Розділ 5
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

Конфлікти притаманні життю людини на всіх рівнях її буття – міждержавному (ідеологічні, економічні, воєнні конфлікти), усередині суспільства між окремими групами (між поколіннями чи політичними партіями), між окремими людьми (у трудовому колективі, у сім'ї). Основа конфліктів – незбігання інтересів двох або більше сторін. При цьому незбігання інтересів може бути як абсолютним, антагоністичним (виграш однієї сторони досягається за рахунок програшу протилежної), так і не антагоністичним, при якому інтереси сторін не є ні строго протилежними, ні такими, що повністю збігаються (виробник–споживач, викладач–студент тощо). Завдання політиків, економістів, кожної людини, зокрема, – уміти "розумно" розв'язувати конфлікти, по можливості не вибираючи крайніх форм (війна, бійка, відрахування студента з навчального закладу). Для розв'язання конфлікту (та ще й "розумного") потрібно перш за все вміти його описувати ("формалізувати") та проводити аналіз. Цим займаються соціологи, психологи, економісти, формалізуючи, аналізуючи й рекомендуючи ті або інші дії для розв'язання конфлікту. Займаються цим і математики, будуючи математичні моделі та створюючи засоби їхнього аналізу. Особливо інтенсивно розвивається цей напрям у математиці і, у першу чергу, у прикладній математиці, у другій половині XX ст.

Сітка Томаса–Кілмана. Перед тим як розглянути основні математичні результати, отримані у цій галузі, розглянемо так звану сітку Томаса–Кілмана (рис. 5.1.1), запропоновану у 1972 р.

У сітці Томаса–Кілмана на описовому рівні стверджується, що всі види розв'язання конфліктів між людьми зводяться до п'яти способів, які визначаються чотирма видами дій сторін. Томас і Кілман наводять типові ситуації, у яких потрібно застосовувати певний стиль дій.

Конкуренція:

- ✓ результат конфлікту дуже для вас важливий;
- ✓ ви маєте достатню владу;
- ✓ ви маєте авторитет;
- ✓ у вас немає іншого вибору;
- ✓ ви знаходитесь у критичній ситуації.

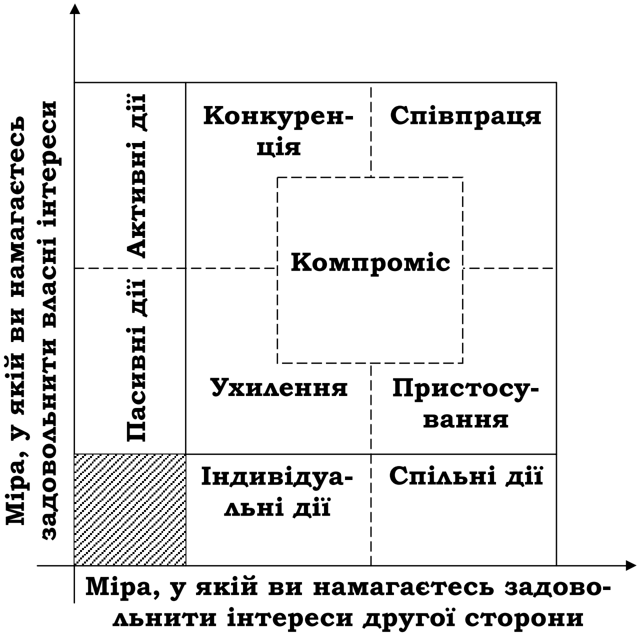

Рис. 5.1.1

Ухилення:

✓ результат для вас не дуже важливий;

✓ ви відчуваєте, що не можете вирішити конфлікт на свою користь;

✓ ви хочете виграти час;

✓ ситуація дуже складна;

✓ у вас недостатньо влади.

Пристосування:

✓ вас не дуже хвилює конфлікт;

✓ ви хочете зберегти мир;

✓ ви розумієте, що не праві;

✓ у вас мало шансів перемогти;

✓ ви розумієте, що вирішити конфлікт на свою користь набагато важливіше для іншої сторони.

Співпраця:

✓ у вас взаємозалежні стосунки;

✓ усі сторони мають рівну владу;

✓ усі можуть викласти свої інтереси та вислухати іншу сторону.

Компроміс:

✓ ви хочете прийти до розв'язання конфлікту швидко;

✓ ви хочете отримати хоча б щось (максимально можливе у даній ситуації);

✓ інші підходи виявились неефективними.

Не дивлячись на нечіткість в описанні сітки Томаса–Кілмана, вона цікава в декількох пунктах. По-перше, вона дає певну класифікацію конфліктних ситуацій, які постійно виникають у житті людини. По-друге, вона пов'язує дії (стратегії) людей із ситуаціями. По-третє, вона у якомусь ступені пов'язує міру (інтенсивність) досягнення результатів із обраними стратегіями, які, у свою чергу, приводять до тієї чи іншої ситуації. При побудові математичних моделей ігрових ситуацій кожен із відмічених моментів буде чітко описано та формалізовано.

