Розділ 4
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

У цьому розділі будуть вивчатися ЗПР в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків, тобто коли зв'язок між альтернативами та наслідками детермінований (кожній альтернативі відповідає лише один наслідок) і ціль ототожнюється з максимізацією чи мінімізацією деякої дійснозначної функції, що визначена на множині всіх наслідків.

§ 1. Основні поняття та визначення

Оскільки кожній альтернативі відповідає тільки один наслідок і "корисність" (відносно до цілі задачі) цього наслідку оцінюється деякою єдиною числовою оцінкою, а нас цікавить у кінцевому підсумку найкраща оцінка і відповідна їй альтернатива, то можна встановити прямий зв'язок "альтернатива – числова оцінка відповідного наслідку", минаючи саме наслідок. Унаслідок такого підходу отримаємо дійснозначну функцію f, яка визначена на множині альтернатив, і будемо називати її цільовою функцією. Оскільки ціль у ЗПР при числовій оцінці наслідків полягає у знаходженні такого наслідку, що максимізує чи мінімізує числову оцінку, то під оптимальним розв'язком задачі в умовах визначеності природно розуміти ту альтернативу, яка забезпечує цільовій функції мінімальне чи максимальне значення. Таким чином, можна зробити висновок: *математичною моделлю ЗПР* в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків є задача оптимізації (максимізації чи мінімізації) дійснозначної функції, що задана на множині альтернатив.

Якщо функція f є скалярною (тобто наслідки оцінюються тільки за одним показником – критерієм), то приходимо до "звичайної" задачі оптимізації, для якої існує єдина концепція оптимальності – оптимальною буде та альтернатива, яка забезпечує цільовій функції мінімальне чи максимальне значення. Припустимо, що маємо таку ЗПР, наслідки якої оцінюються не за одним, а за двома показниками f_1, f_2, а ціль полягає в максимізації цієї пари показників (критеріїв) одночасно, тобто за вектором $f = (f_1, f_2)$. Зрозуміло, що лише винятково точки максимумів цих функцій можуть збігатися. Наприклад, це можна побачити на рис. 4.1.1. Такі задачі не мають розв'язку у звичайному сенсі (є некоректними). Тому спочатку потрібно визначити принцип оптимальності.

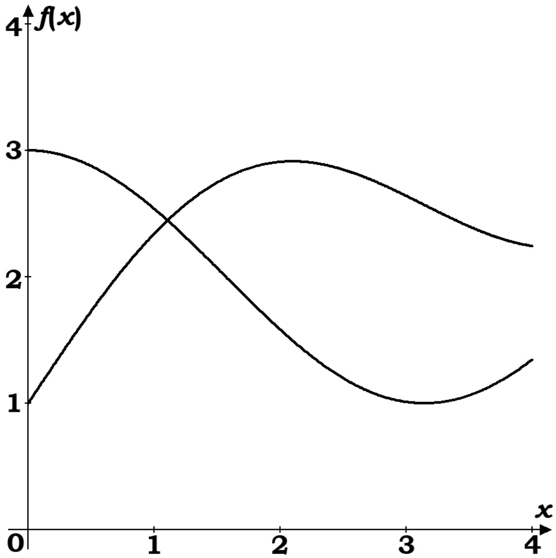

Рис. 4.4.1

Загальні відомості про задачі багатокритеріальної оптимізації. Концепція прийняття рішення в багатокритеріальних ЗПР полягає у свідомому виборі з множини альтернатив однієї. Цей вибір робить *особа, що приймає рішення* (ОПР), яка прагне до досягнення своєї певної цілі. У ролі такої особи виступають чи окрема людина (прийняття індивідуальних рішень), чи група людей (прийняття колективних рішень), що володіють правами вибору рішення і несуть відповідальність за його наслідки.

