~~4. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:~~

~~$x_1 \to \max,\ x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ -4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~5. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:~~

~~$x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 4x_2 \to \max,\ 3x_1 + x_2 \le 9,\ x_1 + 3x_2 \le 9,\ x_1 + x_2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~6. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:~~

~~$x_1 + x_2 \to \max,\ x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ -2x_1 + x_2 \le -1,\ x_1 - x_2 \le 3,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~7. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:~~

~~$x_1 \to \max,\ -x_1 + 2x_2 \to \max,\ -x_1 + 2x_2 \le 2,\ 3x_1 - 2x_2 \le 6,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~8. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:~~

~~$x_1 \to \max,\ x_2 \to \max,\ 2x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~9. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:~~

~~$x_1 \to \max,\ x_1 + x_2 \to \max,\ x_1^2 + 2x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

~~10. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:~~

~~$x_1 + x_2 \to \max,\ x_2 \to \max,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_{1,2} \ge 0.$~~

§ 2. Умови оптимальності

У цьому розділі встановлюються умови оптимальності [10] без будь-яких істотних припущень щодо структури множини альтернатив X і властивостей заданої на ній вектор-функції критеріїв $f = (f_1, \ldots f_m)$. Для простоти й наочності викладення будемо розглядати умови оптимальності стосовно до оцінок альтернатив, маючи на увазі, що отримані результати легко переносяться і на самі альтернативи.

Теорема 4.2.1. (умови слабкої ефективності оцінок (Гермейєр)). Припустимо, що $y^0 > 0$. Оцінка y^0 є слабко ефективною тоді й тільки тоді, коли існує вектор $\mu \in M^+ = \left\{ \mu = (\mu_i)_{i \in M} \,\middle|\, \sum_{i \in M} \mu_i = 1;\ \ \mu_i > 0,\ \ i \in M \right\}$ такий, що:

$$\min_{i \in M} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \min_{i \in M} \mu_i y_i . \tag{4.2.1}$$

Для слабко ефективної оцінки $y^0 \in Y$ можна прийняти $\mu = \mu^0 \in M^+$, де μ^0 – вектор з компонентами

$$\mu_i^0 = \lambda^0 / y_i^0, \quad i \in M; \quad \lambda^0 = 1 \Big/ \sum_{k \in M} \frac{1}{y_k^0}, \qquad (4.2.2)$$

і тоді $\max\limits_{y \in Y} \min\limits_{i \in M} \mu_i^0 y_i = \lambda^0$.

Доведення. Достатність. Із рівності (4.2.1) випливає, що для кожного $y \in Y$ існує номер $i \in M$ такий, що $y_i^0 \geq y_i$. Тому $\neg \exists y \in Y : y >> y^0$. Звідси y^0 є слабко ефективною оцінкою.

Доведемо необхідність. Для цього візьмемо вектор із компонентами, які визначені формулами (4.2.2). Відмітимо, що $\mu^0 \in M^+$. З $y^0 \in S(Y)$ випливає, що для кожного $y \in Y$ існує $j \in M$, при якому виконується нерівність $y_j^0 \geq y_j$, а, отже, і нерівність $\mu_j^0 y_j^0 \geq \mu_j^0 y_j$. Оскільки $\mu_j^0 y_j^0 = \lambda^0 = 1 \Big/ \sum_{i \in M} \frac{1}{y_i^0} = \text{const}$, то $\forall y \in Y \ \min\limits_{i \in M} \mu_i^0 y_i^0 \geq \min\limits_{i \in M} \mu_i^0 y_i$. Звідси випливає (4.2.1).♦

Із рис. 4.2.1 бачимо, що $y^0 \in S(Y)$ тоді і тільки тоді, коли у внутрішність ортанта $E_{\geq 0}^m$, зсунутого у точку y^0, не потрапляє жодна точка з *Y*.

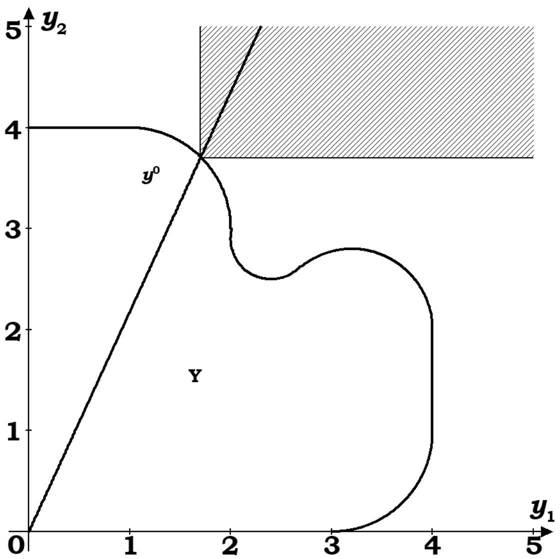

Рис. 4.2.1

Оскільки гіперповерхня $\min_{i\in M}\mu_i y_i = \lambda$ при $\lambda = 0$ і додатних μ_i представляє собою границю цього ортанта, зсув якого в y^0 можна здійснити присвоєнням відповідних значень параметрам μ_i і λ, то з'являється можливість сформульований геометричний факт виразити в термінах функції $\min_{i\in M}\mu_i y_i$. Ця можливість і реалізована в теоремі.

