§ 2. Повна та часткова інформованість гравців

Розглянемо випадок "*повної інформованості*" гравців, коли кожен із них знає всі цільові функції – свою та суперників.

Складна поведінка гравців. При некооперативній поведінці в умовах повної інформованості породжуються взаємні "стратегічні очікування", які полягають у тому, що i-й гравець очікує, що всі інші гравці також будуть виключати свої доміновані стратегії. Унаслідок цього у деяких гравців можуть виникнути нові доміновані стратегії і т. д.

Розглянемо приклад 5.2.1 (табл. 5.2.1). Маємо: $a_1 \succ c_1$, a_1 і b_1 незрівнянні. Усі стратегії другого гравця незрівнянні між собою. Отже, рівноваги в домінуючих стратегіях не існує. Але, якщо другий гравець знає цільову функцію першого, то він може "стратегічно сподіватись" на те, що перший відкине свою доміновану стратегію c_1 (простіше кажучи, другий може сподіватись на "розумність" першого) й розглядати вже не початкову задачу, а "скорочену", у якій $X_1^1 = \{a_1, b_1\}$. У новій задачі стратегія a_2 буде домінованою (і b_2, і c_2). Отже, $X_2^1 = \{b_2, c_2\}$. У свою чергу, на множинах стратегій X_1^1, X_2^1 стратегія a_1 домінується стратегією b_1, а на множинах $X_1^2 = \{b_1\}$, X_2^1 домінованою буде стратегія b_2! Отже, раціональна поведінка кожного гравця разом із раціональною оцінкою поведінки супротивника приводить до однозначного результату: перший вибирає стратегію b_1, другий – c_2.

Таблиця 5.2.1

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	1, 2	2, 1
b_1	1, 1	2, 1	2, 2
c_1	3, 3	1, 2	1, 2

Ця ситуація (b_1, c_2), отримана внаслідок відкидання кожним гравцем своїх домінованих стратегій, називається складною рівновагою. Звернемо увагу на два аспекти. По-перше, складну рівновагу було отримано не внаслідок послідовної "тактичної" гри (перший гравець відкидає свої доміновані стратегії, потім – другий), а внаслідок "стратегічного" планування (якщо я відкину свої доміновані стратегії, а другий гравець це врахує та відкине свої, то прийдемо до (b_1, c_2)). По-друге, отримана ситуація не є ефективною (ситуація (c_1, a_2) краща для обох гравців!).

Визначення 5.2.1. Для гри $G = (X_i, u_i, i \in N)$ послідовне виключення домінованих стратегій означає побудову послідовностей $X_i = X_i^0 \supset X_i^1 \supset \ldots \supset X_i^t \supset X_i^{t+1} \supset \ldots, \forall i \in N$, $X_i^{t+1} = ND(u_i, X_j^t, j \in N)$.

Розглянемо, до чого може привести послідовне виключення домінованих стратегій.

Приклад 5.2.2 (табл. 5.2.2). Виключаючи доміновані стратегії c_1 і a_2 (у будь-якій послідовності), отримаємо $X_1^1 = \{a_1, b_1\}$, $X_2^1 = \{b_2, c_2\}$. Подальше виключення стратегій неможливе, оскільки a_1 і b_1, b_2 і c_2 незрівнянні. Що робити далі? Можна задовольнитись фактом скорочення кількості стратегій у кожного гравця й розглядати нову гру з множинами стратегій X_1^1, X_2^1 (а в реальних ситуаціях скорочення може бути значним – наприклад, від гри 100×100 до 2×2), а можна повернутись до початкової гри. У конкретних ситуаціях можливі обидва шляхи, але звернемо увагу, що при "скороченні" початкової гри було втрачено ситуацію (c_1, a_2), що домінує за Парето всі ситуації, що залишились.

Таблиця 5.2.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	1, 2	2, 1
b_1	1, 1	2, 1	1, 2
c_1	3, 3	1, 3	1, 4

Приклад 5.2.3 (табл. 5.2.3). Маємо: $a_1 \succ b_1$, $a_1 \succ c_1$, $b_2 \succ a_2$ і виключення домінованих стратегій у довільній послідовності приводить до двох ситуацій – (a_1, b_2), (a_1, c_2), рівноцінних із погляду кожного гравця. У цьому випадку логічно назвати складною рівновагою обидві ситуації. І знову відмітимо, що раціональна (але ізольована!) поведінка кожного гравця призводить до втрати ситуації (c_1, a_2), кращої для обох.

Таблиця 5.2.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	2, 3	2, 3
b_1	3, 3	1, 5	2, 4
c_1	3, 4	2, 4	1, 5

Визначення 5.2.2. Гра G називається *розв'язною за домінуванням*, якщо існує натуральне t таке, що для всіх i функція виграшу u_i не залежить від x_i на X_N^t: $\forall x_i, y_i \in X_i^t$, $\forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}^t$ $u_i\left(x_i, x_{N\backslash i}\right) = u_i\left(y_i, x_{N\backslash i}\right)$. Множина X_N^t при цьому називається множиною складних рівноваг і буде позначатись SE.

Розв'язність гри за домінуванням означає, що після скінченого числа раундів виключення всі стратегії кожного гравця стануть для нього еквівалентними (для нього, але, взагалі кажучи, не для інших – див. приклад 5.1.6, у якому всі ситуації є складними рівновагами, але, якщо для першого гравця байдуже, яку стратегію обрати – $Д_1$ або H_1, то для другого це – яку стратегію обере перший – зовсім не байдуже!). Якщо функції виграшу для всіх гравців однозначні на X_N, то множина складних рівноваг (якщо вона існує) складається з одного елемента. Отже, у таких розв'язних за домінуванням іграх, складна поведінка ізольованих гравців є детермінованою. Складна рівновага узагальнює рівновагу в домінуючих стратегіях у такому сенсі.

Лема 5.2.1. Якщо у грі G множина рівноваг у домінуючих стратегіях D непорожня, то гра є розв'язною за домінуванням і D є множиною складних рівноваг.

Доведення випливає з леми 5.1.3. Якщо тільки в одного гравця i є домінуюча стратегія, то, очевидно, $D_i\left(u_i\right)$ є i-ю компонентою складної рівноваги, якщо остання існує.

Для гри $G = \left(u_i, X_i, i \in N\right)$ невідомі достатні умови розв'язності за домінуванням. Такі умови можна отримати, якщо розглянути інші представлення гри – так звану розгорнуту форму [6].

Можна стверджувати, що ми, свідомо чи підсвідомо, нерідко застосовуємо "складну" поведінку (діємо раціонально в припущенні, що і партнери також поводяться раціонально). При перевагах складної поведінки, потрібно пам'ятати, що така раціональність нерідко є нерозумною (з погляду досягнення бажаного результату). На цю тему ще один класичний приклад (Форкуарсон, 1969).

Журі з трьох членів повинно вибрати одного з трьох кандидатів $\{a, b, c\}$. Переможець обирається за правилом більшості, якщо думки членів журі розходяться, то вибирається кандидат, за якого проголосував "голова журі" (нехай – це виборець під номером 1). Отже, якщо гравці висунули кандидатури (x_1, x_2, x_3), $x_i \in X_i = \{a, b, c\}$, $i = 1, 2, 3$, то вибори переможця відбуваються за правилом:

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2, \text{ якщо } x_2 = x_3, \\ x_1, \text{ якщо } x_2 \neq x_3. \end{cases}$$

Покладемо, що функції виграшу гравців мають таку структуру: $u_1(a) > u_1(b) > u_1(c)$, $u_2(b) > u_2(c) > u_2(a)$, $u_3(c) > u_3(a) > u_3(b)$ ("цикл Кондорсе"). Розглянемо стратегії a і b першого гравця на предмет домінування. Для цього потрібно розглянути ситуації і для всіх можливих (але однакових) виборів другого та третього гравця. Усього потрібно розглянути $3 \times 3 = 9$ ситуацій. Маємо:

$$u_1(\pi(a,a,a)) = u_1(a) = u_1(\pi(b,a,a)) = u_1(a),$$

$$u_1(\pi(a,a,b)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,a,b)) = u_1(b),$$

$$u_1(\pi(a,a,c)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,a,c)) = u_1(b),$$

$$u_1(\pi(a,b,a)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,b,a)) = u_1(b),$$

$$u_1(\pi(a,b,b)) = u_1(b) = u_1(\pi(b,b,b)) = u_1(b),$$

$$u_1(\pi(a,b,c)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,b,c)) = u_1(b),$$

$$u_1(\pi(a,c,a)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,c,a)) = u_1(b),$$

$$u_1(\pi(a,c,b)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,c,b)) = u_1(b),$$

$$u_1(\pi(a,c,c)) = u_1(c) = u_1(\pi(b,c,c)) = u_1(c).$$

Отже, за визначенням домінування $a \succ b$ для першого гравця. Аналогічно $a \succ c$ і $X_1^1 = \{a\}$. Для другого й третього гравця маємо (перевірте!): $X_2^1 = \{b,c\}$, $X_3^1 = \{c,a\}$. Порівняємо стратегії b і c для другого гравця на множинах стратегій X_i^1, $i = 1, 2, 3$. Маємо:

$$u_2(a,b,c) = u_2(a) < u_2(a,c,c) = u_2(c),$$

$$u_2(a,b,a) = u_2(a) = u_2(a,c,a) = u_2(a)$$

(стратегія першого фіксована, третій може вибрати або c або a). Отже, $X_2^2 = \{c\}$. Аналогічно, $X_3^2 = \{c\}$ і, таким чином, на множині $X_1^2 = X_1^1 = \{a\}$, $X_2^2 = X_3^2 = \{c\}$ за правилом більшості буде вибрано c –

найгірший вибір для першого гравця – голови журі! Сила "начальника" в розв'язуванні спірних ситуацій виявляється його слабкістю у грі з розумними (навіть, ізольованими!) підлеглими. Згадайте цей життєвий приклад, перед тим, як висуватись у начальники!

Розглянемо випадок $n = 2$.

Лема 5.2.2. Нехай $G = \left(X_1, X_2, u_1\right)$ – гра двох осіб із нульовою сумою та скінченними множинами стратегій. Тоді складна рівновага є сідловою точкою функції u_1. Отже, розв'язки за домінуванням гри двох осіб із нульовою сумою мають ціну. Доведення у [6].