Постановка задачі. Нехай $N=\{1,2,\dots,n\}$ – множина гравців (агентів), n – їхня кількість. Грою $G=(X_i,u_i;i\in N)$ у *нормальній формі* назвемо сукупність, яка містить для кожного гравця $i\in N$:

✓ множину *стратегій* X_i, елементи якої позначають через x_i;

✓ *"виграші"* гравців $u_i(x)$, $i\in N$, – функції, які визначені на множині *ситуацій* гри $X_N=\prod_{i\in N} X_i$ (виграші максимізуються або мінімізуються, якщо вони є програшами гравця).

§ 1. Некооперативна поведінка ізольованих гравців

Розглянемо спочатку випадок, коли гравці діють *ізольовано*, тобто кожен із них обирає свою стратегію незалежно, вони не обмінюються інформацією, на вибір гравців не впливає минуле (початкова позиція або передісторія партії гри). Будемо також вважати, що кожен гравець знає лише свою цільову функцію виграшу, значення якої він може обчислити після вибору своїх стратегій іншими учасниками.

Недоміновані та домінуючі стратегії. Позначимо через $x_{N\backslash i}$ вектор x без i-ї компоненти, тобто $x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash i}=\prod_{j\in N\backslash\{i\}} X_j$ (сукупність стратегій усіх гравців за виключенням фіксованого i-го).

Визначення 5.1.1. Стратегія $x_i\in X_i$ гравця *i домінує* його стратегію $y_i\in X_i$, якщо:

$$u_i\left(x_i,x_{N\backslash i}\right)\ge u_i\left(y_i,x_{N\backslash i}\right),\ \forall x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash i};$$

$$\exists\tilde{x}_{N\backslash i}\in X_{N\backslash i}: u_i\left(x_i,\tilde{x}_{N\backslash i}\right)> u_i\left(y_i,\tilde{x}_{N\backslash i}\right).$$

Таким чином, стратегія *i*-го гравця x_i домінує його стратегію y_i (позначатимемо це як $x_i \succ y_i$), якщо при виборі стратегії x_i значення його цільової функції є не гіршим за значення цільової функції при виборі стратегії y_i при довільних виборах своїх стратегій усіма іншими гравцями, при чому хоча б для одного набору стратегій інших гравців значення цільової функції для стратегії x_i є кращим, ніж для стратегії y_i. Іншими словами, обираючи стратегію x_i, гравець не погіршує свій виграш порівняно з вибором стратегії y_i, причому хоча б в одному випадку значення цільової функції покращується.

Визначення 5.1.2. Стратегія $x_i \in X_i$ гравця *i* називається *домінуючою* стратегією, якщо: $u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \geq u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right)$, $\forall\, y_i \in X_i$, $\forall\, x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Множину домінуючих стратегій *i*-го гравця позначатимемо через D_i.

Розглянемо приклад 5.1.1:

$X_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ – стратегії 1-го гравця, $X_2 = \{a_2, b_2, c_2, d_2\}$ – другого. У клітинах таблиці перше число є виграшем першого гравця, друге – другого (див. табл. 5.1.1).

Таблиця 5.1.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2	d_2
a_1	3, 2	5, 1	2, 1	3, 1
b_1	3, 1	4, 2	2, 1	3, 1
c_1	2, 1	3, 1	2, 1	2, 1

У фіксованій ситуації (x_1, x_2) виграш гравців знаходиться у клітині, яка визначається стратегією x_1 першого гравця та стратегією x_2 – другого. Так, виграш у ситуації (b_1, b_2) рівний $(4, 2)$ – 4 одиниці має перший, 2 – другий ($u_1(b_1, b_2) = 4$, $u_2(b_1, b_2) = 2$). Порівняємо стратегії a_1 і b_1 1-го гравця. Маємо:

$$u_1(a_1, a_2) = u_1(b_1, a_2) \ (3 = 3),\ u_1(a_1, b_2) > u_1(b_1, b_2) \ (5 > 4),$$

$$u_1(a_1, c_2) = u_1(b_1, c_2) \ (2 = 2),\ u_1(a_1, d_2) = u_1(b_1, d_2) \ (3 = 3).$$

Отже, $a_1 \succ b_1$. Аналогічно, $a_1 \succ c_1$, $b_1 \succ c_1$. Звідси випливає, що стратегія a_1 першого гравця є домінуючою: $D_1 = \{a_1\}$.

