~~$x_1 + x_2 \to \max,\ 2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ -4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~4. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:~~

~~$2x_1 + x_2 \to \max,\ \ -x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 4,\ x_1 - x_2 \le 3, x_2 \le 2,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~5. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:~~

~~$3x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 3x_2 \to \max,\ -2x_1 + x_2 \le 0,\ 2x_1 + x_2 \le 8,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~6. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:~~

~~$x_1 + 2x_2 \to \max,\ 2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ -4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~7. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:~~

~~$2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 3x_2 \to \max,\ x_1 - x_2 \le 3,\ -5x_1 - 3x_2 \le -15,\ x_1 + 2x_2 \le 9.$~~

~~8. Проілюструвати побудову множини власне ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:~~

~~$x_1 \to \max,\ x_2 \to \max,\ 2x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~9. Проілюструвати побудову множини власне ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:~~

~~$x_1 \to \max,\ x_1 + x_2 \to \max,\ x_1^2 + 2x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

§ 3. Методи багатокритеріальної оптимізації

Висновок, який можна зробити з попереднього розділу, полягає в тому, що вибір альтернативи, яка буде розв'язком задачі багатокритеріальної оптимізації, потрібно робити з множини ефективних альтернатив (чи слабко-ефективних альтернатив, чи власно-ефективних альтернатив) – залежно від вимог ОПР і предметної області, у якій приймається рішення (далі, для спрощення викладання припустимо, що вибирається ефективна альтернатива).

Але яку, однак, ефективну альтернативу вибирати? Звичайно, якщо множина абсолютно-оптимальних альтернатив не є порожньою, то будь-яка з них (варто нагадати, що всі абсолютно-оптимальні альтернативи рівноцінні між собою) може вважатися розв'язком багатокритеріальної задачі. Як було з'ясовано вище, на практиці такі задачі зустрічаються дуже рідко. Таким чином, потрібно вирішити, що робити у випадку, коли множина абсолютно-оптимальних альтернатив є порожньою. Оскільки ефективні альтернативи є непорівнянними між собою за перевагою, яка задається критеріями задачі, а якимось чином їх необхідно порівняти, то для цього потрібна додаткова інформація окрім тієї, яка є при порівнянні альтернатив за кожним критерієм окремо. Точніше, для порівняння ефективних альтернатив, потрібна додаткова інформація про перевагу не на множині альтернатив, а на множині критеріїв, тобто інформація такого типу: скількома одиницями виграшу за одними критеріями можна компенсувати програшем за іншими критеріями. Джерелом такої інформації може бути як ОПР, так і специфіка предметної області, у якій розв'язується задача прийняття рішення.

Правила вибору ефективних альтернатив. Те, що в межах постановки багатокритеріальної задачі проблема вибору єдиної ефективної альтернативи не може бути розв'язаною, потребує уведення деякого правила (позначимо його через R) вибору єдиної альтернативи з множини ефективних альтернатив.

Нехай $R(X, f)$ – множина альтернатив багатокритеріальної задачі:

$$\max_{x \in X} \{ f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \},$$

яка задовольняє правилу вибору R. Сформулюємо умови, яким це правило повинно задовольняти (так звані умови раціональності, сформульовані Вільгельмом [11]).

1. Вибір повинен бути зробленим завжди, тобто $R(X, f) \neq \varnothing$.

2. Вибирається ефективна альтернатива, тобто $R(X, f) \subseteq P(X)$.

3. Єдиність вибору потрібно розуміти не буквально, що обов'язково вибрати лише одну альтернативу. Будемо вважати, що правило вибору R однозначно визначає розв'язок багатокритеріальної задачі, якщо всі альтернативи, що задовольняють цьому правилу є рівноцінними, тобто якщо x', $x'' \in R(X, f)$, то $x' \sim x''$.

4. Більше того, якщо ми вибираємо якусь альтернативу, для якої у множині альтернатив є рівноцінна, то і вона повинна вибиратися цим же правилом вибору, тобто якщо $x' \in R(X, f)$, $x'' \in X$, $x'' \sim x'$, то $x'' \in R(X, f)$.

5. Якщо розглядати дві ситуації прийняття рішення за одним і тим самим вектором критеріїв f, але на множинах альтернатив таких, що одна з множин X' є підмножиною іншої X, то вибір $R(X, f)$ із "ширшої" множини альтернатив X, якщо він належить "більш вузькій"

множині альтернатив $R(X,f) \subseteq X'$, повинен бути вибором з цієї множини. Тобто якщо $R(X,f) \cap X' \neq \varnothing$, то $R(X,f) \cap X' = R(X',f)$.

Звичайно, правил вибору, що задовольняють цим умовам, можна побудувати необмежену кількість, але в цьому немає нічого поганого, оскільки це дає можливість пристосуватися до будь-якої ОПР і специфіки предметної області. Незважаючи на такий широкий спектр різних можливих правил вибору, серед них можна виділити певні класи.

1. Правила вибору, які безпосередньо визначені на множині ефективних альтернатив, тобто $R(X,f) = R(P(X),f)$. Перевагою таких правил є їхня простота, а суттєвим недоліком – необхідність побудови всієї множини ефективних альтернатив.

2. Правила вибору, які є суперпозицією двох правил вибору: правила вибору $R'(X,f)$, що є визначеним на множині альтернатив і вибирає деяку підмножину альтернатив, яка містить як ефективні, так і неефективні альтернативи, і правила вибору $R(R'(X,f),f)$, що є визначеним на множині вже попередньо вибраних альтернатив і вибирає лише ефективну альтернативу. Такий розподіл правила вибору на два правила в деяких практичних ситуаціях дозволяє реалізувати досить ефективний вибір.

3. Діалогові процедури вибору. Цей клас правил вибору враховує той факт, що формалізація правила вибору в багатьох практичних ситуаціях прийняття рішень ускладнюється наявністю "людського" фактору. Справа в тому, що навіть припускаючи наявність у ОПР якоїсь системи переваг, може статися так, що ОПР не завжди її усвідомлює і ця система переваг може усвідомлюватися (формуватися) ОПР тільки у процесі прийняття рішення, змінюючись із часом змінюватися. Тому, якщо вибрано якусь альтернативу, її вже після вибору потрібно перевірити на відповідність перевагам ОПР (які вже можуть змінитися) і за необхідності відкоригувати правило вибору.

Ці міркування приводять до необхідності створення правил вибору у вигляді діалогової процедури, яка являє собою ітеративний процес взаємодії між ОПР і комп'ютером. Кожна ітерація i, $i = 1, 2, \ldots$, складається з двох етапів:

1. Обчислювальний етап. На цьому етапі комп'ютер використовує отриману від ОПР інформацію для побудови (корекції) правила вибору, визначає ефективну альтернативу $x^i = R^i(X,f)$ і формує допоміжну інформацію для визначення переваг ОПР.

2. Етап прийняття рішення. ОПР аналізує отриману від комп'ютера ефективну альтернативу й допоміжну інформацію. Якщо ця інформація задовольняє ОПР, то ОПР приймає рішення про вибір x^i, у про-

тилежному випадку дає нову інформацію для комп'ютера, завдяки якій буде зроблено інший вибір і т. д.