У випадку, коли множини стратегій X_i нескінченні при всіх $i \in N$ (хоча й компактні), досить важко формально визначити складну поведінку. Однією з причин є те, що у процесі виключення домінованих стратегій компактність множини стратегій може порушуватись. Далі, збіжність послідовностей X_i^t, $i \in N$, до підмножини еквівалентних стратегій може відбуватися лише при нескінченній кількості гравців. Ці складнощі демонструються прикладом ("Поділ долара при інфляції" – Дутта, Дживерс, 1981).

Гравці ($i \in N = \left\{\overline{1,n}\right\}$) ділять долар за таким правилом:

Крок 1. Гравець 1 пропонує поділ $x^1 = \left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right)$, де $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 = 1$, $x_i^1 \ge 0$, $i \in N$. Гравці 2, ..., n можуть прийняти цей поділ або відхилити його. Якщо всі гравці погоджуються на x^1, то він приймається, інакше (хоча б один гравець 2, ..., n не погоджується) відбувається перехід на крок 2.

Крок 2. Гравець 1 переставляється в кінець черги, а свій поділ x^2 пропонує гравець 2. Якщо інші гравці (3, ..., n, 1) не приймають поділ x^2, то процедура повторюється (вже з гравцем 3).

Нехай долар знецінюється за кожен крок переговорів із коефіцієнтом τ, $0 < \tau < 1$. Так, у другому періоді ділиться вже $\delta = 1 - \tau$ (тобто, другий гравець пропонує свій поділ величини δ, $0 < \delta < 1$), у третьому δ^2 і т. д. Зрозуміло, що якщо процедура буде продовжуватись до нескінченності, то доведеться ділити нуль. Отже, з одного боку, кожному гравцеві вигідно поділити гроші якомога швидше (поки вони не знецінились), з іншого – не можна погоджуватись на "несправедливий" поділ. Нехай такий "справедливий" поділ x^* існує (його вигідно прийняти кожному гравцеві). Наведемо міркування, що базується на стратегічних очікуваннях кожного гравця, аналогічних міркуваннях при знаходженні складної рівноваги у скінченому випадку.

Нехай на першому кроці гравець 1 пропонує $x^1 = \left(x_1^1, ..., x_n^1\right)$. Він знає, що гравець i ($i \neq 1$), розраховує на наступному кроці (якщо він відбудеться) отримати поділ $x^\delta = \left(\delta x_1^*, \delta x_2^*, ..., \delta x_n^*\right)$ (другий гравець перемістився на перше місце, перший на останнє). Отже, для того, щоб поділ x^1 був прийнятий гравцями 2, ..., n необхідно, щоб

$$x_2^1 \geq \delta x_1^*,\ x_3^1 \geq \delta x_2^*, ..., x_n^* \geq \delta x_{n-1}^*.$$

Покладаючи, що пропозиція x^* буде прийнятою ($x^1 = x^*$), маємо:

$$x_2^* \geq \delta x_1^*,\ x_3^* \geq \delta x_2^*, ..., x_n^1 \geq \delta x_{n-1}^*. \qquad (5.2.1)$$

Яка доля при цьому залишається першому гравцю? Очевидно, $x_1^1 = 1 - \left(x_2^* + ... + x_n^*\right) \leq 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^*\right)$. Отже, він не запропонує поділ $x_1^1 < 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^*\right)$. Тобто, $x_1^* \geq 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^*\right) =$

$$= 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^* + \delta x_n^* - \delta x_n^*\right) = 1 - \delta \sum_{i=1}^{n} x_i^* + \delta x_n^* = \left(1 - \delta\right) + \delta x_n^* \qquad (5.2.2)$$

Із (5.2.1), (5.2.2) маємо: $x_i^* \geq \delta^{i-1} x_1^* \geq \left(1 - \delta\right)\delta^{i-1} + \delta^i x_n^* \geq \left(1 - \delta\right)\delta^{i-1} + \delta^n x_n^*$,

Звідки:

$$x_i^* \geq \left(1 - \delta\right)\delta^{i-1} / (1 - \delta^n) = \delta^{i-1} / (1 + \delta + ... + \delta^{n-1}),\ i = \overline{1,n}. \qquad (5.2.3)$$

Оскільки величини у правій частині нерівностей у сумі дають 1, то всі нерівності (5.2.3) – є рівностями. Отже, компоненти складної рівноваги $x_i^* = \delta^{i-1} / (1 + \delta + ... + \delta^{n-1})$, $i = \overline{1,n}$. Зазначимо, що коли δ прямує до 1 ($\tau \to 0$, інфляція незначна), граничний поділ стає справедливим ($x_i^* = 1/n$, $i = \overline{1,n}$), хоча вже "стратегічна" аргументація при $\delta = 1$ стає некоректною. Якщо гравці рівноправні (початковий порядок на їхній множині задається, наприклад, випадково), то пропонування у поділі на i-му кроці i-м гравцем своєї долі $x_i^i > 1/n$ приведе або до "зациклення" або прийняття "несправедливого" поділу (краще мати щось у даний момент, ніж померти від голоду в очікуванні справедливості). Тому потрібні процедури, що "автоматично" забезпечують "справедливий" поділ. У цьому випадку задача зводиться вже не до розумного вибору стратегій, а до розумного вибору процедур розумного вибору стратегій. Згадаймо, як відбуваються дипломатичні переговори. Основні зусилля тут зводяться до вибору процедури ведення переговорів, а вибір стратегій є другорядним і приймається сторонами автоматично (звичайно, сторони можуть не погодитись із результатом і все починається з початку. У цьому випадку передбачається наявність "апеляційного суду", "конституційного суду", рішення якого є остаточним).

Наведемо характерний приклад, який називається "Діли – вибирай". Два гравці ділять одиницю нескінченно подільного продукту (золотий пісок, яблуко і т. п.). Гравці рівноправні, кожен претендує на $x_i = 0,5$, $i = 1,\ 2$. Процедура поділу, у якій гравці почергово пропонують свої варіанти, може продовжуватись до нескінченності. Процедура "Діли – вибирай" закінчується за один крок! Усе дуже просто (автори впевнені, що читачі не раз цією процедурою користувались у житті) – один ділить, другий вибирає (того, хто ділить, можна визначити жеребом). Зрозуміло, що той, хто ділить, зацікавлений у тому, щоб одиницю поділити навпіл як можна точніше (інакше партнер забере собі більшу частину!). Як приклад, ще одна повчальна життєва історія. Коли відомого персонажа Вовочку запитали, чому він перейшов з "Снікерса" на "Баунті", той відповів: "Снікерс" точно навпіл дуже важко поділити, і більшу частину мені, як джентльмену, доводилось віддавати дамі" ("Баунті" містить дві ідентичні цукерки).

Узагальнення процедуру "Діли – вибирай" на випадок $n \ge 3$ здійснено відомим математиком Штейнгаузом. Якимось чином установлюється черга гравців і перший указує свою частку x_1, $0 \le x_1 \le 1$. Якщо другий гравець із нею не погоджується, він повинен показати свою частку x_2, $0 \le x_2 < x_1$, третьому гравцю і т. д. Якщо другий гравець згоден з x_1, то її розглядає третій гравець і т. д. Оскільки, кожен з гравців буде пропускати долю інших не більшу за $1/n$ і затримувати більшу за $1/n$, то оптимальна поведінка кожного є відрізати собі рівно $1/n$.

Ще один приклад (пірати ділять зливки золота), який показує, що відносно демократична процедура, може привести до не дуже справедливого результату.

Нехай маємо 100 одиниць продукту (одна одиниця – уже неподільна). Гравці (пірати) вишикувані в чергу (капітан, помічник капітана, юнга) і послідовно пропонують свій варіант поділу. Якщо поділ підтримується не менш ніж половиною команди (включаючи того, хто пропонує), він приймається. Інакше (більшість – проти), того, хто пропонує, вилучають із поділу (викидають за борт) і наступний за старшинством пропонує свій варіант поділу. Візьмемо реалістичне припущення, що кожен із піратів знає функції виграшу інших. А саме, кожен пірат із двох даних поділів вибирає той, у якому його частка більша. Загальна недовіра, що, як відомо, царювала серед піратів, дозволяє стверджувати, що вони будуть діяти ізольовано (некооперативно). А отже, задача зводиться до пошуку складної рівноваги. Коли $n = 2$, то всі зливки забирає собі старший пірат (він становить половину команди). При $n = 3$ поділ (як не дивно!) такий: $100 = 99 + 0 + 1$ (старший отримує 99 одиниць, молодший – 1, середній – 0). Чому молодший пірат погодиться з 1 і підтримає тим самим старшого? Тому, що інакше (молодший не погоджується, старшого усувають, залишається два пірати й усі 100 одиниць забирає собі середній) він отримує 0. А одиниця краща за 0. Парадоксальний результат! Але, якщо добре подумати, то саме такі результати на кожному кроці ми зустрічаємо у житті. "Краще щось, ніж нічого!", "Покладатися лише на себе!", – оптимальна (раціональна, розумна) ідеологія? Так, але не забуваймо – ізольованих гравців. Не змінюючи процедури поділу (нагадаймо: приймається варіант більшості, що цілком демократично), другий і третій гравець (помічники капітана) можуть домовитись відкинути стратегічно очікуваний варіант капітана $100 = 99 + 0 + 1$ заради, наприклад, поділу $100 = 0 + 50 + 50$. Залежно від ситуації на переговорах можуть розглядатись варіанти від $100 = 0 + 1 + 99$ (третій має тиск на другого – "інакше нічого не одержиш") до $100 = 0 + 98 + 2$ (тиск другого: "два краще за одиницю і яка тобі різниця, хто є твоїм начальником"). Погодьтесь, типові життєві ситуації. Настільки ж типові, як і можливість відмови третього від кооперації – "де гарантія, що після усунення першого, другий буде дотримуватись домовленості". ("Домовленість – домовленістю, але закон (правило більшості у даному випадку) є законом!").

Повернемось до нашої задачі. Сподіваємось, що вже всім вам зрозуміло (мається на увазі $n > 3$): $100 = 99 + 0 + 1 + 0$, $100 = 98 + 0 + 1 + 0 + 1$ і т. д. Якщо $n = 2p + 1$ або $n = 2p + 2$, то у поділі частка капітана дорівнює $(100 - p)$ зливків $(100 - p \geq 1)$. По одному злитку отримають p піратів, які мають номери тієї парності, що й капітан.