Розглядаючи стратегії другого гравця, маємо: $a_2 \succ c_2$, $a_2 \succ d_2$, $b_2 \succ c_2, c_2 \sim d_2$. Але стратегії a_2 і b_2 "є непорівняними": $u_2(a_1, a_2) > u_2(a_1, b_2)$, але $u_2(b_1, a_2) < u_2(b_1, b_2)$. Отже, $D_2 = \varnothing$. Значення виграшів другого гравця на стратегіях c_2 і d_2 при всіх виборах першого гравця одне і теж (рівне 1). Такі стратегії називають еквівалентними ($c_2 \sim d_2$).

Визначення 5.1.3. Стратегії x_i і y_i першого гравця називаються *еквівалентними*, якщо: $u_i(x_i, x_{N\backslash i}) = u_i(y_i, x_{N\backslash i})$, $\forall\ x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$. Множину еквівалентних стратегій *i*-го гравця позначимо як E_i.

Визначення 5.1.4. Стратегія $x_i \in X_i$ *i*-го гравця називається *недомінованою*, якщо не існує стратегії $y_i \in X_i$, яка б її домінувала: $\nexists\ y_i \in X_i :\ y_i \succ x_i$. Множину недомінованих стратегій *i*-го гравця позначатимемо через HD_i.

Повертаючись до прикладу 5.1.1, маємо: $HD_2 = \{a_2, b_2\}$. Зауважимо, що, очевидно, $D_i \subseteq HD_i$ (домінуючі стратегії є частинним випадком недомінованих). Тому для прикладу 5.1.1: $D_1 = HD_1 = \{a_1\}$.

Визначення 5.1.5. Ситуація $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ називається *рівновагою у домінуючих стратегіях*, якщо x_i^* є домінуючою стратегією кожного гравця ($x_i^* \in D_i$, $\forall i \in N$). Множина $D = \prod_{i \in N} D_i$ називається множиною рівноваг у домінуючих стратегіях.

Приклад 5.1.2 (див. табл. 5.1.2). Маємо: $a_1 \sim b_1$ і $D_1 = HD_1 = \{a_1, b_1\}$. Для другого гравця: $b_2 \succ a_2$, $b_2 \succ c_2$, звідки $D_2 = HD_2 = \{b_2\}$. Отже, ситуації (a_1, b_2) та (b_1, b_2) є рівновагами у домінуючих стратегіях.

Таблиця 5.1.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 1	3, 2	4, 2
b_1	2, 2	3, 3	4, 1

Підведемо підсумок. По-перше, для знаходження домінуючих та недомінованих стратегій кожному гравцю досить знати лише свою функцію виграшу та спостерігати за вибором стратегій усіма іншими гравцями для формування ситуації, від якої залежить його виграш. По-друге, "розумний" гравець (точніше "раціонально мислячий") ніколи не буде вибирати домінованих стратегій – адже при їхньому виборі, він може лише втратити! По-третє, рівновага у домінуючих стратегіях є "розумним" розв'язком задачі колективного прийняття рішень (якщо кількість елементів множини D більша за одиницю, то можна вибирати будь-який – адже всі вони еквівалентні для кожного гравця).

На жаль, в абсолютній більшості практично цікавих задач $D = \varnothing$. Тому, все, що залишається "розумним" гравцям, це відкидати свої доміновані стратегії, будуючи множини HD_i, $i \in N$. У випадку скінченності множини стратегій X_i існування непорожніх множин недомінованих стратегій HD_i очевидне. У більш загальнішому при досить слабких припущеннях можна також довести непорожність HD_i.

Лема 5.1.1. Нехай множини стратегій X_i, $i \in N$, компактні та в кожній з них існує зліченна, скрізь щільна підмножина. Нехай також функції виграшів U_i, $i \in N$, неперервні. Тоді множини HD_i недомінованих стратегій кожного гравця непорожні.

Доведення. Для кожного $j \in N$ виберемо ймовірнісний розподіл p_j на X_j таким чином, щоб непорожня відкрита підмножина X_j мала додатну міру (можливість цього випливає з другої умови, накладеної на множини стратегій). Зафіксуємо i й розглянемо функцію ψ_i, визначену на X_i:

$$\psi_i(x_i) = \int\limits_{X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}), \text{ де } p_{N\setminus i} \text{ – добуток } p_j,\ j \neq i.$$

Оскільки функція u_i неперервна, то неперервна і функція ψ_i, а отже, можна вибрати стратегію x_i^*, що максимізує функцію ψ_i на множині X_i.