Методи багатокритеріальної оптимізації являють собою чисельну реалізацію певного правила вибору ефективної (слабко-ефективної, власно-ефективної) альтернативи, тому цілком природно класифікувати їх за типами інформації, яку дає ОПР для формування правила вибору. Розглянемо таку класифікацію:

- ✓ Методи багатокритеріальної оптимізації.
- ✓ Методи, які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв.
- ✓ Методи, які використовують один тип інформації про перевагу на множині критеріїв.
- ✓ Методи, які використовують різні типи інформації про перевагу на множині критеріїв.
- ✓ Спеціальні методи.

Згідно з цією класифікацією наведемо короткий огляд відомих методів багатокритеріальної оптимізації.

Метод ідеальної точки. Цей метод не використовує допоміжну інформацію від ОПР про перевагу на множині критеріїв. Це може відбуватися, коли у ОПР ця інформація відсутня або, за наявності, її не можна застосувати з деяких причин. У цьому випадку робиться припущення про наявність, так званого, "оптимального" розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, який може бути знайдено шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну скаляризовану (однокритеріальну) задачу.

Ідеальною називається точка $a = (a_1,\dots,a_m) \in R_s^m$, $a_i = \max\limits_{y\in Y} y_i$, $i \in M$. Правило вибору компромісу R у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Визначимо відстань $\rho_s(y,a) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |y_i - a_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}$ між точками y і a у метричних просторах R_s^m з показником метрики $s \ge 1$. Тоді, згідно з цим методом, знайдемо компромісну оцінку як розв'язок, так званої, скаляризованої задачі $y^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{y\in Y}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} |y_i - a_i|^s\right)^{1/s}$. Значення показника метрики s вибирається залежно від предметної області. На практиці в основному використовують значення $s = 1, 2, \infty$.

Вибирають $s = 2$ (Евклідів простір) у випадках, коли критерії мають зміст відстані чи інших фізичних величин, для яких Евклідова метрика є змістовною. У цьому випадку компромісна альтернатива x^* знаходиться як розв'язок скаляризованої задачі:

$$\min_{x\in X}\sum_{i\in M}(f_i(x)-a_i)^2 . \qquad (4.3.1)$$

При $s=1,\infty$ критерії можуть мати будь-який інший зміст (наприклад, вартість, надійність, тривалість) і скаляризовані задачі набудуть вигляду:

$$\min_{x\in X}\sum_{i\in M}\left|f_i(x)-a_i\right| = \max_{x\in X}\sum_{i\in M}f_i(x), \qquad (4.3.2)$$

$$\min_{x\in X}\max_{i\in M}\left|f_i(x)-a_i\right| = \max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(f_i(x)-a_i\right). \qquad (4.3.3)$$

Задача (4.3.2) вибирається, коли ОПР оцінює "відстань" до ідеалу як сумарну нев'язку за всіма критеріями і така оцінка має певний зміст у предметній області, у якій розв'язується задача (наприклад, у двокритеріальній задачі (4.3.2), де максимізуються прибуток фірми й заробітна платня її працівників, цільова функція задачі має зміст частини доходу фірми).

Задача (4.3.3) обирається, коли ОПР оцінює "відстань" до ідеалу як максимальну нев'язку за всіма критеріями (тобто за "найгіршим" за значенням показником).

Якщо критерії задачі мають різні шкали (одиниці вимірювання, масштаб), то, як правило, для задач (4.3.2), (4.3.3) їх зводять до безрозмірної шкали $[0,1]$ і розв'язують відповідно задачі:

$$\max_{x\in X}\sum_{i\in M}\overline{f}_i(x) = \max_{x\in X}\sum_{i\in M}{(f_i(x)-f_i^{\min})}\Big/{(a_i-f_i^{\min})} = \max_{x\in X}\sum_{i\in M}{f_i(x)}\Big/{(a_i-f_i^{\min})}$$

$$\max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(\overline{f}_i(x)-1\right) = \max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(\frac{f_i(x)-f_i^{\min}}{a_i-f_i^{\min}}-1\right) = \max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(\frac{f_i(x)-a_i}{a_i-f_i^{\min}}\right).$$

Варто врахувати, що для будь-якого $s\in[1,\infty)$ $R(Y)\subseteq P(Y)$ і для $s=\infty$ $R(Y)\subseteq S(Y)$. Якщо множина Y строго опукла, то $\left|R(Y)\right|=1$.

Приклад 4.3.1. Методом ідеальної точки розв'язати таку задачу:

$$\begin{aligned}
&3x_1+x_2\to\max,\\
&x_1+2x_2\to\max,\\
&x_1+x_2\le 5,\\
&0\le x_{1,2}\le 4.
\end{aligned}$$

Визначимо ідеальну точку: $a = (a_1,\ a_2) : a_i = \max\limits_{y \in Y} y_i = \max\limits_{x \in X} f_i(x)$, $i = 1,\ 2.$ На рис. 4.3.1 зображено множину альтернатив *X*; лінії рівнів першого та другого критеріїв, відповідно (1), (2); $x' = (4,\ 1)$, $x'' = (1,\ 4)$ – найкращі відповідно за першим і другим критерієм задачі альтернативи, $a_1 = 13$, $a_2 = 9$ (максимуми 1-го та 2-го критеріїв). Таким чином, $a = (13,\ 9)$. Розглянемо випадки що пов'язані з вибором різних метрик.

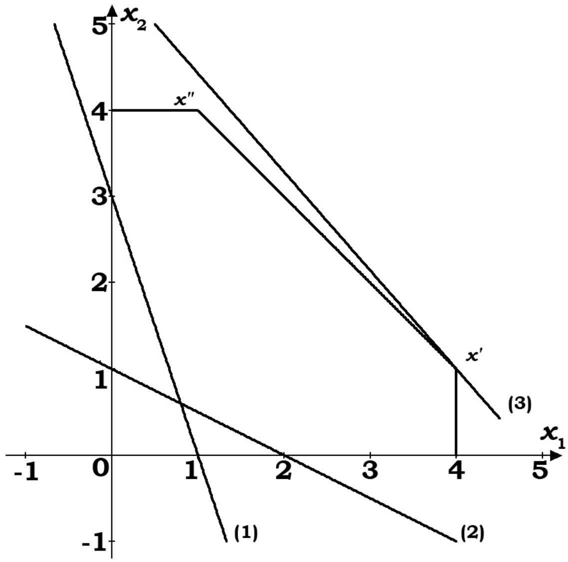

Рис. 4.3.1

Випадок 1. При $s = 1$ скаляризована задача має вигляд:

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x)}{a_i - f_i^{\min}}.$$

Із урахуванням того, що мінімальні значення критеріїв задачі дорівнюють нулю, отримаємо таку задачу лінійного програмування:

$$8x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Із рис. 4.3.1 неважко бачити, що оптимальним розв'язком скаляризованої задачі (на рис. 4.3.1 зображено лінію рівня (3) цільової функції скаляризованої задачі) буде точка $x' = (4,\ 1)$, яка і вважається шуканою ефективною альтернативою вихідної задачі.