Рівновага за Нешем. Домінуюча стратегія, обережна та складна поведінка можуть бути визначеними гравцями незалежно один від одного. На противагу цьому рівновага за Нешем може бути зумовленою лише динамічним сценарієм, у якому стратегічні рішення, що приймаються у даний момент, залежать від попередніх сценаріїв гри або хоча б від початкової позиції. Таким чином, спілкування гравців стає неминучим. Вони повинні хоча б сумісно спостерігати ситуації гри.

Розглянемо приклад "особисті інтереси та суспільні потреби" [6]. Кожен із n учасників може працювати на "суспільство" ($x_i = 0$) або на себе ($x_i = 1$). Розглядається задача:

$$\begin{cases} u_i(x) = \lambda x_i + \sum_{j=1}^{n} (1 - x_j) \to \max, \\ x_i \in X_i = \{0,1\}, \ 1 < \lambda < n. \end{cases}$$

Параметр λ можна розглядати як продуктивність праці (у грошових одиницях) при роботі на себе ($x^1 = (1,\ldots,1)$, $u_i(x^1) = \lambda$), при роботі на суспільство продуктивність праці кожного одинична. Членів суспільства досить багато – із якою б продуктивністю λ гравці не працювали, деяке $n > \lambda$ (на себе можна працювати і "за десятьох", але ж $\lambda < 11$). Якщо всі працюють на суспільство ($x_i^0 = 0$, $i = \overline{1,n}$), то виграш кожного $u_i\left(x^0\right) = n > \lambda$. Отже, коли всі працюють на суспільство вигідно всім (і кожному). Але! Нехай на суспільство працюють усі, крім одного ($x_i = 0$, $x_k = 1$, $k \neq i \in N$). Маємо: $u_i = n - 1 < n$, $u_k = \lambda + n - 1 = n + (\lambda - 1) > n$.

Отже, ухилення одного від "суспільних" робіт вигідно йому (він має добавку $\Delta u_k = \lambda - 1$), останні ж від цього втрачають (кожен із них 1). Розглянемо протилежний випадок – усі крім одного працюють на себе ($x_i = 1$, $x_k = 0$, $k \neq i \in N$). Маємо: $u_i = \lambda + 1 > \lambda$, $u_k = 1 < \lambda$. Тобто, відхилення k-го гравця ("альтруїста") від праці "на себе" на працю "на суспільство" виявилось невигідним йому (він утрачає $\Delta u_k = \lambda - 1 > 0$). Відмітимо, що поява альтруїста привела до збільшення прибутку "індивідуалістів" (на 1). Але ж кожен намагається максимізувати свою цільову функцію – отже, відхилення будь-якого гравця від ситуації x^1 йому невигідне. Повернемось до моделі "Дилема в'язня" (приклад 5.1.4).

Від ситуації (M_1, M_2), однаково вигідної для обох (порівняно із ситуацією (A_1, A_2)), кожному гравцю вигідно відхилятись (замість 2 мати 3), за умови, що інший не змінює свою стратегію (див. табл. 5.2.4). Аналогічно від ситуацій (A_1, M_2), (M_1, A_2) вигідно відхилятись одному з них. І лише від ситуації (A_1, A_2) невигідно відхилятись кожному. Підкреслимо, саме кожному з них, а не обом (відхилення ж від (A_1, A_2) обох приводить у ситуацію (M_1, M_2)).

Таблиця 5.2.4

$X_1 \backslash X_2$	M_2	A_2
M_1	2,2	0,3
A_1	3,0	1,1

Подамо трохи іншу (соціальну) інтерпретацію цієї моделі. Нехай кожен із двох гравців має дві стратегії – підтримувати зміни у суспільстві (Π – "прогресивна", "порядна поведінка") або не підтримувати (K – "консервативна", стратегія "красти") (табл. 5.2.5).

Таблиця 5.2.5

X_1 \ X_2	$\boldsymbol{П_2}$	$\boldsymbol{К_2}$
$\boldsymbol{П_1}$	2,2	0,3
$\boldsymbol{К_1}$	3,0	1,1

Знову лише від ситуації (K_1, K_2) невигідно відхилятись будь-якому одному гравцеві, хоча в ситуації $(П_1, П_2)$ їхні виграші більші. Цю модель можна назвати дилемою між стабільністю ("нічого не міняти") і ефективністю (ситуація $(П_1, П_2)$ є Паретівською або ефективною). Розглянутій моделі можна дати й економічний зміст. Дві конкуруючі фірми можуть призначати "середню" ціну (*С*) або використовувати політику демпінгу (*Д*). То попередня таблиця виграшів теж ефективно описує модель ринку.

Розглянемо узагальнення попередніх моделей на випадок трьох гравців, у кожного з яких є дві стратегії – *С* і *Д* (інтерпретація за бажанням – "кримінальна", "соціально-політична", або "економічна"). Вектори виграшів мають вигляд: $u(C, C, C) = (2, 2, 2)$, $u(Д, C, C) = (3, 1, 1)$, $u(Д, Д, C) = (2, 2, 0)$, $u(Д, Д, Д) = (1, 1, 1)$.

В останніх чотирьох ситуаціях вектори виграшів обчислюються за симетрією (якщо два гравці вибирають середні ціни, то вони мають по 1 прибутку, третій гравець із демпінговою ціною – 3; якщо ж 2 гравці вибирають демпінгові ціни – їх виграш 2, третього з середньою ціною – 0).

Дослідимо вигідність відхилення від конкретної ситуації будь-якого (але одного!) гравця. Розглянемо ситуацію (*С, С, С*). Відхилення одного гравця приведе до ситуації, у якій два гравці вибирають *С*, а третій (який відхилився) – *Д*. У цьому випадку гравець, що відхилився, має додатковий виграш (3 замість 2), тобто йому вигідно відхилятись. Якщо у ситуації було 2*С* і 1*Д*, то відхилення гравця з *С* приведе до ситуації з 1*С* і 2*Д* і збільшення його виграшу з 1 до 2. Аналогічно, із ситуації з 2*Д* і 1*С* вигідно відхилитися хоча б одному гравцеві (а саме тому, хто *С* поміняв на *Д*). Від ситуації ж (*Д, Д, Д*) невигідно відхилятися будь-якому одному гравцеві (у цьому випадку він замість 1 отримає 0). Отже, ситуація (*Д, Д, Д*) – "рівноважна", хоча і неефективна (її сильно домінує ситуація (*С, С, С*) і строго домінують ситуації 2*С* і 1*Д*). Перейдемо до формалізації.

Визначення 5.2.3. Для гри $G=(X_i,u_i,i\in N)$ ситуація x^* називається *рівновагою за Нешем*, якщо:

$$u_i(x^*)\geq u_i(x_i,x^*_{N\setminus i}),\forall\, i\in N\,,\forall\, x_i\in X_i\,. \qquad (5.2.4)$$

Будемо позначати через *NE* (Nesh Equalibrity) множину рівноваг Неша. Як синоніми будемо використовувати терміни "рівновага Неша", "нешівська рівновага", "нешівська ситуація", "*NE*–ситуація". Для зручності будемо використовувати також позначення x^{NE} для рівноваг Неша. Стратегії, із яких утворюється x^{NE}, будемо аналогічно називати "нешівські стратегії", "*NE*–стратегії".

Отже, у рівновазі Неша x^* гравець *і* розглядає стратегії інших гравців $x^*_{N\setminus i}$ як екзогенно задані ("зовнішньо" задані) і максимізує свою функцію виграшу u_i на множині своїх стратегій $x_i\in X_i$. Властивість (5.2.4) рівноваг Неша полягає у тому, що x_i^* – одна з кращих відповідей на стратегії $x^*_{N\setminus i}$ (потрібно підкреслити – x_i^* є точкою *глобального* максимуму функції однієї змінної $u_i(x_i)\equiv u_i(x_i,x^*_{N\setminus i})$ при фіксованих значеннях змінних $x_{N\setminus i}=x^*_{N\setminus i}$). Із визначення 5.2.3 випливає, що дана ситуація є рівновагою Неша, якщо від неї невигідно відхилятись будь-якому одному гравцеві (всі інші свої стратегії не змінюють), оскільки значення його цільової функції не покращується (залишається таким, як у даній ситуації, або погіршується). Навпаки, дана ситуація не є рівновагою Неша, якщо хоча б одному гравцю вигідно відхилятись від неї (значення його цільової функції хоча б на одній стратегії покращується).

На відміну від складної або обережної поведінки концепція рівноваги Неша не дає конкретних рекомендацій із вибору стратегії. Для ігор двох осіб із нульовою сумою *NE*–ситуації є, очевидно, просто сідловими точками, тому нешівські стратегії збігаються з оптимальними стратегіями.

Розглянемо п р и к л а д 5.2.4 (див. табл. 5.2.6). Розглянемо всі 9 ситуацій на предмет їхнього аналізу на рівноважність за Нешем. Аналізуємо ситуацію (a_1,a_2). Фіксуємо стратегію другого гравця a_2 (перший стовпчик) і розглядаємо відхилення першого з a_1 на b_1. Значення цільової функції першого гравця при цьому не погіршиться. Тому розглянемо відхилення першого на c_1. Це приведе до покращення значення цільової функції першого гравця (з 2 на 5). Отже, $(a_1,a_2)\notin NE$. Фіксуємо b_2 і розглядаємо відхилення першого гравця від a_1 на b_1. Знову відбудеться покращення значення цільової функції першого гравця, отже, $(a_1,b_2)\notin NE$. Аналогічно, $(a_1,c_2)\notin NE$.

Таблиця 5.2.6

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 2	2, 1	1, 5
b_1	2, 3	3, 3	2, 2
c_1	5, 1	2, 2	3, 2

Ми аналізували ситуації (a_1, x_2) (перший рядок таблиці), фіксуючи стратегії другого гравця і змінюючи стратегії першого. Можна було поступити й навпаки – фіксувати стратегію першого ($x_1 = a_1$) і змінювати стратегії другого. Тоді, наприклад, від ситуації (a_1, a_2) другому вигідно відхилятись, вибираючи стратегію c_2. Зміна ситуації (a_1, c_2) переходом другого гравця на інші стратегії (a_2 і b_2) до погіршення значення його цільової функції не приводить, отже, у цьому випадку необхідно розглядати відхилення першого гравця (що ми зробили раніше).