Покажемо, що стратегія x_i^* недомінована. Дійсно, якщо існує стратегія x_i, що домінує x_i^*, то в силу неперервності функції u_i знайдеться відкрита підмножина $X'_{N\setminus i}$ множини $X_{N\setminus i}$ така, що $u_i(x_i^*, x_{N\setminus i}) < u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ для $\forall x_{N\setminus i} \in X'_{N\setminus i}$. У силу вибору p_j, $j \neq i$, маємо:

$$\int\limits_{X'_{N\setminus i}} u_i(x_i^*, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}) < \int\limits_{X'_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}). \qquad (5.1.1)$$

Оскільки $u_i(x_i^*, x_{N\setminus i}) \le u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ справедливо для $\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$, то

$$\int\limits_{X_{N\setminus i}\setminus X'_{N\setminus i}} u_i\left(x_i^*, x_{N\setminus i}\right)\, dp_{N\setminus i}\left(x_{N\setminus i}\right) \leq \int\limits_{X_{N\setminus i}\setminus X'_{N\setminus i}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right)\, dp_{N\setminus i}\left(x_{N\setminus i}\right). \quad (5.1.2)$$

Складаючи (5.1.1), (5.1.2), приходимо до протиріччя: $\psi_i\left(x_i^*\right) < \psi_i\left(x_i\right)$.♦

Лема 5.1.2. Нехай множина недомінованих стратегій $HD_i \neq \varnothing$. Тоді еквівалентні твердження: а) $D_i \neq \varnothing$; б) $D_i = HD_i$; в) $x_i, y_i \in HD_i \Rightarrow x_i \sim y_i$. Тобто, усі стратегії у множині недомінованих стратегій еквівалентні.

Доведення. Доведемо еквівалентність а) і б). Оскільки $D_i \neq \varnothing$, то недомінованою стратегією може бути лише домінуюча стратегія i, отже, $HD_i \subseteq D_i$. Оскільки включення $D_i \subseteq HD_i$ очевидне (див. вище), то з а) випливає б). Імплікація б) $\Rightarrow$ а) випливає з умови леми. Із визначення еквівалентності стратегій x_i, y_i випливає, що, якщо $x_i \in D_i \neq \varnothing$, то і $y_i \in D_i$. Якщо $x_i, y_i \in ND_i$, $x_i \neq y_i$, то оскільки $ND_i = D_i$, то $x_i, y_i \in D_i$, $x_i \neq y_i$, що неможливо.♦

У лемі 5.1.2 говориться про те, що якщо у гравця є хоча б одна домінуюча стратегія, то всі домінуючі стратегії еквівалентні і збігаються з його недомінованими стратегіями (див. приклад 5.1.2). Будемо вважати, що при "некооперативній" поведінці гравець використовує будь-яку з них. Так, у прикладі 5.1.2 першому гравцеві байдуже яку стратегію a_1 або b_1 використовувати – як у першому, так й у другому випадку перший гравець буде мати виграш у три одиниці. Але звернемо увагу на те, що при виборі першим гравцем стратегії b_1, другий гравець буде мати виграш у три одиниці, проти двох одиниць при виборі a_1. Кооперуючи свої дії, гравці можуть зупинитись на ситуації $\left(a_1, b_1\right)$, наприклад, другий гравець може пообіцяти першому половину "додаткової" одиниці свого виграшу. Якщо ж у i-го гравця немає домінуючої стратегії, то його недоміновані стратегії апріорі нееквівалентні, тому його некооперативна поведінка не може бути визначеною однозначно. Потрібна додаткова інформація, зокрема, про функції виграшу суперників, щоб визначити свою стратегію.

Сподіваємось, що читач погодився з тим, що вибір рівноваги у домінуючих стратегіях (якщо вона існує) є раціональною поведінкою ізольованих гравців. Але виявляється, що ця раціональна поведінка може бути дуже й дуже "нерозумною". Повернемось до класичної моделі "Дилема бандита" (табл. 1.1.5), що належить Льюїсу і Райфі (1957 р.).

Приклад 5.1.3 ("дилема бандита"). Спіймали двох злочинців, яких підозрюють у скоєнні групового злочину (бандитизм, за нього "дають" більше, ніж за "індивідуальний"). Їх розсадили по різних камерах, так, що домовлятись про вибір стратегій вони не можуть (обмін інформацією відсутній – гравці ізольовані). У кожного з бандитів є дві стратегії – зізнатись у злочині (З) чи не зізнаватись (Н). Таблиця виграшів (у даному випадку програшів – кожен намагається мінімізувати кількість років тюрми) у табл. 5.1.3. Отже, якщо обидва не зізнаються у злочині, то їм дадуть по 1 року ("припишуть" незначну провину), якщо ж зізнаються, то – по 10 років. Якщо ж один зізнається ("продасть" спільника), то його відпускають, другому же дають "максимум" – 25 років. Погодьтесь – ситуація реальна. Дослідимо стратегії кожного на домінованість: $З_1 \succ H_1$, $З_2 \succ H_2$ (не забуваймо, що програш потрібно мінімізувати). Отже, раціональна поведінка кожного гравця призведе до відкидання його домінованої стратегії і залишиться єдина ситуація $(З_1, З_2)$, значення функцій програшу кожного у якій рівне 10. "Раціональна" поведінка привела до точки з функцією корисності $u = (u_1, u_2) = (10, 10)$ у той час, як існувала можливість (потенційна) вибору точки $u = (1, 1)$! Зверніть увагу, що вибір ситуації $(З_1, З_2)$ не зміниться, якщо ми поміняємо наведену таблицю, наприклад, на таку (табл. 5.1.4): де "∞" – означає смертну кару (приклад 5.1.4). "Раціональна" поведінка знову приведе до ситуації $(З_1, З_2)$! Цей парадокс можна пояснити тим, що краще отримати 100 років тюрми з надією на помилування, ніж ризикувати отриманням ∞ (переходячи на стратегію $З_i$). Таким чином, в описаній ситуації єдиним раціональним (який цілком можна назвати й розумним) буде вибір гіршої (для обох!) ситуації $(З_1, З_2)$ порівняно з (H_1, H_2). Можна навести безліч життєвих прикладів, у яких саме так і відбувається "розумний" вибір – досить згадати хоча б безліч воєн, якими людство "розв'язує" конфліктні ситуації. Що ж робити, щоб виправдати назву нашого виду ("людина розумна") без лапок? Спробуємо розібратися в цьому, але спочатку визначимо поняття "вигідності" ситуації для всіх гравців у цілому.

