локальна стійкість ситуації x^* уже є і глобальною.

Контрольні завдання до § 3

1. Узагальнемо приклад, наведений на стор. 210, шляхом введення функцій витрат c_i. Нехай у кожного гравця витрати на випуск одиниці продукції зростають або не "дуже сильно" спадають в такому сенсі:

$$c_i''(y) > 2p'(y) + yp''(y),\ y \ge 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Покажіть, що в грі $u_i(x) = p \cdot x_i - c_i(x_i)$, $X_i = [0, \infty)$, $i = \overline{1,n}$, існує хоча б одна рівновага Неша.

2. Розглянемо гру "продаж автомобілів" (Кейнс, 1979). Кожен агент бере x_i, $i = \overline{1,n}$, автомобілів для продажу. Нехай в одиницю часу у кожного агента однакова кількість відвідувачів, загальний попит фіксований і рівний a, p_i – дохід з одного проданого автомобіля, c_i – витрати на зберігання в одиницю часу одного проданого автомобіля. Маємо гру $u_i = a \cdot p_i \cdot x_i / \overline{x} - c_i \cdot x_i$, $X_i = [0, \infty)$, $i = \overline{1,n}$, $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $0/0 = 1$.

Покажіть, що гра має дві рівноваги Неша. Чи будуть вони парето-оптимальними?

4. Проаналізувати рівноваги Неша на стійкість

4.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 0	1, 1	2, 1
b_1	1, 5	0, 5	1, 4
c_1	5, 1	1, 2	2, 2

4.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	3, 2	3, 3
b_1	2, 2	3, 3	1, 3
c_1	3, 1	2, 4	4, 2

4.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 4	1, 3	3, 4
b_1	2, 5	3, 3	4, 3
c_1	1, 1	4, 2	4, 2

4.4

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 1	1, 3	3, 2
b_1	1, 3	2, 2	3, 1
c_1	3, 2	2, 3	3, 3

~~§ 4. Змішані стратегії~~

~~Почнемо з класичного прикладу 5.4.1 ("Гра де Монмора").~~

~~У кінці XVIII ст. французький математик Рене де Монмор розглянув наступну ситуацію. Для того, щоб зробити подарунок своєму синові, батько пропонує: "Я візьму золоту монету у праву (*П*) або ліву (*Л*) руку, а ти назвеш одну з них. Якщо монета в мене у правій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш одну золоту монету. Якщо ж монета у мене у лівій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш дві монети; інакше ти не отримаєш нічого".~~

~~Матрицю виграшів сина у грі де Монмора наведено у табл. 5.4.1. Де Монмор запитує, як можна оцінити для сина цей подарунок, беручи до уваги, що "якщо у цій грі гравці однаково проникливі й спостережливі, то немає можливості виробляти правило поведінки" (не існує оптимальної стратегії).~~

~~Таблиця 5.4.1~~

~~$X_1 \backslash X_2$~~	~~*Л*~~	~~*П*~~
~~*Л*~~	~~2~~	~~0~~
~~*П*~~	~~0~~	~~1~~