Приклад 1. Побудувати слабко-ефективні альтернативи за теоремою Гермейєра для такої двокритеріальної задачі:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рис. 4.2.2 зображена множина альтернатив *X*; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); x', x'' – найкращі відповідно за першим і другим критерієм альтернативи.

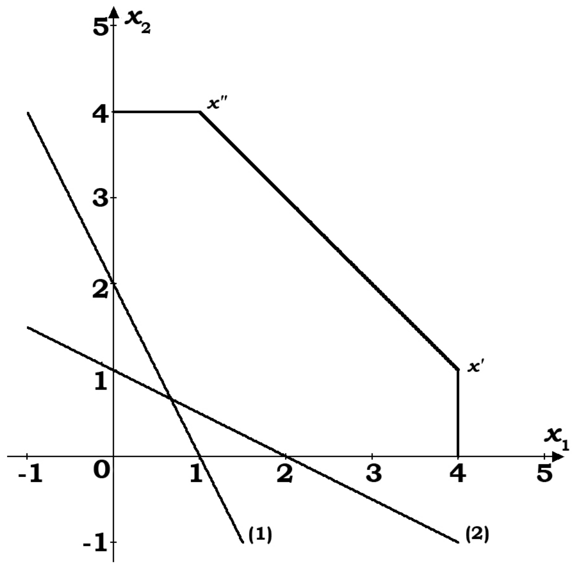

Рис. 4.2.2

За визначенням можна встановити, що множиною слабко ефективних альтернатив буде відрізок $[x', x'']$. Спробуємо побудувати якісь слабко ефективні альтернативи. За теоремою Гермейєра для того, щоб альтернатива x^* була слабко ефективною альтернативою, необхідно й достатньо:

$$\exists\mu \in M^+ = \left\{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) : \mu_i > 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\right\}$$

і тоді альтернатива x^* буде розв'язком такої параметричної задачі: $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{i=\overline{1,m}} \mu_i f_i(x)$.

Для нашого прикладу ця задача матиме такий вигляд:

$$F(x, \mu) = \min\{\mu_1(2x_1 + x_2), \mu_2(x_1 + 2x_2)\} \to \max,$$

$$x_1 + x_2 \le 5,\quad 0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Зафіксуємо вектор параметрів $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in M^+$, наприклад, нехай $\mu_1 = \mu_2 = \dfrac{1}{2}$, і розв'яжемо графічно параметричну задачу. Для цього побудуємо лінію рівня її цільової функції. Наприклад, сталому значенню функції 2 буде відповідати множина векторів $x = (x_1, x_2)$, задана рівнянням: $F(x, (0{,}5,\ 0{,}5)) = \min\{0{,}5(2x_1 + x_2),\ 0{,}5(x_1 + 2x_2)\} = 2$.

Для побудови цієї множини розглянемо такі випадки: якщо $x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 < \dfrac{1}{2}x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 < x_2$ (півплощина, що знаходиться над бісектрисою прямого кута), то рівняння набуде вигляду: $2x_1 + x_2 = 4$; якщо $x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \ge \dfrac{1}{2}x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \ge x_2$ (півплощина, що знаходиться під бісектрисою прямого кута), то рівняння набуде вигляду: $x_1 + 2x_2 = 4$. На рис. 2.3 можна побачити лінію рівня цільової функції параметричної задачі, яка має вигляд кута, вершина якого знаходиться в точці x на прямій $x_1 = x_2$, що задається умовою рівності аргументів функції $F\left(x, \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right)$, а бокові сторони цього кута паралельні лініям рівня відповідних критеріїв (1) і (2). Для того, щоб побачити, куди є спрямованим субградієнт функції (використовуємо поняття субградієнта, оскільки $F(x, \mu)$ є недиференційованою функцією), візьмемо більший її рівень, наприклад, 3,75, і побудуємо лінію цього рівня. У цьому випадку отримаємо: якщо $x_1 < x_2$, то $2x_1 + x_2 = 7{,}5$; а якщо $x_1 \ge x_2$, то $x_1 + 2x_2 = 7{,}5$.