Таблиця 5.1.3

$X_1 \backslash X_2$	H_2	$З_2$
H_1	1, 1	25, 0
$З_1$	0, 25	10, 10

Таблиця 5.1.4

$X_1 \backslash X_2$	H_2	$З_2$
H_1	1, 1	∞, 0
$З_1$	0, ∞	100, 100

Визначення 5.1.6. Ситуація $x \in X$ *домінує за Парето* ситуацію $y \in X$, якщо:

$$u_i(x) \geq u_i(y),\ \forall i \in N; \tag{5.1.3}$$

$$\exists j \in N : u_j(x) > u_j(y)\,. \tag{5.1.4}$$

Ситуація x^* називається *Парето-оптимальною* (оптимальною за Парето, ефективною), якщо вона не домінується за Парето.

Коротко умови (5.1.3), (5.1.4) будемо описувати, як *xPy*, тоді умова ефективності x^* запишеться як: $\exists x$, xPx^*, $x, x^* \in X$.

Отже, ситуація x^* є ефективною, якщо не існує іншої ситуації, у якій усі гравці мають значення виграшу, не гірші, ніж у x^*, і хоча б один гравець має краще значення функції виграшу. Множину Парето-оптимальних ситуацій позначатимемо PO.

Наведемо приклади. Нехай $u = (2, 2, 2)$, $v = (2, 2, 3)$, $w = (1, 1, 1)$. Очевидно, що *vPu*, *vPw*, *uPw* і *v* є оптимумом Парето на множині з цих векторів. Якщо перевага *u* над *w* не викликає питань (кожен із гравців має виграш при *u* строго більший, ніж при *w*), то *vPu* вимагає пояснення. Чому з погляду "усіх разом" гравців *v* кращий за *u*? Адже, перший і другий гравець мають такі самі виграші і лише третій має кращий виграш. Чому "розумні" гравці виберуть *v*, а не *u*? Тому що, по-перше, вибравши *v*, можна сподіватись, що третій гравець поділиться своїм додатковим виграшем із партнерами, по-друге, кожен із них може опинитись у ситуації третього гравця. В окремих випадках розглядається сильне домінування за Парето ($xSPy \Leftrightarrow u_i(x) > u_i(y)$, $\forall i \in N$) і визначається "слабкий оптимум за Парето" (або оптимум за Слейтером (див. Розд. 4)). Зазначимо, що в задачах багатокритеріальної оптимізації подібних питань не виникає: безумовно, вибір (2, 2, 3) є кращим за (2, 2, 2).

Повертаючись до попередньої таблиці, маємо $(H_1, H_2)P(З_1, З_2)$ (задача на мінімум), усі три ситуації (H_1, H_2), $(H_1, З_2)$, $(З_1, H_2)$ є Парето-оптимальними, але "розумна" поведінка ізольованих гравців приводить до єдиного неефективного рішення. Так що ж робити? Правильно, кооперуватись! Але для кооперації повинні мати місце певні умови й, у першу чергу, можливість обмінюватись інформацією.