Випадок 2. При $s=2$ скаляризована задача має вигляд: $\min\limits_{x\in X}\sum\limits_{i=1}^{m}\left(f_i(x)-a_i\right)^2$. У нашому випадку отримаємо таку задачу квадратичного опуклого програмування:

$$(3x_1+x_2-13)^2+(x_1+2x_2-9)^2\to\min,$$
$$x_1+x_2\le 5,$$
$$0\le x_{1,2}\le 4.$$

Розв'яжемо цю задачу аналітично. На рис. 4.3.2 зображено лінії рівня цільової функції скаляризованої задачі, які мають вигляд концентричних еліпсів із центром у точці $O=\left(\dfrac{17}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$, яка є точкою безумовного мінімуму цієї функції та знаходиться як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases}3x_1+x_2=13,\\ x_1+2x_2=9.\end{cases}$$

Із рис. 4.3.2 бачимо, що умовний мінімум функції досягається в точці x^*, яка знаходиться на границі множини альтернатив, що описується рівнянням $x_1+x_2=5$. Це дає можливість знайти x^* як розв'язок такої задачі квадратичного нелінійного програмування:

$$\left(3x_1+x_2-13\right)^2+\left(x_1+2x_2-9\right)^2\to\min,$$
$$x_1+x_2=5.$$

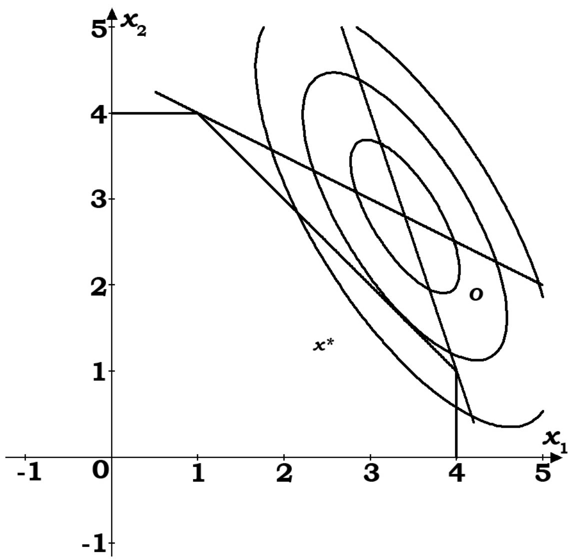

Рис. 4.3.2

Скористаємося методом множників Лагранжа. Функція Лагранжа для цієї задачі матиме такий вигляд:

$$L(x,y) = (3x_1 + x_2 + 3)^2 + (x_1 + 2x_2 - 9)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5).$$

За теоремою Куна–Таккера будемо шукати x^* як відповідну компоненту сідлової точки $(x^*,\lambda^*) = \min\limits_{x\in R^2}\max\limits_{\lambda\in R^1} L(x,\lambda)$ функції Лагранжа. Запишемо необхідні умови екстремуму функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6(3x_1 + x_2 - 13) + 2(x_1 + 2x_2 - 9) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(3x_1 + x_2 - 13) + 4(x_1 + 2x_2 - 9) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0,$$

які будуть і достатніми умовами існування сідлової точки, оскільки у нашому випадку $L(x,\lambda)$ є строго опуклою за змінними x. Отже, остаточно одержимо $x^* = \left(\dfrac{17}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

Випадок 3. При $s = \infty$ скаляризована задача має вигляд:

$$\min_{x\in X}\max_{i=\overline{1,m}}\left|a_i - \overline{f}_i(x)\right| = \min_{x\in X}\max_{i=\overline{1,m}}\left(1 - \frac{f_i(x) - f_i^{\min}}{a_i - f_i^{\min}}\right) = -\max_{x\in X}\min_{i=\overline{1,m}}\frac{f_i(x) - a_i}{a_i - f_i^{\min}}.$$

З урахуванням того, що мінімальні значення критеріїв задачі дорівнюють нулю, отримаємо таку задачу:

$$\min\left\{\frac{3x_1 + x_2 - 13}{13}, \frac{x_1 + 2x_2 - 9}{9}\right\} \to \max,$$

$$x_1 + x_2 \le 5,$$

$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рис. 4.3.3 бачимо, що лінії рівня цільової функції скаляризованої задачі мають вигляд кутів, вершини яких знаходяться на прямій $14x_1 - 17x_2 = 0$. Ця пряма задається умовою рівності аргументів функції $\min\{\ldots\}$, а бокові сторони паралельні лініям рівня (1), (2) відповідних критеріїв початкової задачі. Максимум досягається в точці $x^* = \left(2\dfrac{23}{31}, 2\dfrac{8}{31}\right)$.

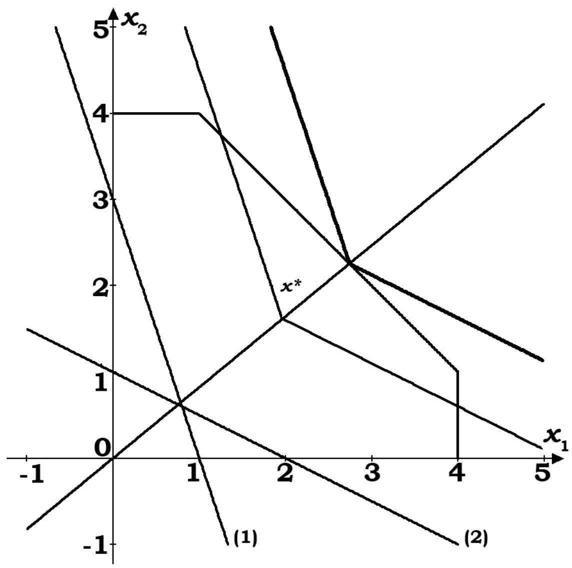

Рис. 4.3.3

Метод вибору за кількістю домінуючих критеріїв. Цей метод також не використовує допоміжну інформацію від ОПР про перевагу на множині критеріїв. Правило вибору *R* за цим методом враховує взаємні співвідношення (типу "більше" й "менше") між оцінками альтернатив і не враховує величини різниць оцінок. Метод призначений для розв'язку багатокритеріальних задач із дискретною множиною альтернатив, яка має невелику потужність (може бути перебрана за реальний час).

Нехай $q(x,\ x')$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива x' строго переважає альтернативу *x*. Покладемо $Q(x) = \max_{x' \in X} q(x,\ x')$ і визначимо $Q = \min_{x \in X} Q(x)$. Тоді за правилом вибору *R*, яке розглядається, вибираються альтернативи, які відповідають величині Q (домінуючому показнику множини *X*).

Основні властивості методу полягають: $R(X) = R(P(X))$, тобто вибір за цим методом з усієї множини альтернатив і вибір з множини ефективних альтернатив – збігаються; $R(X) \subseteq P(X)$ – метод вибирає ефективні альтернативи.

Варто зауважити, якщо $q(x,\ x')$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива x' переважає альтернативу *x*, то цей метод вибирає слабко ефективні альтернативи.

Приклад 4.3.2. За кількістю домінуючих критеріїв вибрати ефективну альтернативу в такій трикритеріальній задачі максимізації, яка описується табл. 4.3.1. Розв'язок знаходиться в табл. 4.3.2.