Із рис. 4.2.3 бачимо, що лінія рівня 3,75 цільової функції параметричної задачі також матиме вигляд кута, вершина якого знаходиться вже в точці x^* і також на прямій $x_1 = x_2$, що задається умовою рівності аргументів функції $F\left(x,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$, а бокові сторони цього кута також паралельні лініям рівня відповідних критеріїв (1) і (2). Цей рівень 3,75 і буде максимальним значенням $F\left(x,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$, а точка $x^* = (2{,}5,\ 2{,}5)$ буде оптимальним розв'язком параметричної задачі і за теоремою Гермейєра слабко-ефективною альтернативою початкової двокритеріальної задачі.

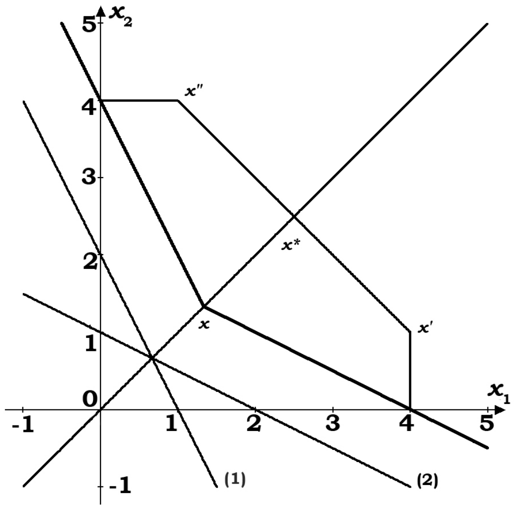

Рис. 4.2.3

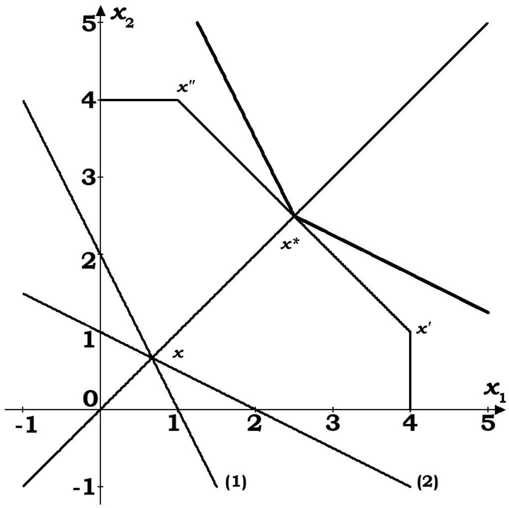

Рис. 4.2.4

Спробуємо тепер поміняти вектор параметрів $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in M^+$ на інший, наприклад, $\mu_1 = \frac{3}{7}$, $\mu_2 = \frac{4}{7}$, і подивимось, яку слабкоефективну альтернативу отримаємо в цьому випадку.

Цільова функція параметричної задачі тепер матиме вигляд:

$$F\left(x,\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right)\right) = \min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2),\ \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\}.$$

На рис. 4.2.5 бачимо лінії рівнів $\frac{90}{49}$ і $\frac{180}{49}$ цієї функції, які утворюють кути, вершини яких x і x^* знаходяться на прямій $2x_1 = 5x_2$, яка визначається умовою рівності аргументів функції $F\left(x,\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right)\right)$, а бокові сторони паралельні лініям рівня відповідних критеріїв початкової двокритеріальної задачі. Рівень $\frac{180}{49}$ буде максимальним значенням функції, а точка $x^* = \left(\frac{25}{7},\frac{10}{7}\right)$ буде оптимальним розв'язком параметричної задачі і за теоремою Гермейєра слабко-ефективною альтернативою початкової дво-критеріальної задачі. Якщо порівняти випадки задання різних параметрів $\mu = (\mu_1,\mu_2) \in M^+$, то можна підтвердити висновок теореми Гермейєра, що таким чином можна отримати будь-яку слабко-ефективну альтернативу цієї задачі.

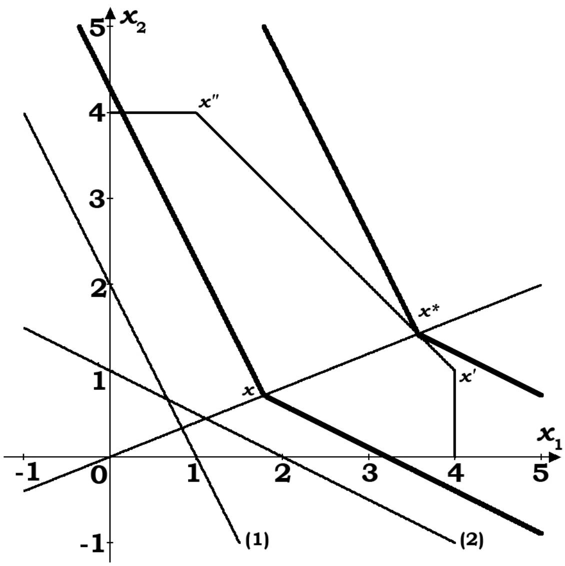

Рис. 4.2.5

Теорема 4.2.2. (умова ефективності оцінок (Подіновський)). Оцінка y^0 ефективна тоді і тільки тоді, коли для кожного $i \in M$

$$y_i^0 = \max_{y \in Y^i} y_i, \qquad (4.2.3)$$

де

$$Y^i = \left\{ y \in Y \middle| y_j \geq y_j^0,\ j \in M;\ j \neq i \right\}. \qquad (4.2.4)$$

Якщо $y^0 \in Y$ ефективна, то вона є єдиною в Y точкою, що задовольняє (4.2.3) при кожному $i \in M$.