Розглянемо приклад 5.1.5 (Льюіс, Райфа, 1957). Він має назву "Дилема в'язня". В'язні знаходяться в одній камері, кожен із них має дві стратегії поведінки – відноситись до сусіда миролюбно (*M*) чи агресивно (*A*). Таблиця виграшів – 5.1.5. Знову маємо: $A_1 \succ M_1$, $A_2 \succ M_2$ і отже, раціональна поведінка приводить до неефективної ситуації (A_1, A_2) із вектором виграшів $u = (1, 1)$. Але на відміну від "Дилеми бандитів" у "Дилемі в'язнів" вони можуть вести переговори про вибір ситуації

(M_1, M_2). Звичайно, можливість відхилення від цієї ситуації в кожного в'язня зберігається (перший в'язень, змінюючи стратегію M_1 на A_1, отримає додатковий виграш), зате у партнера є можливість "покарати" порушника: у разі відхилення першого, другий також змінює свою стратегію, унаслідок чого вони переходять до ситуації (A_1, A_2), невигідної їм обом. Таким чином, унаслідок наявності можливості обміну інформацією кожен із в'язнів може "стабілізувати" ситуацію (M_1, M_2) із допомогою, наприклад, "стратегії погрози" – "я буду миролюбним до тих пір, поки і ти будеш таким". Узагальнюючи дану ситуацію, можна стверджувати, що додаткова інформація може привести до виграшу всіх партнерів. Людська спільнота це розуміє, про що свідчить хоча б наявність у кожній державі розвідки. Ще один приклад 5.1.6, який показує, що ізольована поведінка гравців не дозволяє їм вибрати ефективну ситуацію. Приклад носить назву "Послуга за послугу", у ньому кожен гравець має дві стратегії – відноситись до іншого доброзичливо (*Д*) чи недоброзичливо (*Н*) (див. табл. 5.1.6). Маємо: $Д_1 \approx Н_1$, $Д_2 \approx Н_2$ і, отже, із погляду кожного з гравців байдуже, яку стратегію вибирати (така ситуація виникає, коли домінуюча стратегія не єдина – із леми 5.1.2 випливає, що усі вони еквівалентні). Але ж лише ситуація $(Д_1, Д_2)$ є ефективною. Знову без переговорів не обійтися!

Таблиця 5.1.5

X_1 \ X_2	M_2	A_2
M_1	2, 2	0, 3
A_1	3, 0	1, 1

Таблиця 5.1.6

X_1 \ X_2	$Д_2$	$Н_2$
$Д_1$	1, 1	0, 1
$Н_1$	1, 0	0, 0

Обережні стратегії. Коли кожен гравець знає лише свою цільову функцію, єдиною раціональною поведінкою кожного гравця є використання домінуючих стратегій, якщо вони існують. А що залишається, якщо рівновага у домінуючих стратегіях відсутня (найпоширеніший випадок). Тоді залишається вибирати не "абсолютно краще", а "відносно краще" – "краще з гіршого".

Розглянемо приклад 5.1.7. Як легко переконатись, стратегії кожного гравця незрівняльні між собою і початкова задача залишається "невизначеною" (див. табл. 5.1.7). Спробуємо скористатись принципом вибору "кращого з гіршого". При виборі першим гравцем стратегії a_1 у найгіршому випадку (коли другий гравець обере стратегію a_2)

він одержить 1 виграшу, b_1 – 2, c_1 – 1. Таким чином, вибираючи стратегію b_1, перший гравець гарантує собі виграш 2 одиниці (хоча при виборі a_1 він може виграти і 5, а при виборі c_1 – 4). Аналогічно, другий гравець при виборі стратегії b_2 гарантує собі 2 одиниці виграшу (вибираючи a_2, він може виграти як 4, так і 1, вибираючи c_2 – 1 і 5). Оскільки кожен із гравців нічого не знає про наміри іншого, то вибір "обережних" стратегій b_1 і b_2 гравцями можна визнати "розумним", незважаючи на те, що існують ситуації (наприклад (c_1, c_2)), у яких кожен із гравців має більший виграш. Таким чином, для "обережних" ізольованих гравців вибір у прикладі 5.1.7 є однозначним! Хоча і не "повністю розумним" із погляду спостерігача, який володіє повною інформацією (знає цільові функції обох гравців).

Таблиця 5.1.7

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 3	3, 5	5, 1
b_1	2, 4	2, 2	3, 5
c_1	3, 1	1, 2	4, 4

Визначення 5.1.7. Стратегія x_i називається *обережною* (песимістичною) стратегією i-го гравця, якщо

$$\inf_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = \sup_{y_i\in X_i} \inf_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}) = \alpha_i . \qquad (5.1.5)$$

Множину обережних стратегій i-го гравця позначимо O_i. Величина α_i називається *гарантованим результатом* (виграшем) i-го гравця. У прикладі 5.1.7: $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$.

Отже, i-ий гравець вважає, що його супротивники діють для нього найгірше і його "розумність" у такій ситуації полягає у виборі на множині своїх стратегій максимізуючої його цільову функцію стратегії.

Множина $IR = \left\{ x \in X \,\middle|\, u_i(x) \ge \alpha_i,\ \forall i \in N \right\}$ називається множиною *індивідуально-раціональних ситуацій*. Множині IR належать ситуації, у яких кожен гравець має виграш не менший за гарантований. У прикладі 5.1.7 $IR = \left\{(a_1, b_2),\ (b_1, a_2),\ (b_1, b_2),\ (b_1, c_2),\ (c_1, c_2)\right\}$.