Застосування математичних методів при прийнятті рішень допускає побудову математичної моделі, що формально представляє проблемну ситуацію, тобто ситуацію вибору рішення. Для задач прийняття рішень в умовах визначеності, коли випадкові та невизначені фактори відсутні, компонентами такої моделі є: множина X альтернатив (рішень), із якої і варто зробити вибір однієї найкращої альтернативи (оптимального розв'язку), і опис переваг особи, що приймає рішення. Для того, щоб була забезпечена можливість (воля) вибору, множина альтернатив X повинна містити не менш двох елементів.

За наявності числових оцінок наслідків порівняння альтернатив за перевагою ОПР здійснюється не безпосередньо, а за допомогою заданих на X числових функцій $f_1, f_2, ..., f_m$, які називаються критеріями (показниками корисності чи ефективності, критеріальними функціями, цільовими функціями і т. п.). Передбачається, що $m \geq 2$ (при $m = 1$ задача оптимізації називається однокритеріальною).

Шкала критерію. Для кожного критерію f_i на числовій прямій E^1 вказується підмножина Y_i, на якій він приймає свої значення. На практиці множину Y_i (яку часто називають *шкалою критерію* f_i) визначають відповідно до предметного змісту цього критерію. Наприклад, якщо відомо, що значення критерію f_i є додатним чи невід'ємним (критерій характеризує масу, вартість), то можна прийняти $Y_i = (0, +\infty)$ чи відповідно $Y_i = [0, +\infty)$. Якщо значення f_i обмежені знизу та зверху деякими природними границями a і b, то $Y_i = [a, b]$ (наприклад, якщо f_i – деяка частка запасу ресурсів, то $Y_i = [0, 1]$). Якщо значеннями f_i можуть слугувати лише нуль і натуральні числа (скажімо, коли f_i визначається внаслідок підрахунку кількості деяких об'єктів), то $Y_i = \{0,\ 1, ...\}$. Якщо на значення f_i немає жодних змістовних обмежень, то $Y_i = E^1$ і т. п.

Кількісні та якісні критерії. У задачах прийняття індивідуальних рішень критерії слугують для вираження "інтенсивності" істотних властивостей (ознак) рішень. Наприклад, при порівнянні деяких виробів можуть використовуватися такі критерії, як маса, вартість, дата випуску, зовнішній (товарний) вид і т. п. У задачах прийняття групових рішень критерій f_i характеризує "якість" (чи перевагу) рішень із погляду індивіда i, що входить у скінченну множину $M = \{1, 2, ..., m\}$. Наприклад, якщо множина альтернатив є скінченною й індивід i їх проранжував (упорядкував за перевагою), то можна прийняти $f_i(x') = 1$ для найбільш переважної альтернативи x', $f_i(x'') = 2$ для наступної за перевагою x'' і т. д.

За своїм характером критерії поділяються на кількісні та якісні. Критерій є *кількісним*, коли його значення має сенс порівнювати, вказуючи, на скільки чи в скільки разів його значення є більшим за інший, і *якісним*, коли ці порівняння безглузді. Прикладом кількісного критерію f_i є маса. Якщо фіксована одиниця виміру маси, то можна говорити про те, у скільки разів (чи на скільки) один виріб важчий за інший. Відношення ваги виробів не змінюється після переходу до іншої одиниці виміру, тобто після перетворень f_i у kf_i, де $k > 0$. Зрозуміло, що будь-яке інше перетворення (яке не є множенням на додатне число) може привести до зміни вихідного співвідношення значень f_i.

У розглянутому прикладі допустимими перетвореннями критерію f_i є всі додатні лінійні перетворення і лише вони. Функцію ϕ називають допустимим перетворенням критерію f_i, якщо функція $\phi(f_i)$ знову є критерієм, що вимірює (характеризує) ту ж саму властивість. При заміні f_i на $\phi(f_i)$ множина Y_i змінюється на $\phi(Y_i)$.