Таблиця 4.3.1

X	**Y**
x_1	(5, 3, 4)
x_2	(4, 5, 5)
x_3	(4, 5, 6)
x_4	(4, 5, 3)
x_5	(4, 3, 6)
x_6	(5, 3, 1)
x_7	(4, 4, 2)

Таблиця 4.3.2

x \ x'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$Q(x)$
x_1	0	2	2	1	2	0	1	2
x_2	1	0	3	0	2	1	0	3
x_3	1	0	0	0	0	1	0	1
x_4	2	3	3	0	2	0	0	3
x_5	2	3	3	2	0	2	2	3
x_6	3	2	2	2	2	0	2	3
x_7	2	3	3	3	2	1	0	3

З останньої таблиці бачимо, що $Q = \min\limits_{x \in X} Q(x) = 1$ і цьому значенню домінуючого показника множини альтернатив відповідає ефективна альтернатива x_3. Варто звернути увагу на те, як вибиралися значення, наприклад, $q(x_2, x_3) = 3$ і $q(x_2, x_4) = 0$. Дійсно, альтернатива x_3 строго переважає альтернативу x_2 за трьома критеріями, оскільки між відповідними компонентами їхніх оцінок є дві рівності й одна строга нерівність, а альтернатива x_4 строго переважає альтернативу x_2 за нульовою кількістю критеріїв, не зважаючи на те, що дві перші компоненти їхніх оцінок – рівні, жодної строгої нерівності оцінок на користь альтернативи x_4 – немає.

Метод послідовних поступок. Особливістю методу є те, що критерії багатокритеріальної задачі повинні бути попередньо впорядковані за зменшенням їхньої важливості, після чого вибір розв'язку задачі здійснюється шляхом виконання багатокрокової діалогової процедури. Діалогова процедура послідовних поступок складається з одного попереднього і m основних кроків (нагадаємо, що m – це кількість критеріїв).

0 – крок. Критерії впорядковуються за зменшенням їхньої важливості (будемо вважати, що $f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_m$) за думкою ОПР.

i – й крок ($i = \overline{1, m}$). Розв'язується однокритеріальна задача:

$$f_i(x) \to \max,$$
$$x \in G_i, \quad (G_1 \equiv X).$$

Позначимо через x^i її оптимальний розв'язок. Далі обчислюється оцінка $y^i = (f_1(x^i),\dots, f_m(x^i))$. ОПР аналізує отриману оцінку й у випадку, коли вона його не задовольняє, визначає величину поступки Δf_i за *i*-м критерієм, на яку він може погодитися з метою покращення показників за іншими, менш важливими критеріями. Якщо крок не є останнім ($i < m$), то визначається "уточнена" множина альтернатив $G_{i+1} = \left\{ x \in G_i \,\middle|\, f_i(x) \ge f_i(x^i) - \Delta f_i \right\}$ і здійснюється перехід на наступний крок. У протилежному випадку – альтернатива x^i вибирається як розв'язок багатокритеріальної задачі і процедура закінчується.

На *m-му кроці* ОПР повинна чи погодитися з отриманою альтернативою, чи повторно виконати процедуру. У цьому випадку ОПР збагачується знанням про взаємозв'язок поступок за критеріями та значеннями менш важливих критеріїв.

Варто зауважити, що метод не обмежує можливості ОПР у виборі ефективних альтернатив. Це обґрунтовується такою теоремою.

Теорема 4.3.1. (О. Вентцель). *Для будь-якого впорядкування критеріїв і будь-якої ефективної альтернативи* x^* *існує послідовність невід'ємних поступок* $\{\Delta f_i\}_{i=\overline{1,m}}$ *таких, що на останньому кроці процедури буде отримана множина ефективних альтернатив, усі елементи якої рівноцінні* x^*.

Варто зазначити, якщо на перших кроках ОПР давав великі значення поступок, то ефективна альтернатива, яку отримано в кінці процедури, може мати вищі показники за менш важливими критеріями. І навпаки, якщо ОПР намагається отримати високі показники за більш важливим критерієм, він може отримати ефективну альтернативу з неприпустимо малими показниками за менш важливим критеріям. Із цих міркувань можна зробити висновок, що дуже важливо вірно впорядкувати критерії, тоді ОПР може обмежитись аналізом попарного зв'язку критеріїв.

Серед недоліків методу варто відмітити, що лише на першому кроці методу величина поступки відповідає її фактичній величині, оскільки вона визначена на всій множині альтернатив. На наступних кроках величина поступки може бути значно меншою за її фактичну величину, оскільки вона визначається на "уточненій" множині альтернатив.

Недоліком методу є також зростання обчислювальної складності задач оптимізації з кількістю зроблених кроків, оскільки на кожному кроці додається нове обмеження. Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про впорядкування критеріїв і про діапазони значень критеріїв.

Приклад 4.3.3. Методом послідовних поступок розв'язати таку трикритеріальну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$-x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рис. 4.3.4 зображено множину альтернатив X; лінії рівнів першого та другого критеріїв, відповідно (1), (2), (3); x', x'', x''' – найкращі, відповідно за першим, другим і третім критеріями задачі, альтернативи. Будемо вважати, що критерії вже впорядковані за зменшенням їхньої важливості та знайдемо максимум першого критерію на множині альтернатив:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

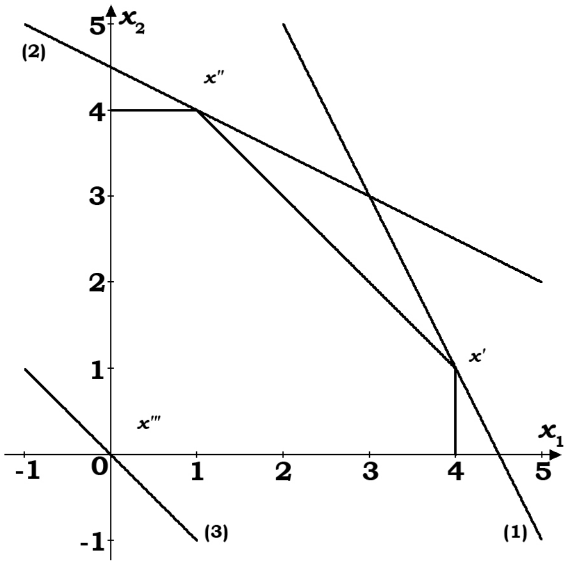

Рис. 4.3.4

Отримаємо ефективну альтернативу $x' = (4,\ 1)$, яка має оцінку $y^1 = (9,\ 6,\ -5)$. Припустимо, що отриманий результат не задовольняє ОПР. Тоді визначимо величину поступки Δf_1, на яку можна погодитися, щоб покращити значення інших критеріїв. Нехай $\Delta f_1 = 1$, "уточнена" множина альтернатив: $G_2 = \left\{x : x \in X, f_1(x) \geq y_1^1 - \Delta f_1 = 8\right\}$.

На другому кроці максимізуємо другий критерій на уточненій множині альтернатив:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$0 \leq x_{1,2} \leq 4,$$
$$2x_1 + x_2 \geq 8.$$

Із рис. 4.3.5 бачимо, що розв'язком задачі буде ефективна альтернатива $x'' = (3,\ 2)$, яка має оцінку $y^2 = (8,\ 7,\ -5)$. Припустимо, що отриманий результат також не задовольняє ОПР. Тоді визначимо величину поступки Δf_2, на яку можна погодитися, щоб покращити значення третього критерію. Нехай $\Delta f_2 = 1$ "уточнена" множина альтернатив: $G_3 = \left\{x : x \in G_2, f_2(x) \geq y_2^2 - \Delta f_2 = 6\right\}$.