Аналізуючи таблицю далі, знаходимо дві нешівські точки (b_1, b_2) і (c_1, c_2). Звернемо увагу, що перша з них ефективна, друга – домінується першою. Отже, можливі різні ситуації – нешівські ситуації не є ефективними ("Дилема в'язня"), деякі з них ефективні, деякі ні. Легко побудувати приклад, коли всі нешівські точки є ефективними.

Ми розв'язували приклад прямим перебором. Насправді перебір можна скоротити. Зафіксуємо, як і вище, стратегію $x_2 = a_2$. Очевидно, що "підозрілою на нешевість" можуть бути лише стратегії першого гравця, на яких досягається максимум $u_1(x_1, a_2)$. У даному випадку – це стратегія c_1 і, отже, ситуація (c_1, a_2). Аналізуючи її на рівновагу (зміною стратегій другого гравця) маємо, що $(c_1, a_2) \notin NE$. Усі ситуації з першого стовпчика (в даному випадку це (b_1, a_2)) розглядати вже не потрібно. Якщо максимум $u_1(x_1, a_2)$ досягався б для декількох стратегій x_1, то розглядати потрібно було б усі відповідні ситуації.

Таким чином, ми побудували алгоритм. Для кожного фіксованого стовпчика $\bar{x}_2$ знаходимо рядки, у яких досягається максимум $u_1(x_1, \bar{x}_2)$, для кожного фіксованого рядка $\bar{x}_1$ знаходимо стовпчики, у яких досягається максимум $u_2(\bar{x}_1, x_2)$, перетин знайдених рядків і стовпчиків і дасть нешівські ситуації. У нашому випадку, для стратегії $\bar{x}_2 = a_2$ максимізуюча стратегія $x_1 = c_1$ (позначимо $a_2 \to c_1$). $b_2 \to b_1$, $c_2 \to c_1$, $a_1 \to c_2$, $b_1 \to a_2$, b_2, $c_1 \to b_2$, c_2. Ситуації з максимізуючих стратегій $((b_1,b_2),(c_1,c_2))$ і є нешівськими рівновагами. Якщо розглядається задача, у якій цільові функції u_i (одна або декілька) мінімізуються, то можна або перейти до максимізації $(-u_i)$ або при розгляді відхилення використовувати термінологію вигідно–невигідно (замість більше–менше).

При $n > 2$ пошук рівноваг Неша ускладнюється, хоча принципово не змінюється. Розглянемо життєво важливий випадок, коли $n = 3$ (якщо наші предки довгий час обмежувались поняттями "один", "два", "багато", то в багатьох практичних задачах досить обмежуватись $n = 3$).

Розглядаємо табл. 5.2.7 (у ній x_3 фіксоване на a_3). Фіксуємо a_2 (перший стовпчик) і знаходимо максимізуючі стратегії по x_1. Маємо $(a_2,a_3) \to b_1$. Аналогічно $(b_2,a_3) \to b_1$, $(c_2,a_3) \to a_1$.

Таблиця 5.2.7

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 1, 3	1, 2, 1	2, 2, 3
b_1	2, 1, 4	2, 1, 1	1, 3, 2

Для табл. 5.2.8: $(x_3 = b_3)$ маємо: $(a_2,b_3) \to a_1$, $(b_2,b_3) \to b_1$, $(c_2,b_3) \to a_1$. Отже, лише ситуації (b_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,a_3), (a_1,c_2,a_3), (a_1,a_2,b_3), (b_1,b_2,b_3), (a_1,c_2,b_3) необхідно перевірити на рівноважність. Із них максимум по другій компоненті досягається на (a_1,c_2,a_3), (a_1,c_2,b_3). У свою чергу, в останніх векторах максимум по третій компоненті досягається (a_1,c_2,a_3). Отже, це і є єдина нешівська рівновага. Вивчимо деякі властивості *NE*–рівноваги.

Таблиця 5.2.8

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 2, 1	1, 5, 1	2, 2, 2
b_1	1, 3, 2	2, 1, 2	1, 1, 1

Лема 5.2.3. Нешівські рівноваги індивідуально раціональні ($NE \subseteq IR$).

Доведення. Нехай $x^* \in NE$, тоді $u_i\left(x^*\right) \geq u_i\left(x_i, x^*_{N\setminus i}\right)$ для $\forall\, i \in N$, $\forall\, x_i \in X_i$. Оскільки $x^*_{N\setminus i}$ – фіксоване, то $u_i\left(x_i, x^*_{N\setminus i}\right) \geq \inf\limits_{x_{N\setminus i}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right)$ для $\forall\, x_i \in X_i$. Узявши супремум по x_i у цій нерівності, отримаємо необхідне.♦

Отже, *NE*–ситуація дає кожному гравцю хоча б його гарантований виграш, хоча *NE*–стратегії можуть і не бути обережними (див. наступний приклад) і тим більш оптимальними (тобто *NE*–ситуація може бути не паретівською – див. "Дилему в'язня"). Більше того, якщо кожна *NE*–ситуація є паретівською, то співіснування декількох різних паретівських ситуацій породжує боротьбу за лідерство, що унеможливлює знаходження "оптимальних" стратегій. Це ілюструється таким прикладом.

Приклад 5.2.5 ("Перехрестя"). Два автомобілі рухаються по двох перпендикулярних дорогах і одночасно зустрічаються на перехресті. Кожен з них може або зупинитись (стратегія *З*) або продовжувати рухатись (*Р*). Наведена табл. 5.2.9 формалізує дану ситуацію у припущенні, що кожному гравцеві краще зупинитись, ніж постраждати в аварії, і рухатись, якщо інший зупинився. Додатне число ε відповідає мірі незадоволення того, хто зупинився, від спостерігання колеги, який їде (величина ε визначається етичними нормами суспільства).

Таблиця 5.2.9

X_1 \ X_2	*З*	*Р*
З	1, 1	$1-\varepsilon$, 2
Р	2, $1-\varepsilon$	0, 0

Обидві *NE*–ситуації (*З*,*Р*) і (*Р*,*З*) є паретівськими, хоча вони і не взаємозамінні. Для кожного гравця оптимальною стратегією є зупинка, якщо інший вирішив переїхати перехрестя, і навпаки. Отже, задача кожного полягає у виборі першим стратегії "рухатись" і отримати виграш у 2 одиниці – маємо боротьбу за лідерство. Кожному гравцеві вигідно демонструвати, що він може переключитись із стратегії *Р* на стратегію *З* (наприклад, вдавати п'яного або вигукнути, що в нього відмовили гальма), і у той же час уважно спостерігати за супротивником, щоб виявнити, а чи той і дійсно не може зупинитись. Дивно, що найвигіднішою є нераціональна поведінка, яка в той же час є цілком розумною. Хоча кожен із читачів може пригадати випадки зі свого життя, коли аналогічні дії (наприклад, стратегія "прибіднятися" на іспиті) приводили до позитивних наслідків. Це ще один приклад того, що, взагалі кажучи, раціональність і розумність – це різні речі. Симетричність ролей обох гравців робить неможливим розв'язання конфліктної ситуації у зазначеній постановці. Тому недарма придумуються правила дорожнього руху, чіпляються світлофори і т. д.

Для $n = 2$ розглянуту ситуацію можна повністю формалізувати.

Нехай S_i – виграш *i*-го гравця, який є "лідером" – він знає свою цільову функцію і цільову функцію "підлеглого", діє оптимально у припущенні, що і підлеглий поводить себе розумно (формальне визначення див. нижче – визначення 5.2.8).

Визначення 5.2.4. У грі *G* маємо *боротьбу за лідерство*, якщо $\exists$ *x*: $u_i(x) \ge S_i$, $i = 1, 2$.

Лема 5.2.4. Якщо у грі *G* мається хоча б дві паретівські *NE* – ситуації x^1, x^2 із різними векторами виграшів:

$$\Big(\big(u_1(x^1), u_2(x^1)\big) \ne \big(u_1(x^2), u_2(x^2)\big)\Big), \tag{5.2.5}$$

то має місце боротьба за лідерство.

Доведення. З визначення S_i маємо: $\{x \in NE\} \Rightarrow \{u_i(x) \le S_i,\ i = 1, 2\}$. Якщо у грі *G* відсутня боротьба за лідерство, то знайдеться ситуація *z*, для якої справедливі нерівності $u_i(z) \ge S_i$, $i = 1, 2$, звідки: $u_i(x^1) \le u_i(z)$, $u_i(x^2) \le u_i(z)$, $i = 1, 2$. Оскільки ситуації x^1 і x^2 Парето-оптимальні, то всі чотири нерівності суть рівності, що суперечить (5.2.5).♦

Наступна лема порівнює *NE*–ситуації з ситуаціями при існуванні складної рівноваги.

Лема 5.2.5. Нехай у грі *G* множини стратегій X_i скінченні, $i \in N$. Якщо гра *G* розв'язна за домінуванням, то будь-яка складна рівновага є рівновагою Неша.

Доведення. Доміновані стратегії не можуть утворювати нешівські рівноваги, отже, $NE(HD(X_i)) \le NE(X_i)$, $i \in N$. Нехай $X^t = \prod_{i \in N} X_i^t$ є множиною складних рівноваг, тоді $NE(X) \supset NE(X^1) \supset \ldots \supset NE(X^t) = X^t$.♦

Отже, для розв'язаних за домінуванням ігор складна поведінка завжди приводить до *NE*–ситуації. Цікаво зазначити, що протилежне твердження не вірне. *NE*–стратегія може бути домінованою, як бачимо з наступного прикладу 5.2.6 (табл. 5.2.10). Ситуація (a_1, a_2) – єдина рівновага Неша. Однак a_1 домінується c_1, a_2 домінується c_2.