Доведення. Доведемо достатність. Нехай $y_i^0 = \max\limits_{y \in Y^i} y_i$. Припустимо супротивне, що $y^0 \notin P(Y)$. Тоді знайдеться така оцінка $y \in Y$, що $y_i \geq y_i^0$, $\forall i \in M$; $\exists j \in M : y_j > y_j^0$. Таким чином, $y \in Y^i$, $y_i > y_i^0$. Звідси випливає, що $y_i^0 < \max\limits_{y \in Y^i} y_i$. Одержали суперечність.

Доведемо необхідність. Нехай $y^0 \in P(Y)$. Побудуємо множини Y^i, $\forall i \in M$, за умовами (4.2.4). Помітимо, що $Y^i \neq \varnothing$, $\forall i \in M$. Припустимо супротивне, що $\exists i \in M : y_i^0 < \max\limits_{y \in Y^i} y_i$. Тоді для оцінки $y^* \in Y^i$, $y_i^* = \max\limits_{y \in Y^i} y_i$ маємо $y_j^* \geq y_j^0$, $\forall j \in M$; $y_i^* > y_i^0$. Звідси, за означенням ефективної оцінки, одержимо $y^0 \notin P(Y)$.♦

Варто зауважити, що досить неконструктивну умову (4.2.3) теореми Подіновського можна значно послабити, якщо множина оцінок задачі буде строго опуклою. Цей факт у термінах альтернатив формалізує така теорема.

Теорема 4.2.3. Нехай множина альтернатив X є опуклою, а $f(x)$ є строго увігнутою вектор-функцією. Для ефективності альтернативи x^* необхідно й достатньо, щоб існував вектор $\mu \geq 0$, при якому

$$\left\langle \mu, f\left(x^*\right)\right\rangle = \max_{x \in X} \left\langle \mu, f(x)\right\rangle .$$

Приклад 5. Побудувати ефективні альтернативи за теоремою Подіновського для такої двокритеріальної задачі:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \leq 4, \quad 3x_1 + x_2 \leq 9, \quad x_{1,2} \geq 0.$$

На рис. 4.2.6 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого та другого критеріїв, відповідно (1) і (2); x', $[x'', x''']$ – найкращі відповідно за першим й другим критерієм задачі альтернативи (через $[x'', x''']$ позначений відрізок прямої $3x_1 + x_2 = 6$ між точками x'', x'''). За визначенням можна встановити, що множиною ефективних альтернатив буде відрізок $[x', x'']$ прямої $x_1 + x_2 = 5$. Побудуємо ефективні альтернативи за теоремою Подіновського. Запишемо параметричну задачу для деякого $i = \overline{1, m}$:

$$f_i(x) \to \max$$
$$f_j(x) \ge \xi_j,\ j = \overline{1,m}, j \ne i,$$
$$x \in X,$$

де $\xi_j \in \left[d_j, h_j\right]$, $d_j = \min\limits_{x \in X} f_j(x)$, $h_j = \max\limits_{x \in X} f_j(x)$, $j = \overline{1,m}$.

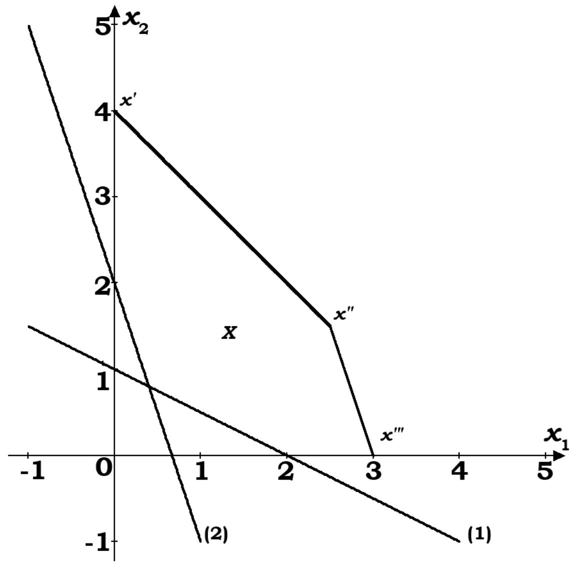

Рис. 4.2.6

При $i = 1$ ця задача набуде такого вигляду:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 3x_2 \ge \xi_2,\quad \xi_2 \in [0,\ 9],$$
$$x \in X.$$