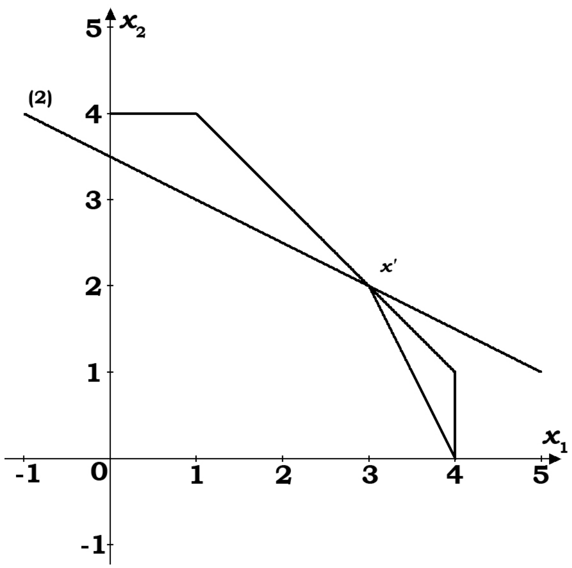

Рис. 4.3.5

Тепер (крок 3) на цій множині максимізуємо третій критерій:

$$-x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4,$$
$$2x_1 + x_2 \ge 8,$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6.$$

Звідси (це можна побачити на рис. 4.3.6) знаходимо ефективну альтернативу $x^3 = \left(\frac{10}{3};\ \frac{4}{3}\right)$, яка має оцінку $y^3 = \left(8,\ 6,\ -4\frac{2}{3}\right)$.

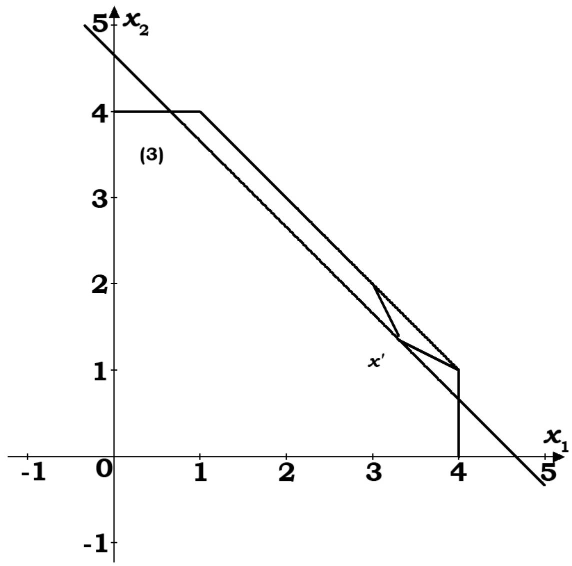

Рис. 4.3.6

Якщо ОПР не влаштовують отримані результати, вона повертається на відповідний крок, де було зроблено (на думку ОПР) невірну поступку. В іншому випадку процедура закінчується.

Метод послідовного вводу обмежень. Характерною особливістю цієї діалогової процедури є послідовне (на кожному кроці) введення обмежень на альтернативи, які мають незадовільні, із погляду ОПР, значення критеріїв.

k-й крок ($k = 1,\ 2, \ldots$). Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на "уточненій" множині альтернатив:

$$f_i^{*(k)} = \max_{x \in G_k} f_i(x), \quad i = \overline{1,m}; \quad G_1 \equiv X;$$

і формується вектор "ідеальної" оцінки на уточненій множині альтернатив: $f^{*(k)} = (f_1^{*(k)},...,f_m^{*(k)})$. Далі визначається вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(k)},...,\alpha_m^{(k)}$ так. Складається матриця $\sigma^{(k)} = (\sigma_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,m}}$ переваг ОПР на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $(\sigma_{ij}^{(k)}, \sigma_{ji}^{(k)})$ характеризує відносну важливість i -го критерію порівняно з *j*-м. Значення кожної пари елементів цієї матриці вибирається так: (8, 1) – при значній перевазі *i*-го критерію над *j*-м; (4, 1) – при значній перевазі; (2, 1) – при "звичайній" перевазі; (1, 1) – при рівноцінності критеріїв. Тепер розраховуються вагові коефіцієнти критеріїв за такою формулою: $\alpha_i^{(k)} = \left(\sum_{s=1}^{m} \sigma_{is}\right) \Big/ \left(\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}\right)$, $i = \overline{1, m}$. Унаслідок розв'язку задачі: $\max_{x \in G_k} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} f_i(x)$, визначається альтернатива x^k і її оцінка $y^k = (f_1(x^k),..., f_m(x^k))$.

ОПР аналізує отриману альтернативу й оцінку y^k шляхом її зіставлення з "ідеальною" оцінкою $f^{*(k)}$. Якщо оцінка y^k задовольняє ОПР, то процедура закінчується, а альтернатива x^k приймається за розв'язок вихідної задачі. Інакше, вказується номер $s \in \{1, ..., m\}$ критерію, значення якого найменш, на думку ОПР, його задовольняє; визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію, формується нова "уточнена" множина альтернатив $G_{k+1} = \left\{x \in G_k \,\middle|\, f_s(x) \geq \xi_s\right\}$ і здійснюється перехід на наступний крок.

Приклад 3.4. Методом послідовного вводу обмежень розв'язати таку двокритеріальну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max, \quad x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, \; x_{1,2} \geq 0.$$

На рис. 4.3.7 зображено множину альтернатив *X*; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1) і (2); $x' = \left(4\sqrt{5}/5 + 1, \; 2\sqrt{5}/5 + 1\right)$, $x'' = \left(2\sqrt{5}/5 + 1, \; 4\sqrt{5}/5 + 1\right)$ – найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

Крок 1. Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на всій множині альтернатив і отримуємо вектор "ідеальної" оцінки $f^{*(1)} \approx (7{,}5, \; 7{,}5)$. Нехай перший критерій значно переважає другий.

Тоді матриця переваг критеріїв буде мати такий вигляд: $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(1)} = \dfrac{4+1}{4+1+1+1} = \dfrac{5}{7}$, $\alpha_2^{(1)} = \dfrac{1+1}{7} = \dfrac{2}{7}$. Із задачі:

$$\frac{5}{7}(2x_1 + x_2) + \frac{2}{7}(x_1 + 2x_2) = \frac{3}{7}(4x_1 + 3x_2) \to \max,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4, \quad x_{1,2} \ge 0,$$

визначимо ефективну альтернативу $x^1 = \left(13/5,\ 11/5\right)$ і її оцінку $y^1 = (7{,}4,\ \ 7)$. Нехай ми вирішили, що внаслідок порівняння отриманої оцінки і "ідеальної" оцінки $f^{*(1)} \approx (7{,}5,\ 7{,}5)$ другий критерій набуде неприпустимо малого значення. Встановимо мінімальний рівень цього критерію $\xi_2 = 7{,}2$, отримаємо "уточнену" множину альтернатив $G_2 = \left\{ x \in G_1 \equiv X \middle| x_1 + 2x_2 \ge 7{,}2 \right\}$.

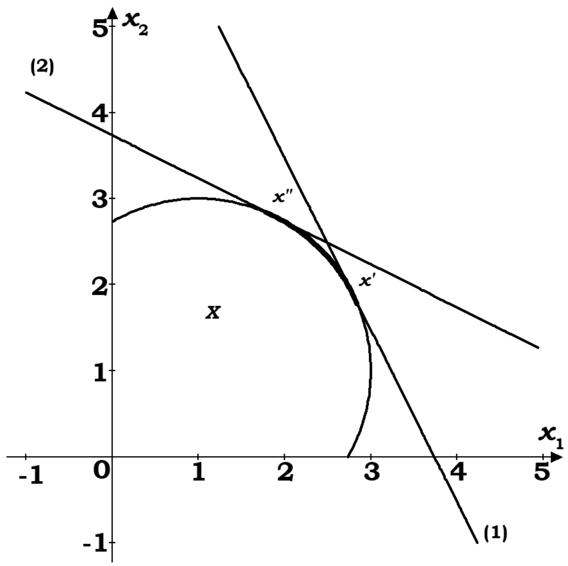

Рис. 4.3.7

Крок 2. На рис. 4.3.8 зображено множину G_2.

Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на "уточненій" множині альтернатив і отримаємо вектор "ідеальної" оцінки $f^{*(2)} \approx (7{,}28,\ 7{,}5)$. Нехай тепер критерії рівноцінні для ОПР. Тоді матриця переваг критеріїв матиме такий вигляд: $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{1}{2},\ \alpha_2^{(1)} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

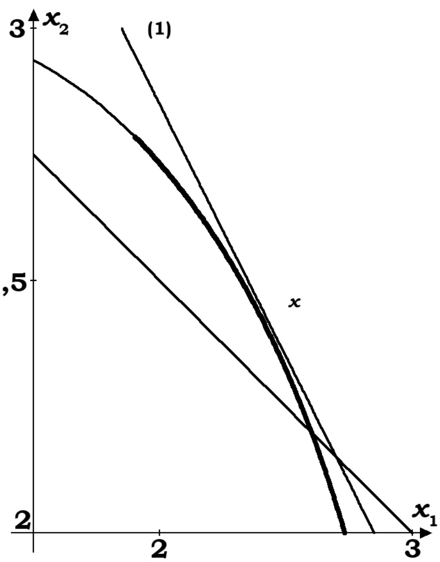

Рис. 4.3.8

Розв'язавши задачу:

$$\frac{1}{2}(2x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2) = \frac{3}{2}(x_1 + x_2) \to \max,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4,\ \ x_1 + 2x_2 \ge 7{,}2,\ x_{1,2} \ge 0,$$

визначимо ефективну альтернативу $x^2 = \left(\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}+1\right)$ і її оцінку $y^1 = \left(2\sqrt{2}+2,\ 2\sqrt{2}+2\right) \approx (4{,}82,\ \ 4{,}82)$ (на рис. 4.3.8 зображено: (1) – лінія рівня цільової функції задачі, x – розв'язок задачі). Якщо отримана ефективна альтернатива та її оцінка задовольняють ОПР, то процедура закінчується. У протилежному випадку – перехід на наступний крок.

У цьому методі можуть використовуватися й інші способи виявлення переваг $\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_m^{(k)}$ на множині критеріїв. Наприклад, нехай x^{il} – альтернатива, яка максимізує l-й критерій на множині $G_i; f_i^{*(k)}, f_i^{\min(k)}$

– відповідно найкраще та найгірше значення i-го критерію на цій множині. Далі, для $i=\overline{1,m}$, обчислюються величини: чи $\delta_i^{(k)} = \max_{l=\overline{1,m}} \frac{f_i^{*(k)} - f_i(x^{il})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}}$, чи $\delta_i^{(k)} = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{f_i^{*(k)} - f_i(x^{il})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}}$, відповідно чи максимальне, чи середнє відносне відхилення від найкращого значення i-го критерію на альтернативах, що максимізують інші критерії. Вагові коефіцієнти критеріїв визначаються за формулою:

$$\alpha_i^{(k)} = \delta_i^{(k)} \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{m} \delta_j^{(k)}\right), \quad i=\overline{1,m}.$$

Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про відносну важливість критеріїв та інформацію про діапазони значень критеріїв.

Метод бажаної точки. Особливістю цієї діалогової процедури є необхідність задання ОПР бажаних значень критеріїв для визначення переваги на множині критеріїв.

0-й крок. Розраховуються "найкращі" і "найгірші" значення критеріїв: $f_i^* = \max_{x\in X} f_i(x)$, $h_i^* = \min_{x\in X} f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, здійснюється монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i(x) = \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^* - h_i^*}, \quad i=\overline{1,m}.$$

k-й крок $(k=1,\ 2,\ldots)$. ОПР аналізує отриманий на попередньому кроці розв'язок і його оцінку порівняно з "найкращими" і "найгіршими" значеннями критеріїв і вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^k \in \left[h_i^*, f_i^*\right]$, $i=\overline{1,m}$.

Здійснюється перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду $w_i^k = \frac{f_i^* - \xi_i^k}{f_i^* - h_i^*}$, $i=\overline{1,m}$.

Обчислюються вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_i^k = \left(\prod_{j=1,j\neq i}^{m} w_j^k\right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{m} \prod_{l=1,l\neq j}^{m} w_l^k\right), \quad i=\overline{1,m}.$$

Ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі: $\max_{x\in X} \min_{i=\overline{1,m}} \rho_i^k w_i(x)$.

Обчислюється оцінка $y^k = (f_1(x^k), \ldots, f_m(x^k))$. Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо на наступний крок. Цей метод використовує тільки один тип інформації від ОПР про бажані значення критеріїв.

Приклад 4.3.5. Розв'язати методом бажаної точки таку задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 2x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ \ 0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рис. 4.3.9 зображено множину альтернатив X; лінії рівнів першого та другого критеріїв, відповідно (1), (2); $x' = (4,\ 1)$, $x'' = (1,\ 4)$ – найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

0-й крок. Обчислюємо "найкращі" і "найгірші" значення критеріїв: $f_1^* = 9$, $h_1^* = 0$, $f_2^* = 9$, $h_2^* = 0$ і здійснимо монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_1(x) = \frac{9 - 2x_1 - x_2}{9 - 0},\ w_2(x) = \frac{9 - x_1 - 2x_2}{9 - 0}.$$

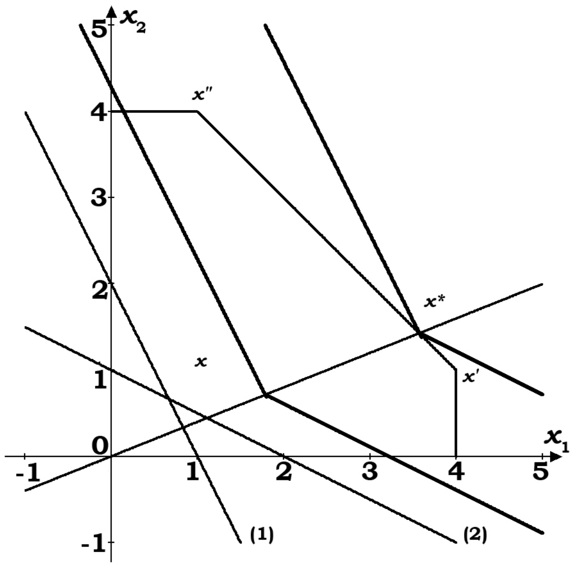

Рис. 4.3.9

Крок 1. ОПР вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^1 \in [0,\ 9]$, $i = \overline{1,\ 2}$. Нехай, наприклад, $\xi_1^1 = 3\,6/7$, $\xi_2^1 = 5\,1/7$. Здійснюємо перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду: $w_1^1 = \dfrac{9 - 3\,6/7}{9} = \dfrac{4}{7}$, $w_2^1 = \dfrac{9 - 5\,1/7}{9} = \dfrac{3}{7}$.

Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_1^1 = \frac{3/7}{3/7 + 4/7} = \frac{3}{7}, \quad \rho_2^1 = \frac{4/7}{3/7 + 4/7} = \frac{4}{7}.$$

Ефективну альтернативу x^1 знаходимо як розв'язок задачі:

$$\min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2),\ \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\} \to \max,\quad x_1 + x_2 \le 5,\quad 0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рис. 4.3.9 бачимо лінії рівнів $\frac{90}{49}$ і $\frac{180}{49}$ цієї функції, які утворюють кути вершини яких x і x^* знаходяться на прямій $2x_1 = 5x_2$, що визначається умовою рівності аргументів функції $\min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2),\ \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\}$, а бокові сторони паралельні лініям рівня відповідних критеріїв початкової двокритеріальної задачі. Рівень 180/49 буде максимальним значенням функції, а точка $x^{(1)} = x^* = (25/7,\ 10/7)$ буде оптимальним розв'язком цієї задачі. Обчислюємо оцінку $y^1 = (60/7,\ 45/7)$. Якщо отримані значення критеріїв задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо на наступний крок.

Метод задоволених вимог. Особливістю цієї діалогової процедури є визначення переваги на множині критеріїв шляхом виділення так званого "головного критерію".

k-й крок ($k = 1,\ 2, \ldots$). ОПР виділяє "головний критерій" $f_i(x),\ \ i \in \{1, \ldots, m\}$, який, на його думку, найбільш за всі інші повинен бути покращеним. Далі встановлює мінімально допустимі рівні значень інших критеріїв $\xi_j^k,\ \ j = \overline{1, m},\ \ j \ne i$. Унаслідок розв'язку однокритеріальної задачі: $\max\limits_{x \in G_k} f_i(x)$, де $G_k = \left\{x \in X \middle| f_j(x) \ge \xi_j^k,\ \ j = \overline{1, m},\ \ j \ne i\right\}$, визначається ефективна альтернатива x^k і її оцінка $y^k = (f_1(x^k), \ldots, f_m(x^k))$.

ОПР аналізує отримане значення головного критерію. Якщо воно не задовольняє його, то переходить на наступний крок, залишаючи номер головного критерію незмінним. Якщо значення головного критерію задовольняє ОПР, то він розмірковує – можливо чи ні деяке погіршення значення головного критерію з метою покращення значень інших. Якщо – "ні", то процедура закінчується. У протилежному випадку – переходить на наступний крок із метою призначити інший головний критерій.

Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про домінування одного критерію над іншими й інформацію про діапазони значень критеріїв.

Приклад 4.3.6. Методом задоволених вимог розв'язати таку трикритеріальну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$-x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рис. 4.3.10 зображено множину альтернатив X; лінії рівнів першого та другого критеріїв, відповідно (1), (2), (3); x', x'', x''' – найкращі, відповідно за 1–3 критеріями задачі, альтернативи.

Крок 1. ОПР виділяє "головний критерій", наприклад $f_2(x)$, який, на його думку, найбільш за всі інші повинен бути покращеним. Далі встановлює мінімально допустимі рівні значень інших критеріїв, наприклад, $\xi_1^1 = 7$, $\xi_3^1 = -4$.

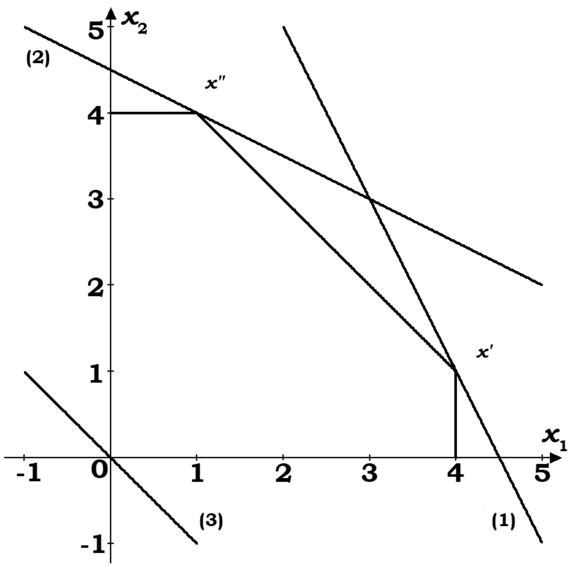

Рис. 4.3.10

Унаслідок розв'язку задачі:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 \geq 7, \quad -x_1 - x_2 \geq -4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_{1,2} \leq 4,$$

визначаються: $x^1 = x' = (2,\ 3)$; $y^1 = (7,\ 8,\ -5)$ (див. рис. 4.3.11). Якщо отримані значення не задовольняють ОПР, то можна перейти на наступний крок і змінити мінімально допустимі рівні першого та третього критеріїв. У цьому випадку зміна мінімально допустимого рівня третього критерію нічого не дасть, а зміна мінімально допустимого рівня першого критерію приведе до зміни розв'язку задачі вздовж усієї "північно-східної" границі множини альтернатив. Якщо значення головного критерію задовольняє ОПР, то він розмірковує – можливо чи ні деяке погіршення значення головного критерію з метою покращення значень інших. Якщо – "ні", то процедура закінчується. У протилежному випадку – переходить на наступний крок з метою призначити інший головний критерій.

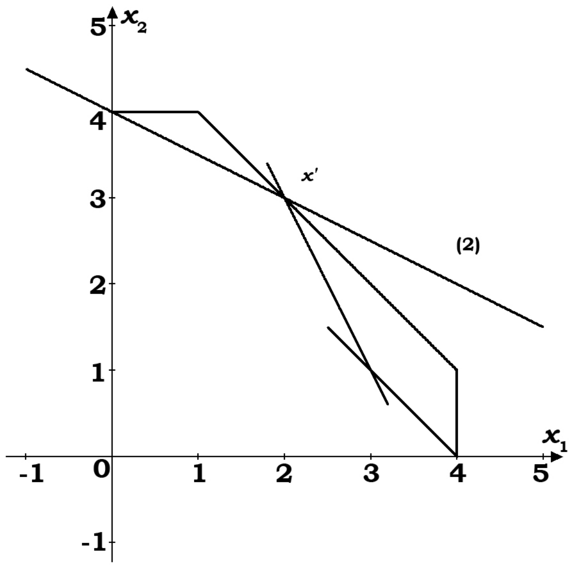

Рис. 4.3.11

Метод векторної релаксації. Ця діалогова процедура, призначена для пошуку ефективних альтернатив у задачах багатокритеріальної безумовної оптимізації такого вигляду: $\max\limits_{x \in R^n} f_i(x),\ \ i = \overline{1, m}$. Припускається, що критерії задачі є неперервно-диференційованими увігнутими функціями.

k-й крок ($k = 1, 2, \ldots$). Являє собою крок градієнтного методу для лінійної згортки критеріїв із ваговими коефіцієнтами $\alpha_1^k, \ldots, \alpha_m^k$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1$, $\alpha_i^k > 0$, $i = \overline{1, m}$, що визначаються ОПР за допомогою будь-якої процедури експертного оцінювання важливості критеріїв. Тобто $x^k = x^{k-1} + \gamma^k \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k \nabla f_i\left(x^{k-1}\right)$, початкове наближення x^0 є будь-якою точкою простору R^n; γ^k, $\gamma^k > 0$ – величина кроку, яка знаходиться з умови збільшення лінійної згортки критеріїв

$$\gamma^k = \arg\max_{\gamma \in R^1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k f_i\left(x^{k-1} + \gamma \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k \nabla f_i\left(x^{k-1}\right)\right).$$

Якщо оцінка $y^k = \left(f_1\left(x^k\right), \ldots, f_m\left(x^k\right)\right)$ знайденої альтернативи задовольняє ОПР, то процедура закінчується. У протилежному випадку переходимо на наступний крок.