Очевидно, що вести переговори про вибір ситуації, у якій хоча б один гравець має виграш, менший за гарантований α_i, не має сенсу.

Адже і без переговорів кожен гравець, діючи ізольовано, може отримати α_i. Очевидно також, що вести переговори про вибір домінованої за Парето ситуації не логічно (з урахуванням міркувань про ефективні рішення).

Визначення 5.1.8. Множина $\Pi = IR \cap PO$ називається *переговорною.*

Для приклада 5.1.7 $\Pi = \{(a_1, b_2),\ (b_1, c_2),\ (c_1, c_2)\}$. Відмітимо, що у множину П не ввійшли індивідуально-раціональні ситуації (b_1, a_2), (b_1, b_2), які не є ефективними, і ефективна ситуація (a_1, c_2), яка не є індивідуально-раціональною.

Визначення 5.1.9. Обережні стратегії гравців x_i, $i \in N$, називаються оптимальними, якщо набір гарантованих результатів $\alpha = (\alpha_i)_{i\in N}$, що відповідає цим стратегіям, є Парето-оптимальним. Оптимальні стратегії *i*-го гравця позначимо через OP_i. Для прикладу 5.1.7: $OP_1 = OP_2 = \varnothing$.

Розглянемо приклад 5.1.8 (табл. 5.1.8):

$O_1 = \{b_1\}$, $O_2 = \{a_2, c_2\}$, $OP_1 = \{b_1\}$, $OP_2 = \{c_2\}$, ($(b_1, c_2) \in PO$, $(b_1, a_2) \notin PO$).

Таблиця 5.1.8

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 2	2, 1	3, 3
b_1	2, 3	3, 1	4, 2

Для скінченної гри існування непорожніх множин O_i очевидне. Маємо таке твердження.

Лема 5.1.3. Нехай X_i – компактні, u_i – неперервні, $i \in N$. Тоді множини обережних стратегій O_i кожного гравця не порожні й компактні.

Доведення. Оскільки функції u_i неперервні, то функції $\Theta(y_i) = \inf\limits_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i})$ напівнеперервні зверху на X_i і для $\forall\lambda$ множини $\{y_i \in X_i \mid \Theta(y_i) \geq \lambda\} = \bigcap\limits_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}} \{y_i \in X_i \mid u_i(y_i, x_{N\setminus i}) \geq \lambda\}$ замкнені. Звідси випливає, що множина точок максимуму функцій $\Theta(y_i)$ є непорожньою і компактною множиною O_i. ♦

Уже у скінченному випадку існування оптимальних стратегій не гарантується. Що можна забезпечити в умовах леми 5.1.3 – це існування множини недомінованих стратегій кожного гравця (лема 5.1.1). Виявляється, що розумний обережний гравець (що діє обережно та відкидає свої доміновані стратегії) у багатьох випадках може гарантувати собі непорожній вибір.

Лема 5.1.4. Нехай X_i – компакти, u_i – неперервні, $i \in N$. Тоді $O_i \bigcap HD_i \neq \varnothing$, $i \in N$.

Доведення. Зафіксуємо i й розглянемо гру $\tilde{G} = \left(Y_j, u_j, j \in N\right)$, у якій $Y_j = X_j$, $j \neq i$, $Y_i = O_i$ (за лемою 5.1.3 множина $Y_i \neq \varnothing$ і компактна). За лемою 5.1.1 у грі $\tilde{G}$ i-й гравець має хоча б одну недоміновану стратегію x_i. Покладемо, що x_i домінується стратегією y_i у початковій грі, тобто $u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \leq u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right)$ для $\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Тоді маємо:

$$\Theta\left(x_i\right) = \inf_{y_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i\left(x_i, y_{N\setminus i}\right) \leq \Theta\left(y_i\right) = \inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right),$$

звідки $\Theta\left(y_i\right) = \sup_{z_i \in X_i} \Theta\left(z_i\right)$ і $y_i \in O_i$, що суперечить припущенню про недомінованість x_i у грі $\tilde{G}$. Отже, $x_i \in O_i \bigcap HD_i$. ♦

Ігри двох осіб з нульовою сумою. Окремо й коротко розглянемо *ігри двох осіб з нульовою сумою* (оскільки вони вивчаються у курсі "Методи оптимізації"), у яких $u_2\left(x_1, x_2\right) = -u_1\left(x_1, x_2\right)$ для $\left(x_1, x_2\right) \in X_1 \times X_2$.