Зафіксуємо значення параметра $\xi_2 = 6$. Із рис. 4.2.7 бачимо, що ξ_2 буде відповідати оптимальному розв'язку параметричної задачі $x^* = (1,\ 3)$, який буде ефективною альтернативою початкової двокритеріальної задачі. Вибираючи інші значення параметра $\xi_2 \in [0,\ 9]$, можемо отримати будь-яку ефективну альтернативу. Нехай тепер $i = 2$, тоді параметрична задача набуде такого вигляду:

$$3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \ge \xi_1,\quad \xi_1 \in [0,\ 8],$$
$$x \in X.$$

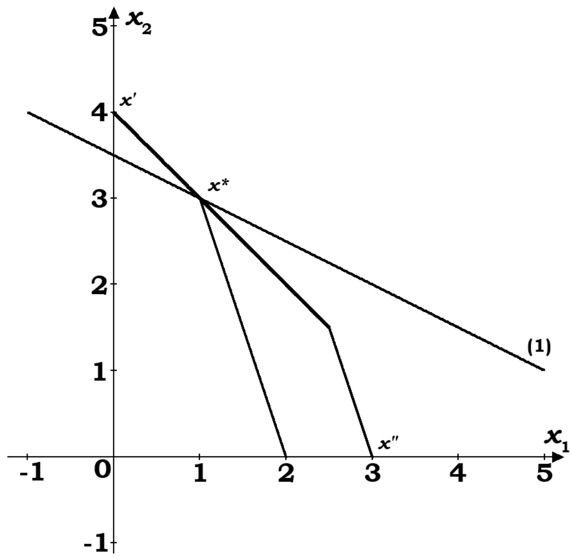

Рис. 4.2.7

Зафіксуємо значення параметра $\xi_1 = 6$. Із рис. 4.2.8 бачимо, що цьому значенню параметра буде відповідати оптимальний розв'язок параметричної задачі $x^* = (2,\ 2)$, який буде ефективною альтернативою початкової двокритеріальної задачі. Вибираючи інші значення параметра $\xi_1 \in [5{,}5,\ 8]$, можемо отримати будь-яку ефективну альтернативу. Але при значеннях параметра $\xi_1 \in [0,\ 5{,}5)$, розв'язок параметричної задачі не буде єдиним і серед них, окрім ефективної альтернативи x'', будуть і слабко ефективні. Із цієї причини теорема Подіновського і вимагає, щоб ефективна альтернатива була одночасно розв'язком відповідних параметричних задач для всіх $i \in M$. Наприклад, нехай $i = 2,\ \ \xi_1 = 4$. Із рис. 4.2.9 бачимо, що цьому значенню параметра буде відповідати максимальне значення дев'ятої цільової функції параметричної задачі і вже не одна точка, а множина оптимальних розв'язків. Це будуть точки відрізку $[x'', x''']$ із яких тільки $x'' = (2{,}5,\ 1{,}5)$ буде ефективною альтернативою початкової двокритеріальної задачі, а інші будуть слабко ефективними альтернативами.

Тому розглянемо параметричну задачу при $i = 1$ й при $\xi_2 = 9$ (нагадаємо, що 9 – це значення другого критерію, що відповідає максимальному значенню цільової функції параметричної задачі при $i = 2$). Із рис. 4.2.9 бачимо, що ця параметрична задача вже буде мати єдиний розв'язок $x'' = (2{,}5,\ 1{,}5)$, який буде ефективною альтернативою початкової двокритеріальної задачі.