Таблиця 5.2.10

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 1	0, 1	0, 1
b_1	0, 0	1, 0	0, 1
c_1	1, 0	0, 1	1, 0

Умови леми 5.2.3 є одними з достатніх умов існування рівноваги Неша. Однак, у свою чергу, зручних умов для X_i, u_i, які б гарантували розв'язність за домінуванням, не існує. Тому результат леми 5.2.3 відносно існування рівноваги Неша є неконструктивним. У багатьох прикладних задачах функції виграшу u_i задаються аналітично з допомогою елементарних операцій над елементарними функціями (поліноміальними, логарифмічними тощо). У цьому випадку корисною є теорема 5.2.1 [58].

Теорема 5.2.1. (Неш, 1951). Нехай множина стратегій X_i є опуклою й компактною підмножиною деякого топологічного векторного простору (взагалі кажучи, свого для кожного *i*). Нехай усі u_i – неперервні дійснозначні функції на X_N такі, що для кожного $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$ функції однієї змінної $u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right)$ угнуті по x_i на X_i. Тоді множина рівноваг Неша є непорожньою й компактною множиною.

Доведення. Доведення спирається на теорему про нерухому точку та наступну лему.

Лема 5.2.6 (Кнастера–Куратовського–Мазуркевича). Нехай p – ціле число і $a_1,\ldots,a_p$ – деякі точки топологічного векторного простору. Нехай також $A_1,\ldots,A_p$ – деякі замкнуті підмножини множини $CO\left\{a_1,\ldots,a_p\right\}$, яка є випуклою оболонкою множини $\left\{a_1,\ldots,a_p\right\}$, причому для $\forall\, T \subseteq \left\{\overline{1,p}\right\}$, множина $\bigcup\limits_{k\in T} A_k$ містить $CO\left\{a_k \,\middle|\, k\in T\right\}$. Тоді перетин $\bigcap\limits_{k=\overline{1,p}} A_k \neq \varnothing$.

Визначимо дійснозначну функцію ϕ на $X_N \times X_N$: $\phi(x,y) = \sum\limits_{i\in N}\left(u_i\left(x_i, y_{N\setminus i}\right) - u_i(y)\right)$, $x,y \in X_N$. Із неперервності u_i та ввігнутості u_i по x_i випливає неперервність функції ϕ по y та увігнутість по *x*. Визначимо багатозначне відображення Φ із X_N у себе:

$$\Phi(x)=\left\{y\in X_N \,\middle|\, \phi(x,y)\le 0\right\},\ \forall x\in X_N .$$

Оскільки ϕ неперервна по y, то $\Phi(x)$ – компакт для будь-якого x. Оскільки $x\in\Phi(x)$, то $\Phi(x)\ne\varnothing$. Фіксуємо ціле p і p елементів $x^1,\dots,x^p$ із X_N. Будь-яка опукла комбінація $x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x^k\in\bigcup_{k=1}^{p}\Phi(x^k)$ (інакше мали б для будь-якого $k=\overline{1,p}$: $\Phi(x^k,x)>0$; у силу увігнутості Φ відносно до першого аргументу отримуємо протиріччя: $0<\phi\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x^k,x\right)=\phi(x,x)=0$). Отже, $CO\{x_1,\dots,x_p\}\subseteq\bigcup_{k=\overline{1,p}}\Phi(x^k)$.

Застосовуючи лему Кнастера–Куратовського–Мазуркевича, маємо: $\bigcap_{k=\overline{1,p}}\Phi(x^k)\ne\varnothing$. Оскільки не порожні компактні множини $\left(\Phi(x)\right)_{x\in X_N}$ такі, що будь-яка їхня сім'я має не порожній перетин, то і перетин усіх множин $\bigcap_{x\in X_N}\Phi(x)\ne\varnothing$. Для будь-якого x^* із цього перетину маємо: $\phi(x,x^*)\le 0$, $\forall\ x\in X_N$, що може бути переписаним у вигляді $u_i(x_i,x^*_{N\setminus i})-u_i(x^*)\le 0$, $\forall\ i\in N$, $\forall\ x_i\in X_i$. Отже, $\bigcap_{x\in X_N}\Phi(x)=NE$ і теорему доведено.♦ (Відмітимо, що це доведення належить Ж. Хаддаду, воно набагато коротше за оригінальне доведення Неша.)

Теорема Неша стверджує, що в умовах теореми множина *NE* не порожня. Для того щоб її обчислити, необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$u_i(x^*)=\max_{x_i\in X_i}u_i(x_i,x^*_{N\setminus i}),\ i\in N. \qquad (5.2.6)$$

Оскільки u_i увігнута по x_i, то наведена вище задача глобальної оптимізації еквівалентна локальній задачі. Наприклад, якщо x_i – внутрішня точка множини X_i і функція u_i диференційована по x_i, то умови (5.2.6) еквівалентні умовам: $\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|_{x^*}=0$, $i\in N$.

Наведемо приклад ("Олігополія з призначенням випуску").

Мається n виробників із нульовими витратами деякого насиченого за споживанням товару. Виробники постачають товар на ринок в об'ємах x_i, $i\in N$, за ціною $p(x_1+\ldots+x_n)$, де $p(t)$ – спадаюча увігнута функція: $p(0) > 0$, $p'(t) < 0$, $p''(t) < 0$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$. Маємо гру $\left\langle [0,+\infty),\ x_i p(\bar{x});\ i = \overline{1,n} \right\rangle$.

Оскільки X_i не є компактними множинами, покладемо $Y_i = [0,s]$, де s є пропозицією, що породжує нульову ціну: $p(s) = 0$. Для "звуженої" таким чином гри $\tilde{G} = (Y_i, u_i, i \in N)$ можна застосувати теорему Неша, котра гарантує існування *NE*–ситуації. У силу увігнутості й диференційованості u_i маємо систему: $x_i^* p'(\bar{x}^*) + p(\bar{x}^*) = 0$, $i \in N$. Звідси маємо:

$x_i^* = -\dfrac{p(\bar{x}^*)}{p'(\bar{x}^*)}$, $i \in N$, тобто: $x_1^* = x_2^* = \ldots = x_n^* = \tilde{x}$, де $\tilde{x} = -p(n\tilde{x}) / p'(n\tilde{x})$.

Нехай $n = 2$, $p(x_1 + x_2) = \left(\dfrac{1}{x_1 + x_2} - 1 \right)^{1/2}$, $X_i = \left[0, 1/2\right]$, $i = 1, 2$. Тоді $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1/4$. Цікаво зазначити, що обом гравцям вигідно ("у розумінні" Неша) випускати 50 % товару від їхніх потенційних можливостей.

При $n = 2$ отримуємо як наслідок з теореми Неша відомий результат з теорії ігор двох осіб із нульовою сумою.

Теорема 5.2.2. (фон Неймана) (наслідок з теореми Неша). Нехай X_1, X_2 – опуклі компактні підмножини деяких топологічних векторних просторів, u_1 – неперервна дійснозначна функція на $X_1 \times X_2$, причому: 1) $u_1(x_1, x_2)$ увігнута по x_1 для $\forall\ x_2$, 2) $u_1(x_1, x_2)$ опукла по x_2 для $\forall\ x_1$.

Тоді гра двох осіб із нульовою сумою (X_1, X_2, u_1) має хоча б одну сідлову точку і, отже, ціну.

Вибір Нешівських рівноваг. Гра може мати декілька ситуацій рівноваги за Нешем, при цьому, у різних ситуаціях гравці можуть отримувати різні виграші. Тобто одні ситуації вигідні одним гравцям, інші – іншим. Після введення Нешем поняття рівноваги, численні спеціалісти намагались сформулювати додаткові умови вибору єдиної рівноваги. Одна з таких концепцій запропонована лауреатами Нобелівської премії з економіки за 1994 р. Дж. Харшаньї та Р. Зельтеном [31]. Розглянемо приклад 5.2.7 (табл. 5.2.11) Р. Аумана (ще один лауреат Нобелівської премії з економіки за 2005 р.). У цій грі маємо дві ситуації рівноваги: (a_1, a_2) та (b_1, b_2). Яку з них оберуть гравці? Ситуація (a_1, a_2) начебто краща для обох гравців ((a_1, a_2) строго домінує (b_1, b_2)), але вибір (a_1, a_2) зовсім неочевидний. Отже, якщо перший гравець відхилиться від стратегії a_1 (за умови, що другий буде дотримуватися a_2), то він утратить лише одну одиницю виграшу (≈10 %), зате інший витратить 8 одиниць (≈90 %). Водночас, першому гравцю абсолютно невигідно відхилятися від ситуації (b_1, b_2), оскільки він втрачає 6 одиниць (≈85 %), а другий отримує навіть більше. Оскільки гра симетрична, то для другого гравця висновки аналогічні. Отже, ризик відхилення кожного гравця від ситуації рівноваги (a_1, a_2) великий, від (b_1, b_2) – малий. Якщо перейти від гри з виграшами (табл. 5.2.11) до гри з "втратами" при відхиленні від ситуації рівноваги (табл. 5.2.12), то вищесказане є особливо наочним. Розглянемо спрощений варіант концепції Харшаньї–Зельтена.

Таблиця 5.2.11

$X_1 \setminus X_2$	a_2	b_2
a_1	9, 9	1, 8
b_1	8, 1	7, 7

Таблиця 5.2.12

$X_1 \setminus X_2$	a_2	b_2
a_1	1, 1	0, 0
b_1	0, 0	6, 6

Визначення 5.2.5. Нехай *r* та *s* шукані рівноваги в грі *G*. Ситуація *r* *домінує за виграшем s* , якщо $u_i(r) \geq u_i(s),\ i \in N;\ u_i(r) \neq u_i(s)$.

Визначення 5.2.5. Ситуація рівноваги *r* називається *ефективною за виграшем* у грі *G*, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за виграшем *r*.

Отже, ситуація рівноваги (a_1, a_2) у наведеному вище прикладі є ефективною за виграшем.

Оцінка ризику для першого гравця визначається відношенням: $u_2(a_1, b_2)/u_2(a_1, a_2) = 8/9 > u_2(b_1, a_2)/u_2(b_1, b_2) = 1/7$ (аналогічно для другого гравця). Отже, для обох гравців рівновага (a_1, a_2) є більш ризикованою (на предмет відхилення суперника від неї), рівновага (b_1, b_2) – менш ризикованою. Розглянемо "несиметричну" гру двох осіб з двома стратегіями (табл. 5.2.13 – гра з виграшами, табл. 5.2.14 – відповідно гра з втратами.