Варто зауважити, що альтернативи, які генеруються цією процедурою, лише в граничному випадку будуть ефективними. Тому ОПР, коли аналізує отриману альтернативу, звертає увагу не лише на те, щоб вона відповідала його перевагам на множині критеріїв, але і наскільки вона є оптимальною за Парето. Оптимальність альтернативи оцінюється величиною:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k \nabla f_i\left(x^k\right) \right\|.$$

Приклад 4.3.7. Розв'язати методом векторної релаксації таку двокритеріальну задачу:

$$-2(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 1)^2 + x_1 x_2 - x_1 \to \max,$$

$$-(x_1 - 1)^2 - 2(x_2 - 3)^2 + x_1 x_2 - x_2 \to \max.$$

На рис. 4.3.12 зображено лінії рівнів цих функцій, жирною лінією позначено множину ефективних альтернатив. Градієнти критеріальних функцій мають такий вигляд:

$$\nabla f_1(x) = (-4x_1 + x_2 - 13,\ x_1\text{-}2x_2 + 2)^T,$$

$$\nabla f_2(x) = (-2x_1 + x_2 + 2,\ 2x_1\text{-}4x_2 + 11)^T.$$

Нехай $x^0 = (4,\ 1)^T$ – початкове наближення (на рис. 4.3.12 – це x').

Крок 1. ОПР вибирає перевагу на множині критеріїв. Нехай, наприклад, критерії рівноцінні, тобто $\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = 0{,}5$. Тоді:

$$x^1(\gamma) = x^0 + \gamma\left(\alpha_1^1 \nabla f_1\left(x^0\right) + \alpha_2^1 \nabla f_2\left(x^0\right)\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4,5 \\ 7,5 \end{pmatrix}.$$

Величину кроку знаходимо з умови найшвидшого спуску, тобто:

$$\gamma^1 = \arg\min_{\gamma}\left(\alpha_1^1 \nabla f_1\left(x^1(\gamma)\right) + \alpha_2^1 \nabla f_2\left(x^1(\gamma)\right)\right) \approx 0,25.$$

Таким чином, $x^1 = (2,84,\ \ 2,93)^T$ (на рис. 4.3.12 – це точка x''). Обчислюємо оцінку $y^1 = (1,7,\ \ 2)^T$. Якщо оцінка знайденої альтернативи задовольняє ОПР, то процедура закінчується. Оскільки градієнти критеріальних функцій у знайденій альтернативі не дорівнюють нулю (це можна як обчислити, так і побачити з рис. 4.3.12), то переходимо на наступний крок.

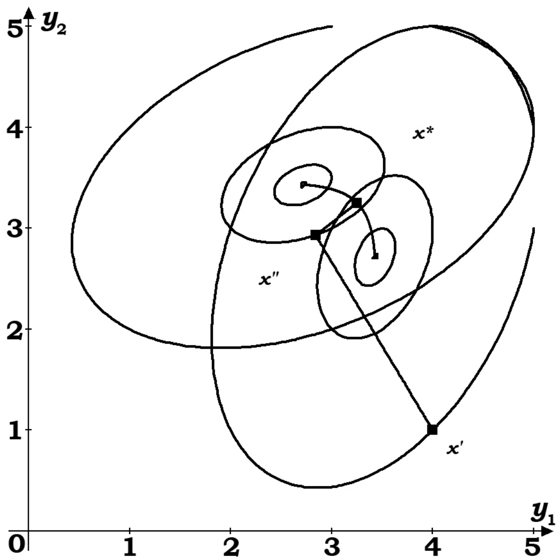

Рис. 4.3.12

Крок 2. Нехай ОПР не змінює перевагу на множині критеріїв, тоді легко переконатися (зробивши аналогічні першому кроку обчислення), що $x^2 = (3,25,\ \ 3,25)^{\mathrm{T}}$ (на Рис. 4.3.13 – це точка x^*) з оцінкою $y^2 = \left(2\tfrac{1}{8},\ \ 2\tfrac{1}{8}\right)^{\mathrm{T}}$ буде шуканою альтернативою.

Метод використовує лише один тип інформації від ОПР – інформацію про відносну важливість критеріїв.

Контрольні завдання до § 3

1. Розв'язати методом ідеальної точки ($S=1$) таку багатокритеріальну задачу:

$$2x_1+x_2\to\max,\ x_1+3x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 4,\ x_1+2x_2\le 6,\ x_{1,2}\ge 0.$$

2. Розв'язати методом ідеальної точки ($S=2$) таку багатокритеріальну задачу:

$$2x_1+x_2\to\max,\ -x_1+x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 4,\ x_2\le 2,\ x_{1,2}\ge 0.$$

3. Розв'язати методом ідеальної точки ($S=\infty$) таку багатокритеріальну задачу:

$$x_1-x_2\to\max,\ -x_1+3x_2\to\max,\ -x_1+2x_2\ge 2,\ 0\le x_1\le 2,\ 0\le x_2\le 4.$$

4. Розв'язати методом послідовних поступок таку багатокритеріальну задачу:

$$x_1\to\max,\ x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 5,\ -4x_1+x_2\le 0,\ x_1-.4x_2\le 0,\ x_{1,2}\ge 0.$$

5. Розв'язати методом послідовного вводу обмежень (варіант 1) таку багатокритеріальну задачу:

$$x_1\to\max,\ x_1+4x_2\to\max,\ 3x_1+x_2\le 9,\ x_1+3x_2\le 9,\ x_1+x_2\le 4,\ x_{1,2}\ge 0.$$

6. Розв'язати методом бажаної точки таку багатокритеріальну задачу:

$$-x_1+2x_2\to\max,\ 2x_1-x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 5,\ 0\le x_1\le 4,\ 0\le x_2\le 3.$$

7. Розв'язати методом задоволених вимог таку багатокритеріальну задачу:

$$x_1+2x_2\to\max,\ -x_2\to\max,\ 2\le x_1+x_2\le 5,\ -2\le -x_1+x_2\le 2.$$

8. Зробити вибір з урахуванням кількості домінуючих критеріїв у таку багатокритеріальній задачі:

$$-x_1+x_2\to\max,\ x_1\to\max,\ x_1+3x_2\le 6,\ x_1-3x_2\le 0,\ x_{1,2}\ge 0,\ x_{12}-\text{ціле}.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації, шкала критерію, кількісні та якісні критерії, множина досяжності.
2. Дайте визначення слабко-ефективної, ефективної, абсолютно-ефективної та власно-ефективної альтернативи.
3. Сформулюйте необхідні та достатні умови слабко-ефективності, ефективності, абсолютної ефективності та власно-ефективності.
4. Які основні типи правил вибору, сформульовані Вільгельмом?
5. Сформулюйте основну ідею методів ідеальної та бажаної точок.
6. Ідея вибору з урахуванням кількості домінуючих критеріїв.
7. Опишіть метод послідовних поступок, сформулюйте теорему Венцель.
8. Ідея методів послідовного вводу обмежень та задоволених вимог?