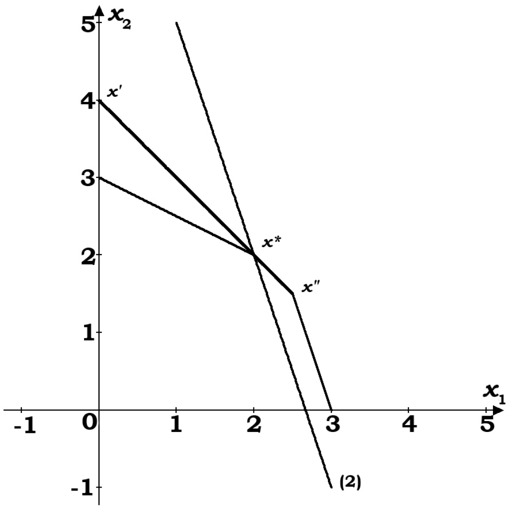

Рис. 4.2.8

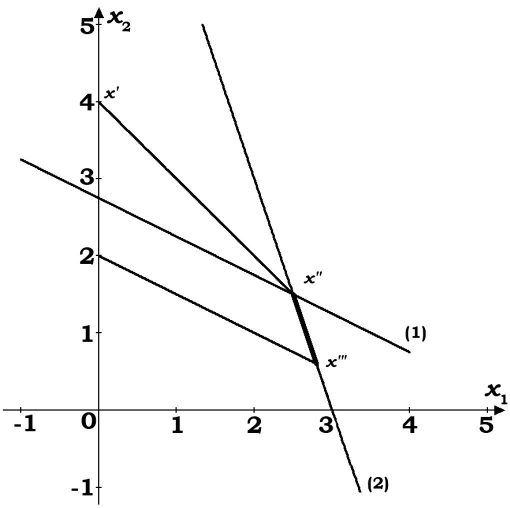

Рис. 4.2.9

Теорема 4.2.4. (умова власної ефективності оцінок (Ногін)). Оцінка $y^0 \in Y$ є власно-ефективною тоді і тільки тоді, коли існує набір векторів $\mu^1,...,\mu^p \in M^+$, $p \le m$ такий, що для кожної оцінки $y \in Y$ знайдеться номер $i \in \{1,..., p\}$, при якому виконується нерівність для скалярних добутків:

$$\left\langle \mu^i, y^0 \right\rangle \ge \left\langle \mu^i, y \right\rangle. \qquad (4.2.5)$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, покладемо $y^0 = 0$. Відзначимо наступний факт, що безпосередньо випливає з визначення власно-ефективної оцінки. Включення $y^0 \in G(Y)$ має місце в тому і тільки в тому випадку, коли існує число $N > 0$ таке, що для кожного $i \in M$ система нерівностей:

$$\begin{aligned} &y^i > 0, \\ &y_i + Ny_j > 0, \;\; j \in M; \;\; j \ne i, \end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

не має розв'язку на множині Y.

Достатність. Не важко перевірити, що оцінка $y^0 = 0$ є ефективною. Доведемо включення $0 \in G(Y)$. Нехай

$$N = \max\left\{ \frac{m\mu_j^i}{\mu_k^i} \middle| j,k \in M; \;\; i = 1, 2,..., p \right\} > 0. \qquad (4.2.7)$$

Якщо $0 \notin G(Y)$, то для цього числа N існує індекс $k \in M$ і точка $y' \in Y$ такі, що:

$$y'_k > 0,\ y'_k + Ny'_j > 0,\ \ j \in M;\ \ j \neq k. \tag{4.2.8}$$

Позначимо $M_0 = \left\{ j \in M \middle| y'_j < 0 \right\}$. Оскільки $0 \in P(Y)$, виконується $M_0 \neq \varnothing$. З (4.2.8) випливає :

$$my'_k + N \sum_{j \in M_0} y'_j > 0\,. \tag{4.2.9}$$

З іншого боку, за умовою теореми, для точки y' існує вектор $\mu^i \in M$ такий, що $\left\langle \mu^i, y' \right\rangle \leq 0$. Звідси $\mu^i_k y'_k + \sum_{j \in M_0} \mu^i_j y'_j \leq 0$. З огляду на (4.2.7), отримаємо нерівність $my'_k + N \sum_{j \in M_0} y'_j \leq 0$, яка суперечить (4.2.9).

Необхідність. Нехай $y^0 \in G(Y)$, тобто існує таке $N > 0$, що для будь-якого $i \in M$, система нерівностей (4.2.6) є несумісною на Y. Візьмемо довільну оцінку $y \in Y$. Для кожного $i \in M$ виконується або $y_i \leq 0$, або $y_i + Ny_j \leq 0$ при деякому $j \in M \setminus \{i\}$. Взявши суму по $i \in M$ усіх таких нерівностей, одержимо $\sum_{i \in M} N_i y_i \leq 0$, де $N_i > 0$ для будь-якого $i \in M$. Звідси випливає нерівність (4.2.5) при $y^0 = 0$ і $\mu_i = \bar{\mu}_i = \left(N_1 \Big/ \sum_{i \in M} N_i, \ldots, N_m \Big/ \sum_{i \in M} N_i \right)$.