Таблиця 5.2.11

$X_1 \setminus X_2$	a_2	b_2
a_1	9, 5	1, 1
b_1	1, 1	2, 6

Таблиця 5.2.12

$X_1 \setminus X_2$	a_2	b_2
a_1	8, 4	0, 0
b_1	0, 0	1, 5

Так, в табл. 5.2.13, 5.2.14 ситуації рівноваги $a=(a_1,a_2)$ і $b=(b_1,b_2)$ не знаходяться у відношенні домінування за виграшем, перший гравець має більш високий виграш при *a,* другий гравець – при *b.* Стан ризику для першого гравця, пов'язаний із відношенням $u_1(a)/u_1(b)=8$ в табл. 2.5.14, для другого гравця – з $u_2(b)/u_2(a)=5/4$. Отже, гравець 1 має більш сильну мотивацію для вибору *a,* ніж гравець 2 – для вибору *b.* Якщо гравець 2 мислить раціонально ("шанс вибору гравцем 1 ситуації *b* дуже малий"), то він теж зупиниться на ситуації *a* ("інакше я буду мати $u_2(a_1,b_2)=1$ в грі з виграшами (табл. 5.2.13), замість $u_2(a)=5$ ").

У загальному випадку "несиметричної" гри двох осіб з двома стратегіями можна також провести дослідження на "ризикованість" рівноважних ситуацій. Перейдемо від гри з виграшами (табл. 5.2.15) до гри з втратами (табл. 5.2.16).

"Несиметричною" грою двох осіб із двома стратегіями, можна також провести дослідження на "ризикованість рівноважних ситуацій. Для цього перейдемо від гри з виграшами (табл. 5.2.12) до гри із "втратами" (при відхиленні від ситуацій рівноваги) (табл. 5.2.13). Так, таблиця з прикладом 5.2.7 зводиться до табл. 5.2.14. Одержимо несиметричну гру з втратами $v_1,v_2,w_1,w_2>0$; $v_1>w_1$, $v_2>w_2$.

Таблиця 5.2.15

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	$(v_{11},\ v_{12})$	$(w_{11},\ w_{12})$
b_1	$(v_{21},\ v_{22})$	$(w_{21},\ w_{22})$

Таблиця 5.2.16

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	$(v_{11}-v_{21},\ v_{12}-w_{12})$	$(0, 0)$
b_1	$(0, 0)$	$(w_{21}-w_{11},\ w_{22}-v_{22})$

Позначимо $v_1=v_{11}-v_{12}$, $v_2=v_{12}-w_{12}$, $w_1=w_{21}-w_{11}$, $w_2=w_{22}-v_{22}$. Без обмеження загальності нехай $v_1,v_2,w_1,w_2 \ >0$, $v_1>w_1$, $v_2>w_2$.

Отримаємо гру, що задається табл. 5.2.17.

Таблиця 5.2.17

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	$(v_1,\ v_2)$	$(0, 0)$
b_1	$(0, 0)$	$(w_1,\ w_2)$

Оцінка ризику для першого гравця визначається відношенням v_1/w_1, другого гравця – відношенням v_2/w_2. Перший гравець має більш сильну мотивацію (з погляду ризику) вибору (a_1, a_2), ніж другий для вибору (b_1, b_2), якщо $v_1/w_1 > w_2/v_2$, або $v_1v_2 > w_1w_2$ (добуток Неша).

Визначення 5.2.6. Ситуація *a домінує за ризиком b*, якщо $v_1v_2 > w_1w_2$.

Визначення 5.2.7. Ситуація рівноваги *a* ефективна за ризиком у грі *G*, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за ризиком *a*.

Так, у прикладі 5.2.7 ситуація рівноваги (b_1, b_2) домінує за ризиком ситуацію рівноваги (a_1, a_2) і є ефективною за ризиком.

Отже, за думкою Дж. Харшаньї та Р. Зельтена, гравці не повинні вибирати ситуації, що є домінованими чи за виграшем, чи за ризиком. А далі, вони повинні вирішити, що для них важливіше: виграш чи ризик, і вибирати одну з недомінованих рівноваг, відповідно чи за виграшем, чи за ризиком (зауважимо, що доцільно розглянути тут двокритеріальну постановку цієї задачі, враховуючи, зокрема, "схильність до ризику" опонента).

Нетривіальність проблеми виділення єдиної рівноваги Неша на основі введення додаткових "розумних, логічних" умов (вище розглянуто дві подібні умови) ілюструє такий приклад. Нехай маємо трьох гравців з виграшами, що задаються табл. 5.2.18 і 5.2.19 (табл. 5.2.18 задає виграші гравців при виборі третім гравцем стратегії a_3, табл. 2.5.19 – стратегії b_3).

Таблиця 5.2.18

a_3 \ X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	7, 7, 1	0, 0, 0
b_1	0, 0, 0	15, 15, 0

Таблиця 5.2.19

b_3 \ X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	3, 3, 0	0, 0, 0
b_1	0, 0, 0	4, 4, 3

Таблиця 5.2.20

a_3 \ X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	7, 7, 2	0, 0, 0
b_1	0, 0, 0	15, 15, 0

Розглянемо "підсилену" гру, що задається табл. 2.5.20, 2.5.19, і в якій виграш третього гравця при виборі стратегії a_3 збільшено з 1 до 2. Рівноваги Неша, очевидно, не змінюються.

Для третього гравця логічно в "підсиленій" грі вибирати стратегію a_3.

Припустимо, що гравці 1 і 2 очікують один від одного однакової поведінки в обох іграх, оскільки для них нічого не змінилось. Тоді збільшення мотивації для гравця 3 у виборі стратегії a_3 підвищить стимул для використання гравцями 1 і 2 своїх стратегій b_1 і b_2. Отже, першій грі приписується розв'язок (a_1, a_2, a_3), другий – (b_1, b_2, b_3).

Властивість "монотонності за виграшем" не виконується! Хоча ця властивість є цілком прийнятною для гри з двома гравцями.

Індивідуально-оптимальні рівноваги. Принцип індивідуальної-оптимальності, розвинений у роботах [31–35], надає можливість кожному гравцю вибирати свої стратегії індивідуально (некооперативно), але враховувати при цьому інтереси усіх інших гравців (компроміс заради вирішення конфлікту). Цей принцип є обґрунтованим у, так званих, одноцільових іграх, де у всіх гравців ціль – одна, але вона характеризується для кожного гравця своєю функцією виграшу. В ідеалі, ця ціль, полягає у виборі гравцями своїх стратегій так, щоб склалася найбільш переважна ситуація для усіх гравців. Оскільки такі ситуації можуть не існувати, то гравці згодні піти на компроміс. У силу того, що гравці діють некооперативно, кожен бачить цей компроміс по своєму, що приводить до конфлікту між ними.

Одноцільова гра принципово відрізняється від класичної багатоцільової гри, яка має таку ж саму нормальну форму, але характеризується тим, що кожен гравець незалежно від того, діє він кооперативно з іншими гравцями чи ні, має свою особисту ціль. Одноцільова некооперативна гра G також принципово відрізняється від багатокритеріальної задачі прийняття рішень, яка може мати таку ж саму нормальну форму, але специфічна колективною поведінкою гравців.

Принцип індивідуальної оптимальності базується на спеціальному відношенні домінування за Нешем.

Визначення 5.2.8. Ситуація y знаходиться у відношенні сильного NE-домінування гравця $i \in N$ до ситуації x і позначається це через $y \overset{NE(i)}{\succ\succ} x$, якщо $u_j(y_i, x_{N \setminus i}) > u_j(x), \forall j \in N$.

Визначення 2.9. Ситуація x^* називається слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою, а множина цих рівноваг позначається через $WIOE$, якщо не існує такого гравця $i \in N$ та іншої ситуації $y \in X$, яка б сильно домінувала за Нешем x^*, тобто $\nexists i \in N, \nexists y \in X : y \overset{NE(i)}{\succ\succ} x^*$.

Застосування слабких індивідуально-оптимальних рівноваг мотивується таким сценарієм одноцільової гри. Гравці укладають необов'язкову угоду (гравці прислухаються до науковообґрунтованих рекомендацій компетентних осіб) про те, що вони будуть дотримуватися ситуації $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$. Потім вони незалежно один від іншого ухвалюють рішення про вибір своїх стратегій. У тому і лише в тому випадку, коли основою угоди буде слабка індивідуально-оптимальна рівновага x^*, зміна будь-яким гравцем $i \in N$ погодженої з іншими гравцями стратегії x_i^* на іншу, завжди призведе до ситуації, яка не буде кращою за x^* хоча б для одного гравця. Оскільки ця ситуація може не бути найкращою для усіх гравців одночасно, то вона є компромісом. Тому ціль гравця $i \in N$, яка полягає у максимізації всіх функцій виграшу $u_j(x)$, $j \in N$, може бути не задоволеною та досягнутий у ході попередніх переговорів компроміс може бути зруйнованим.

Приклад 5.2.9. Два гравці вирішили побудувати двоквартирний будинок. Перший гравець може лише фінансувати будівництво, другий – вкласти свою працю. Для першого гравця – головне, щоб будинок мав гарний вигляд, а для другого – надійність. Але обидва переслідують спільну ціль – побудувати надійний будинок, який має гарний вигляд. У кожного з гравців є по дві стратегії. Перший гравець може вкласти в будівництво багато грошей (M_1) або мало (L_1). Другий гравець може також вкласти в будівництво багато праці (M_2) або мало (L_2). Припустимо для наочності, що для кожного гравця існує функція виграшу за п'ятибальною шкалою, яка задана табл. 5.2.21. Виграш першого гравця – рівень дизайну будинку, а виграш другого – рівень надійності будинку.

Таблиця 5.2.21

X_1 \ X_2	L_2	M_2
L_1	1, 1	5, 2
M_1	5, 2	4, 4

У цій грі немає рівноваги Неша. Тому жодна ситуація не може бути основою стабільної угоди, якщо гравці діють некооперативно й кожен переслідує свою ціль. Множиною слабких індивідуально-оптимальних рівноваг у цій грі є $WIOE = \{(M_1,\ L_2),\ (L_1,\ M_2),\ (M_1, M_2)\}$. Основою стабільної домовленості між гравцями може бути індивідуально-оптимальна рівновага (M_1, M_2), якщо гравці погодяться на компроміс (кожному гравцю достатньо лише приблизно на 25 % "врахувати" інтереси свого партнера, щоб ситуація (M_1, M_2) була стабільною).