Обережні стратегії x_1, x_2 кожного гравця визначаються співвідношеннями:

$$\inf_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2) = \sup_{y_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} u_1(y_1, x_2) = \alpha_1,$$

$$\sup_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) = \inf_{y_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, y_2) = \alpha_2.$$

Легко показати, що $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Фіксуючи довільні $\left(x_1, x_2\right) \in X_1 \times X_2$, маємо: $\phi_1\left(x_1\right) = \inf_{y_2} u_1\left(x_1, y_2\right) \leq u_1\left(x_1, x_2\right) \leq \sup_{y_1} u_1\left(y_1, x_2\right) = \phi_2\left(x_2\right)$. Звідси випливає: $\alpha_1 = \sup_{y_1} \phi_1\left(y_1\right) \leq \inf_{y_2} \phi_2\left(y_2\right) = \alpha_2$.

Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то величина α називається *ціною гри.* Якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то відповідна гра не має ціни.

Якщо для $\forall \left(y_1, y_2\right) \in X_1 \times X_2$, $u_1\left(y_1, x_2\right) \leq u_1\left(x_1, x_2\right) \leq u_1\left(x_1, y_2\right)$, то ситуація $\left(x_1, x_2\right)$ називається *сідловою точкою.* Зв'язки між сідловими точками і оптимальними стратегіями встановлює лема 5.1.5.

Лема 5.1.5. Якщо гра двох осіб з нульовою сумою має ціну, то ситуація (x_1, x_2) є парою оптимальних стратегій тоді і лише тоді, коли вона є сідловою точкою. Якщо гра не має ціни, то у ній відсутня і сідлова точка.

Доведення можна подивитись у [7].

Приклад 5.1.9. Гра двох осіб з нульовою сумою задається матрицею виграшів першого гравця (і відповідно програшів другого) (див. табл. 5.1.9). Маємо, $O_1 = OP_1 = \{b_1\}, O_2 = OP_2 = \{b_2\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$. Ситуація (b_1, b_2) є сідловою точкою: $u_1(y_1, b_2) \le u_1(b_1, b_2) \le u_1(b_1, y_2)$, $\forall y_1 \in X_1$, $\forall y_2 \in X_2$ ($\{1, 2, 1\} \le 2 \le \{3, 2, 3\}$).

Таблиця 5.1.9

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	4	1	4
b_1	3	2	3
c_1	4	1	4

Приклад 5.1.10 (Гра "Раз–два–три"). Кожен гравець вибирає одну з трьох стратегій: a ="раз", b ="два", c ="три". Виграш першого гравця додатний, якщо він правильно вгадав виграш другого гравця й нуль – у протилежному випадку. Виграш першого гравця задається матрицею (див. табл. 5.1.10). У цій грі $\alpha_1 = 0 < 1 = \alpha_2$ і гра не має ціни. $O_1 = \{a, b, c\}$, $O_2 = \{a\}$. Отже, навіть для скінченної гри двох осіб з нульовою сумою не гарантується існування сідлової точки, а, отже, і оптимальних стратегій. Відома теорема фон Неймана–Моргенштерна говорить, що гарантувати існування сідлової точки для гри двох осіб з нульовою сумою можна при "змішаному розширенні" гри (див. § 5.4) при використанні "змішаних" стратегій, які задаються імовірнісним розподілом на множині початкових ("чистих") стратегій.

Таблиця 5.1.10

$X_1 \backslash X_2$	a	b	c
a	1	0	0
b	0	2	0
c	0	0	3

Контрольні завдання до § 1

1. Знайти множини недомінованих стратегій (ND_i), рівноваг у домінуючих стратегіях (D), Парето-оптимальних ситуацій (PO), обережних стратегій (O_i), індивідуально-раціональних ситуацій (IR), переговорних ситуацій (П):

1.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 0	1, 1	2, 1
b_1	1, 5	0, 5	1, 4
c_1	5, 1	1, 2	2, 2

1.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	3, 2	3, 3
b_1	2, 2	3, 3	1, 3
c_1	3, 1	2, 4	4, 2

1.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 4	1, 3	3, 4
b_1	2, 5	3, 3	4, 3
c_1	1, 1	4, 2	4, 2

1.4

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 1	1, 3	3, 2
b_1	1, 3	2, 2	3, 1
c_1	3, 2	2, 3	3, 3

2. Знайти змішані рівноваги для таких ігрових моделей:

2.1

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 0	1, 1	2, 1
b_1	1, 5	0, 5	1, 4
c_1	5, 1	1, 2	2, 2

2.2

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3, 1	3, 2	3, 3
b_1	2, 2	3, 3	1, 3
c_1	3, 1	2, 4	4, 2

2.3

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2, 4	1, 3	3, 4
b_1	2, 5	3, 3	4, 3
c_1	1, 1	4, 2	4, 2

2.4

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1, 1	1, 3	3, 2
b_1	1, 3	2, 2	3, 1
c_1	3, 2	2, 3	3, 3