Очевидно, що $\bar{\mu}_i \in M^+$. Таким чином, для кожного $y \in Y$ існує вектор $\mu_i = \bar{\mu}_i$, при якому має місце нерівність (4.2.5). Причому, завдяки скінченності множини індексів M, число таких векторів, що мають необхідні властивості, є скінченним. Тобто, існує кінцевий набір векторів $\left\{ \bar{\mu}^1, \ldots, \bar{\mu}^p \right\} \subset M^+$ з такою властивістю, що для кожного $y \in Y$ знайдеться $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, при якому має місце (4.2.5). Вкажемо набір не більш, ніж з m векторів, що мають необхідні властивості. Нехай $\varepsilon = \min\left\{ \bar{\mu}^i_j \middle| j \in M,\ \ i = 1, 2, \ldots, p \right\}$. Розглянемо вектори $\mu^j = (\mu^j_i)_{j \in M}$ з компонентами:

$$\mu^i_j = \begin{cases} \varepsilon, & j \in M;\ \ j \neq i; \\ 1 - (m-1)\varepsilon, & j = i; \end{cases} \tag{4.2.10}$$

Очевидно, для кожного $\mu^i \in M^+$ для будь-якого $i \in M$. Доведемо включення $\{\bar{\mu}^1,...,\bar{\mu}^p\} \subseteq \text{conv}\{\mu^1,...,\mu^m\}$. Для цього візьмемо довільний вектор $\bar{\mu}^l$ "старого" набору. Якщо $\varepsilon = 1/m$, то, очевидно, $\bar{\mu}^l = 1/m$, $i \in M$. У цьому випадку для $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 1/m$ маємо:

$$\sum_{i\in M} \lambda_i \mu_j^i = \bar{\mu}_j^i, \quad j \in M, \tag{4.2.11}$$

тобто $\bar{\mu}^i \in \text{conv}\{\mu^1,...,\mu^m\}$. Якщо $\varepsilon < 1/m$, то беремо $\lambda_i = \dfrac{\bar{\mu}_i^l - \varepsilon}{1 - m\varepsilon}$, $i \in M$, де $\sum_{i\in M} \lambda_i = 1$. Для цих λ_i рівності (4.2.11) також мають місце. Включення доведене. Припустимо, що "новий" набір векторів (4.2.10) не має необхідних властивостей, тобто знайдеться оцінка $y \in Y$ така, що

$$\langle \mu^i, y \rangle > 0, \quad i \in M. \tag{4.2.12}$$

Для довільного $l \in \{1, 2,..., p\}$ при деяких $\lambda_j \geq 0$, $j \in M$, $\sum_{j\in M} \lambda_j = 1$, має місце представлення (4.2.11). Тому з (4.2.12) одержуємо нерівності $\sum_{j\in M} \lambda_j \langle \mu^j, y \rangle = \langle \bar{\mu}^l, y \rangle > 0$, $l = 1, 2,..., p$, які означають, що і "старий" набір векторів також не має необхідних властивостей. Це суперечить отриманому раніше припущенню.♦

Примітка. Якщо множина Y складається зі скінченного числа елементів, то умова доведеної теореми є необхідною й достатньою для того, щоб $y^0 \in P(Y)$, оскільки має місце рівність $G(Y) = P(Y)$.

Із цієї теореми (частина "достатність") при $p = 1$ випливає

Наслідок. Якщо всі $\mu_i > 0$, то будь-яка точка максимуму функції $\sum_{i\in M} \mu_i y_i$ на множині Y є власне ефективною оцінкою.

У випадку опуклості множини оцінок цей наслідок є необхідною й достатньою умовою власне ефективності. Це твердження, сформульоване в термінах альтернатив, складає відому теорему.

Теорема 2.5. (Джеофріон). Нехай X є опуклою множиною, а $f(x)$ є увігнутою вектор-функцією. Для власної ефективності альтернативи x^* необхідно й достатньо, щоб $\exists \mu > 0: \langle \mu, f(x^*) \rangle = \max_{x\in X} \langle \mu, f(x) \rangle$.

Приклад 6. Побудувати власне ефективні альтернативи за теоремою Джеофріона для такої двокритеріальної задачі:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4, \quad x_{1,2} \ge 0.$$

На рис. 4.2.10 зображено множину альтернатив X; лінії рівнів першого та другого критеріїв, відповідно (1) і (2); x', x'' – найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи. За визначенням можна встановити, що множиною ефективних альтернатив буде дуга $[x', x'']$ кола $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4$, а множиною власно-ефективних альтернатив буде дуга (x', x'') (точки x', x'' є ефективними, але не власно-ефективними альтернативами). Параметрична задача в загальній постановці: $\max\limits_{x \in X} F_\mu(x) = \max\limits_{x \in X} \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$, де $\mu = (\mu_1, \ldots \mu_m) \in \mathrm{M}^+$, щодо нашого прикладу матиме такий вигляд:

$$F_\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \to \max,$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4,$$
$$x_{1,2} \ge 0, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \mu_{1,2} > 0.$$