Будемо вважати, що функції виграшу всіх гравців є обмеженими на множині X ситуацій гри G і позначимо через $S = \sum_{j \in N} \sup_{x \in X} u_j(x) < \infty$ –

суму їх верхніх меж. Уведемо до розгляду для кожного гравця $i \in N$ множину параметрів $M_i = \left\{ \mu_i = (\mu_i^j)_{j \in J} \middle| \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1;\ \mu_i^j \geq 0,\ j \in N \right\}$.

Необхідні й достатні умови індивідуальної-оптимальності встановлює така теорема.

Теорема 5.2.3. Якщо в грі G ситуація $x^* \in WIOE$, функції виграшу $u_j(x^*) > 0,\ j \in N$, то існують такі вектори параметрів $\mu_i \in M_i$, $i \in N$, зокрема з компонентами: $\bar{\mu}_i^j = u_j(x^*)/S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(x^*)/Sn,\ \ j \in N$,

що для $\forall x_i \in X_i,\ i \in N$, справедливі нерівності:

$$\min_{j \in N} \left(u_j\left(x_i, x_{N \setminus i}^*\right) - S\mu_i^j \right) \leq \min_{j \in N} \left(u_j\left(x^*\right) - S\mu_i^j \right). \tag{5.2.7}$$

Будь-який розв'язок x^* системи нерівностей (5.2.7) при заданих $\mu_i \in M_i$, $i \in N$, є слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою.

Слід зауважити, що параметри $\mu_i \in M_i$ дають можливість гравцю $i \in N$ виразити свою перевагу на множині функцій виграшу всіх гравців $u_j(x),\ j \in N$. Так, наприклад, якщо він вважає, що для нього є більш важливим критерій $j_1 \in N$, ніж $j_2 \in N$, то йому слід вибирати $\mu_i^{j_1} > \mu_i^{j_2}$. Змінюючи параметри $\mu_i \in M_i$, $i \in N$, можна знаходити ті або інші рівноваги, розв'язуючи нерівності (5.2.7). З іншого боку, кожна індивідуально-оптимальна рівновага характеризується деякою множиною параметрів $\mu_i \in M_i$, $i \in N$, і, відповідно, перевагою на множині функцій виграшу усіх гравців.

Варто зазначити, що параметрам μ_i^j, які фігурують у нерівностях (5.2.7), можна надати певного ігрового змісту. Нехай x^* є слабкою індивідуально-оптимальною рівновагою гри G. Тоді за теоремою 5.2.3 вона є розв'язком системи нерівностей (5.2.7), принаймні при

$$\bar{\mu}_i^j = u_j(x^*)/S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(x^*)/Sn, \quad i, j \in N.$$

Звідси легко побачити, що для кожного фіксованого гравця $i \in N$ значення параметра μ_i^j вказує, яким, на думку гравця $i \in N$, повинне бути бажане значення функції виграшу $u_j(x),\ j \in N$ у досягнутому компромісі x^*. Тоді й лише тоді гравцю $i \in N$ буде невигідно відхилятися від ситуації x^*.

Визначення 5.2.10. Нехай $Q=\{N(k)\}_{k\in K}$ деяке розбиття множини гравців на коаліції: $N(i)\cap N(j)=\varnothing,\ i\neq j$; $\bigcup\limits_{k\in K} N(k)=N$. Слабкою коаліційною рівновагою гри G будемо називати ситуацію x^* таку, що для $\forall k\in K\ \ \nexists x_{N(k)}\in X_{N(k)}$ такого, що для $\forall j\in N(k)$ виконується нерівність $u_j(x_{N(k)},x^*_{N\setminus N(k)})>u_j(x^*_{N(k)},x^*_{N\setminus N(k)})$. Будемо позначати множину слабких коаліційних рівноваг гри G через $WKNE_Q$.

Як показано в [31], множина індивідуально-оптимальних рівноваг містить у собі множини: рівноваг за Нешем (NE), коаліційних рівноваг (KNE_Q) та оптимальних за Слейтером (SO) ситуацій гри, тобто $NE, WKNE_Q, SO\subseteq WIOE$. Ця властивість дає можливість на основі теореми 5.2.3 побудувати критерій оцінки максимальної стабільності індивідуально-оптимальної рівноваги $x\in X$, який можна представити у такому вигляді: $\hat{\mu}^{\max}(x)=\max\limits_{\mu}\sum\limits_{i\in N}\mu_i^i$ за таких умов:

$$\min_{j\in N}\left(u_j\left(y_i,x\right)-\mu_i^j S\right)\leq\min_{j\in N}\left(u_j\left(x\right)-\mu_i^j S\right),\ \forall y_i\in X_i, i\in N;$$

$$\mu_i^j\geq 0, i,\ j\in N;\ \sum_{j\in N}\mu_i^j=1,\ i\in N.$$

Оцінка максимальної стабільності ситуації $x\in WIOE$ характеризує основні типи рівноваг некооперативних ігор так: $x\in NE\Leftrightarrow\hat{\mu}^{\max}(x)=n$; $x\in KNE\Rightarrow\hat{\mu}^{\max}(x)=|K|$, де $|K|-$ кількість коаліцій у грі G; $x\in SO\Rightarrow\hat{\mu}^{\max}(x)=1$. Тому одним із підходів до вибору конкретної індивідуально-оптимальної рівноваги, як основи угоди між гравцями, може бути вибір найбільш стабільної з них $x\in WIOE$ за критерієм $\hat{\mu}^{\max}(x)$. Цілком зрозуміло, що в разі існування рівноваг за Нешем, вони і будуть мати максимальні оцінки стабільності. Тому цей підхід є актуальним тоді, коли в грі G немає рівноваг за Нешем.

Розглянемо ще один підхід до вибору індивідуально-оптимальної рівноваги. Із теореми 5.2.7 випливає, що ситуація x^*, яка є індивідуально-оптимальною рівновагою вихідної гри G, є рівновагою Неша в грі, яка має нормальну форму $(X_i,\min\limits_{j\in N}(u_j(x)-S\mu_i^j); i\in N)$, при фіксованих значеннях векторів параметрів $\mu_i\in M_i$, $i\in N$, які характеризують переваги гравців на множині критеріїв. Таким чином, індивідуально-оптимальна рівновага x^* є стабільною для будь-якого гравця $i \in N$ за функцією $v_i(x,\mu_i) = \min_{j \in N}(u_j(x) - S\mu_i^j)$, яка в одноцільовій грі G характеризує корисність для нього ситуації $x \in X$ щодо зміни ним своєї стратегії x_i^* на іншу.

Виникають питання, чи може у гравця, який знаходиться у індивідуально-оптимальній рівновазі, виникнути спокуса змінити як свою стратегію, так і свою перевагу на множині функцій виграшу інших гравців? Якщо так, то чи можна таку ситуацію вважати основою стабільної угоди між гравцями? Якщо ні, то які з індивідуально-оптимальних рівноваг і при яких перевагах гравців будуть стабільними у такому сенсі?

Для відповіді на ці питання далі будемо розглядати гру *GR* у нормальній формі $(X_i \times M_i, v_i(x,\mu_i); i \in N)$. У цій грі гравець $i \in N$ вибирає не лише свої стратегії $x_i \in X_i$, а і параметри $\mu_i \in M_i$, які характеризують його перевагу на множині критеріїв. Виграшем гравця $i \in N$ у цій грі є функція корисності $v_i(x,\mu_i): X \times M_i \to E^1$.

Визначення 5.2.11. Набір $(\hat{x},\hat{\mu})$, який складається із ситуації $\hat{x} \in X$ і вектора параметрів $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_i)_{i \in N} \in M = \prod_{i \in N} M_i$, будемо називати рівновагою у перевагах гравців гри *GR*, якщо $\forall x_i \in X_i$ $\forall \mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \in M_i$ $\forall i \in N$ $\min_{j \in N}(u_j(\hat{x}) - S\hat{\mu}_i^j) \geq \min_{j \in N}(u_j(x_i, \hat{x}_{N \setminus i}) - S\mu_i^j)$.

Позначимо через RE множину рівноваг у перевагах гравців гри *GR*.

Таким чином, у рівновазі за перевагами гравців $(\hat{x},\hat{\mu})$ будь-якому гравцю $i \in N$ невигідно змінювати одночасно свою стратегію $\hat{x}_i$ і вектор параметрів $\hat{\mu}_i$, який характеризує його перевагу на множині критеріїв.

Має місце така теорема.

Теорема 5.2.4. Для того, щоб набір $(\hat{x},\hat{\mu})$ був рівновагою у перевагах гравців гри *GR* необхідно й достатньо, щоб ситуація $\hat{x}$ задовольняла таким нерівностям:

$$\sum_{j \in N} u_j(\hat{x}) \geq \sum_{j \in N} u_j(x_i, \hat{x}_{N \setminus i}), \ \forall x_i \in X_i, \ i \in N . \qquad (5.2.8)$$

Якщо набір $(\hat{x},\hat{\mu})$ є рівновагою у перевагах гравців гри *GR*, то ситуація $\hat{x}$ є слабкою індвідуально-оптимальною рівновагою гри *G*, а компоненти вектора $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_i)_{i \in N}$ знаходяться за формулами:

$$\bar{\mu}_i^j = u_j(\hat{x})/S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(\hat{x})/Sn, \ \ j \in N . \qquad (5.2.9)$$

Із цієї теореми випливають такі наслідки.

Наслідок 5.2.1. Нехай набір $(\hat{x},\hat{\mu})$ є рівновагою у перевагах гравців гри *GR*. Тоді вектори параметрів $\hat{\mu}_i$ гравців $i \in N$, які характеризують їхню перевагу, задовольняють умовам: $\hat{\mu}_i^j = \hat{\mu}_j^j$; $i, j \in N$.

На підставі наслідку 5.2.1 можна сказати, що вектори параметрів $\hat{\mu}_i$ гравців $i \in N$ є "узгодженими " між собою. Іншими словами, бажання всіх гравців $i \in N$ щодо значення критерію $j \in N$ у досягнутому компромісі x^* збігаються між собою.