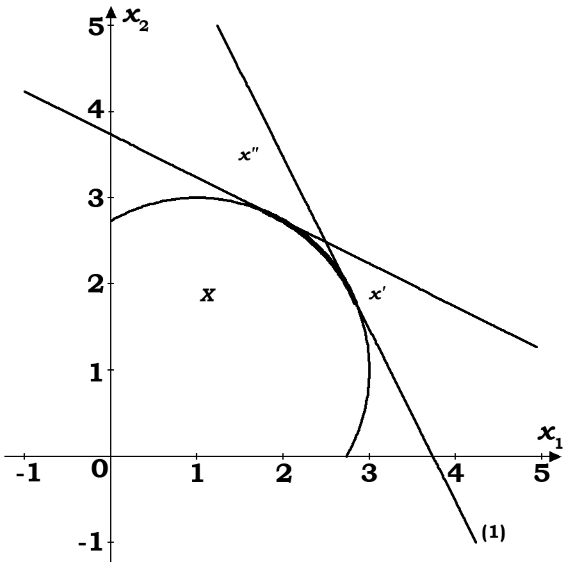

Рис. 4.2.10

Нехай $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$. Із рис. 4.2.11 бачимо, що розв'язком параметричної задачі буде точка $x^* = (2+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2})$, яка є власно-ефективною альтернативою; при значеннях $\mu_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_2 = \frac{2}{3}$ отримаємо іншу власно-ефективну альтернативу x^{**}. Вибираючи інші значення параметрів μ_1, μ_2: $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $\mu_{1,2} > 0$, можемо отримати будь-яку власне ефективну альтернативу.

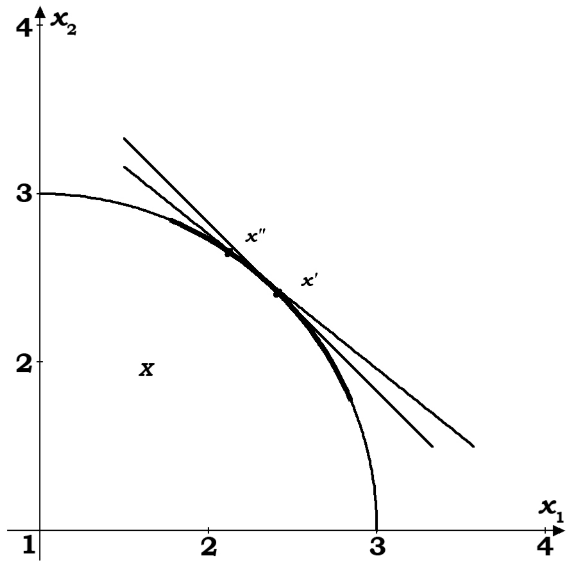

Рис. 4.2.11

Контрольні завдання до § 2

1. Проілюструвати побудову множини слабко ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$x_1 + x_2 \to \max,\ -x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 4,\ x_1 - x_2 \le 3, x_2 \le 2,\ x_{1,2} \ge 0.2.$$

2. Проілюструвати побудову множини слабко ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 3x_2 \to \max,\ -2x_1 + x_2 \le 0,\ 2x_1 + x_2 \le 8,\ x_{1,2} \ge 0.$$

3. Проілюструвати побудову множини слабко ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$x_1 + x_2 \to \max,\ 2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ \text{-}4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0.$$

4. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$2x_1 + x_2 \to \max,\ \text{-}x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 4,\ x_1 - x_2 \le 3, x_2 \le 2,\ x_{1,2} \ge 0.$$

5. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$3x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 3x_2 \to \max,\ \text{-}2x_1 + x_2 \le 0,\ 2x_1 + x_2 \le 8,\ x_{1,2} \ge 0.$$

6. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,\ 2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ \text{-}4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0.$$

7. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 3x_2 \to \max,\ x_1 - x_2 \le 3,\ \text{-}5x_1 - 3x_2 \le -15,\ x_1 + 2x_2 \le 9.$$

8. Проілюструвати побудову множини власне ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$x_1 \to \max,\ x_2 \to \max,\ 2x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0\ .$$

9. Проілюструвати побудову множини власне ефективних альтернатив за необхідною й достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$x_1 \to \max,\ x_1 + x_2 \to \max,\ x_1^2 + 2x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0\ .$$

~~§ 3. Методи багатокритеріальної оптимізації~~

~~Висновок, який можна зробити з попереднього розділу, полягає в тому, що вибір альтернативи, яка буде розв'язком задачі багатокритеріальної оптимізації, потрібно робити з множини ефективних альтернатив (чи слабко ефективних альтернатив, чи власно ефективних альтернатив) – залежно від вимог ОПР і предметної області, у якій приймається рішення (далі, для спрощення викладання припустимо, що вибирається ефективна альтернатива).~~

~~Але яку, однак, ефективну альтернативу вибирати? Звичайно, якщо множина абсолютно оптимальних альтернатив не є порожньою, то будь-яка з них (варто нагадати, що всі абсолютно оптимальні альтернативи рівноцінні між собою) може вважатися розв'язком багатокритеріальної~~