Наслідок 5.2.2. Нехай набір $(\hat{x},\hat{\mu})$ є рівновагою у перевагах гравців гри *GR*. Тоді значення функцій корисності гравців у цій рівновазі рівні між собою і залежать лише від вибору індивідуально-оптимальної рівноваги $\hat{x}$, а саме: $\xi(\hat{x}) = v_i(\hat{x},\hat{\mu}_i) = \left(\sum_{j\in N} u_j(\hat{x}) - S\right)\Big/ n$, $i \in N$.

Серед рівноваг у перевагах гравців гри *GR* можна виділити такі, які максимізують спільну функцію корисності гравців.

Визначення 5.2.12. Рівновагу у перевагах $(\hat{x},\hat{\mu}) \in RE$ гравців гри *GR* будемо називати оптимальною, якщо вона максимізує спільну функцію корисності гравців, тобто $(\hat{x},\hat{\mu}) \in Arg\max\left\{\xi(x) \,\middle|\, (x,\mu) \in RE\right\}$.

Умови оптимальності рівноваг у перевагах гри *GR* встановлює така теорема.

Теорема 5.2.5. Набір $(\hat{x},\hat{\mu})$ буде оптимальною рівновагою у перевагах гри *GR* тоді й лише тоді, коли ситуація $\hat{x}$ задовольняє умовам (2.8), а компоненти вектору $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_i)_{i\in N}$ обчислюються за формулою (2.9). Ситуація $\hat{x}$, яка утворює оптимальну у перевагах рівновагу $(\hat{x},\hat{\mu})$ гри *GR*, є оптимальною за Парето ситуацією вихідної гри *G*.

Умови існування оптимальних у перевагах рівноваг гри *GR* встановлює такий наслідок.

Наслідок 5.2.3. Нехай у грі *G* множини стратегій гравців X_i, $i \in N$, компактні, а критеріальні функції u_i, $i \in N$, напівнеперевні зверху. Тоді множина *ORE* оптимальних у перевагах рівноваг гри *GR* є непорожньою компактною множиною.

Слід відмітити, що оптимальні за Парето ситуації, які максимізують сумарний виграш гравців, займають особливе місце в теорії ігор, особливо кооперативних ігор. У кооперативних іграх із трансферабельною корисністю ці ситуації є основою угоди між гравцями для поділів, які можуть утворювати ядро гри, *N*-ядро, вектор Шеплі (див. Розділ 6). Оптимальна рівноважність у перевагах гравців цих ситуацій є ще однією їхньою важливою властивістю.

Часткова інформованість гравців. У багатьох економічних, політичних і соціальних ситуаціях природним чином виникає несиметричний розподіл інформації. Розглянемо найпростішу модель такого виду – поведінка "лідер-підлеглий". Першим подібну модель розглянув економіст Г. Штакельберг на початку XX ст. при описанні стратегій фірм, що конкурують на одному ринку. У таких ситуаціях нерідко одна з фірм виявляється сильнішою за інші і нав'язує їм свою стратегію, наприклад, призначає ціну. Безліч подібних прикладів можна знайти в політиці, в армії, у сім'ї.

Нехай для даної гри двох осіб $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$, R_j – множина кращих відповідей *j*-го гравця на задані стратегії *i*-го ($j \neq i$):

$$R_j = \left\{ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \;\middle|\; u_j(x_1, x_2) = \sup_{y_j \in X_j} u_j(x_i, y_J),\ j \neq i \right\}.$$

Визначення 5.2.8. Ситуація (x_1, x_2) називається *i-рівновагою Штакельберга*, якщо:

$$u_i(x_1, x_2) = \sup_{(y_1, y_2) \in R_j} u_i(y_1, y_2);\ i, j = 1, 2,\ i \neq j. \tag{5.2.7}$$

Множину *i*-рівноваг Штакельберга позначимо через $ШE_i$.Можна інтерпретувати1-рівновагу Штакельберга на основі такого сценарію: гравець 1 (*лідер*) знає обидві функції виграшу u_1 і u_2 і використовує цю інформацію для передбачення реакції гравця 2. Гравець 2 (*підлеглий*) сприймає стратегію гравця 1 як задану екзогенно (ззовні) і максимізує власний виграш (обираючи свою максимізуючу стратегію). Таким чином, гравець 1, маючи перший хід і передбачаючи "розумність" реакцій на нього гравця 2, сам, поступаючи "розумно", буде розв'язувати задачу (5.2.7). Розглянемо приклад 5.2.8 (табл. 5.2.22). Знайдемо 1-рівновагу Штакельберга (1-лідер, 2-підлеглий, 1 – знає u_1 і u_2, 2 – лише u_2). На фіксовану стратегію першого a_1 другий вибере свою максимізуючу стратегію c_2; $b_1 \to b_2$, c_2; $c_1 \to b_2$. Таким чином, для вибору своєї найкращої стратегії 1 гравець повинен розглядати лише ситуації (a_1, c_2), (b_1, b_2), (b_1, c_2), (c_1, b_2) (це і є множина R_2). Він, звичайно, обере (b_1, c_2) (на R_2 максимум u_1 досягається у b_1). Отже, 1-рівновагою Штакельберга є (b_1, c_2) ($ШE_1 = \{(b_1, c_2)\}$). Аналогічно, фіксуючи a_2, знаходимо максимізуючі стратегії першого гравця (це b_1), $b_2 \to a_1$, $c_2 \to b_1, c_1$. Шукаємо на ситуаціях $R_2 = \{(b_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, c_2), (c_1, c_2)\}$

максимізуючі стратегії другого гравця, отримуємо 2 – рівновагу Штакельберга $ШЕ_2 = \{(c_1, c_2)\}$. Отже, при несиметричному розподілі інформації вибір обома гравцями буде детермінованим у першому випадку (лідер – 1) – (b_1, c_2) і у другому (лідер – 2) – (c_1, c_2). Звернемо увагу, що лідер – 1 при розумному підлеглому може забезпечити собі лише 3 одиниці виграшу, хоча потенційно він міг отримати і 4 ((b_1, a_2)) і 5 ((a_1, b_2)). Аналогічно маємо для лідера – 2. Звичайно, множина 1-рівноваг Штакельберга може містити більше ніж один елемент і тоді множина вибору скорочується, але неоднозначність залишається.

Таблиця 5.2.22

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 3	5, 1	1, 5
b_1	4, 1	2, 2	3, 2
c_1	1, 1	2, 4	3, 3

Принцип поведінки гравців, що описується визначенням 5.2.8, нагадує процес виключення домінованих стратегій. Наступний результат показує, що рівновага Штакельберга зводиться до складних рівноваг при відповідному перетворенні початкової гри.

Лема 5.2.7. Нехай $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$ – скінченна гра двох осіб, причому функції u_1 і u_2 взаємно однозначні на $X_1 \times X_2$. Тоді існує єдина 1 – рівновага Штакельберга, яку позначимо $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Розглянемо таку гру $\tilde{G} = (X_1, X_2^{X_1}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$: $X_2^{X_1}$ утворюється відображенням

$$\eta:\ X_1 \to X_2; \forall\ x_1 \in X_1,\ \forall\ \eta \in X_2^{X_1},\ \tilde{u}_i(x_1, \eta) = u_i(x_1, \eta(x_1)).$$

Тоді гра $\tilde{G}$ розв'язна за домінуванням, причому єдиною складною рівновагою є $(\tilde{x}_1, \tilde{\eta})$, де $\tilde{\eta}$ – стратегія найкращих відповідей гравця 2, і $\tilde{\eta}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Доведення. Існування та єдиність 1-рівноваги Штакельберга випливає зі взаємної однозначності u_1 на $X_1 \times X_2$. У грі $\tilde{G}$ стратегія найкращих відповідей $\tilde{\eta}$ другого гравця є її домінуючою стратегією:

$$\tilde{u}_2(x_1, \tilde{\eta}) = \sup_{x_2 \in X_2} u_2(x_1, x_2) \geq u_2(x_1, \eta(x_1)) = \tilde{u}_2(x_1, \eta), \forall\ x_1 \in X_1, \forall\ \eta \in X_2^{X_1}.$$

Перед другим раундом виключення домінованих стратегій гравець 1 є учасником гри $\left(X_1^1, \{\overline{\eta}\}, u_1, u_2\right)$, у якій його єдина домінуюча стратегія визначається так:

$$\tilde{u}_1\left(x_1^*, \overline{\eta}\right) = u_1\left(x_1^*, \overline{\eta}\left(x_1^*\right)\right) \geq u_1\left(x_1, \overline{\eta}\left(x_1\right)\right) = \tilde{u}_2\left(x_1, \overline{\eta}\right) \text{ для } \forall \ x_1.$$

У силу взаємної однозначності u_2 графік відображення $\overline{\eta}$ збігається з R_2. Отже, $\left(x_1^*, \overline{\eta}\left(x_1^*\right)\right)$ є 1 – рівновага Штакельберга і $x_1^* = \overline{x}_1$, $\overline{\eta}\left(x_1^*\right) = \overline{x}_2$.♦

Відмітимо, що існування *i*-рівноваги Штакельберга можна гарантувати при звичайних передумовах (X_i – компактні, u_i – неперервні). Однак лема 5.2.7 безпосередньо не узагальнюється.

Контрольні завдання до § 2

1. Знайти множини складних рівноваг (SE), рівноваг Неша (NE), сильних рівноваг Неша (SNE), *i*-рівноваг Штакельберга (ШЕi):

1.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 0	1, 1	2, 1
b_1	1, 5	0, 5	1, 4
c_1	5, 1	1, 2	2, 2

1.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	3, 2	3, 3
b_1	2, 2	3, 3	1, 3
c_1	3, 1	2, 4	4, 2

1.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 4	1, 3	3, 4
b_1	2, 5	3, 3	4, 3
c_1	1, 1	4, 2	4, 2

1.4

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 1	1, 3	3, 2
b_1	1, 3	2, 2	3, 1
c_1	3, 2	2, 3	3, 3

2. Дослідити рівноваги Неша на ефективність за ризиком і виграшем:

2.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	7, 5	3, 5
b_1	5, 3	5, 7

2.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	5, 3	3, 3
b_1	2, 2	4, 4

2.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	5, 5	1, 5
b_1	5, 1	5, 5