Таким чином, із кожним критерієм зв'язують множину допустимих перетворень *Ф* і кажуть, що цей критерій має шкалу типу *Ф* чи що вимірювання виконуються за шкалою типу *Ф*. Як правило, множина *Ф* вводиться разом із завданням критерію, але іноді визначення типу шкали виявляється самостійною і досить складною задачею.

У вищенаведеному прикладі $\Phi = \Phi_0 = \{\phi | \phi(z) = kz,\ k > 0\}$. Шкала такого типу називається *шкалою відношень* тому, що зберігаються відношення величин $kz'/kz'' = z'/z'' = C,\ C = \text{const}$ = const. Розповсюдженим є випадок виміру в шкалі типу $\Phi_u = \{\phi | \phi(z) = kz + l,\ k > 0\}$. Тут допустимими перетвореннями є множення на додатне число k і додавання довільного числа l. Така шкала називається шкалою інтервалів. Ця назва пояснюється властивістю збереження відношень інтервалів:

$$\frac{z^1 - z^2}{z^3 - z^4} = \frac{(kz^1 + l) - (kz^2 + l)}{(kz^3 + l) - (kz^4 + l)} = C,\ C = \text{const}.$$

Прикладом критерію, що має шкалу інтервалів, слугує "дата випуску виробу", оскільки для виміру часу необхідно фіксувати масштаб і початок відліку.

Шкала є тоді досконалою, чим вужча множина *Ф* допустимих перетворень. Критерії, що мають шкалу не менш досконалу, ніж інтервальна, називаються кількісними. У більшості випадків кількісні критерії відповідають вимірам об'єктивних (фізичних) властивостей. Однак дуже поширені й критерії з менш досконалими шкалами, ніж шкала інтервалів. Найменш досконалою шкалою критеріїв, що зустрічається у задачах оптимізації, є *порядкова шкала*. Для неї множина допустимих перетворень складається з усіх монотонно зростаючих функцій: $\Phi_n = \{\phi | z' > z'' \to \phi(z') > \phi(z'')\}$.

Критерії, що мають порядкову шкалу, називаються *якісними*. Значення якісного критерію має сенс порівнювати тільки за відношенням "більше", "менше" і "дорівнює" – вони зберігаються при монотонних перетвореннях. Але з'ясовувати, у скільки разів чи на скільки одне значення є більшим за інше, безглуздо. Критерій із порядковою шкалою природним чином виникає в тих випадках, коли розв'язки ранжуються, тобто розташовуються за зростанням чи за зменшенням інтенсивності деякої властивості. Потім їм приписуються числа таким чином, щоб більшій інтенсивності відповідало більше чи, навпаки, менше число. Звичайно, такі ранжування отримують при суб'єктивних "вимірах", наприклад, коли вони відображають думку індивіда про перевагу альтернатив.

Дуже часто суб'єктивні виміри виконуються в бальних шкалах. Наприклад, експерти можуть оцінювати у балах зовнішній вигляд виробу. Критерії з бальними шкалами займають "проміжне" положення між кількісними та якісними критеріями.

Твердження про значення критеріїв із заданими типами шкал називається осмисленим, чи адекватним, якщо його істинність не змінюється після застосування до критеріїв будь-яких допустимих перетворень, зумовлених типами шкал. Тому для аналізу й розв'язання практичних багатокритеріальних задач оптимізації варто застосовувати тільки ті визначення та поняття, методи і процедури, що приводять до одержання адекватних висновків і рекомендацій.

Наприклад, широко відомим є метод розв'язку багатокритеріальних задач, заснований на "згортанні" векторного критерію в одну функцію – узагальнений (чи агрегований) критерій $F(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Неважко переконатися в тому, що цей метод не придатний для розв'язку задач із якісними критеріями. Візьмемо найрозповсюдженіший узагальнений критерій – лінійну "згортку" $F_\Sigma = \sum_{i \in M} \mu_i f_i$, де μ_i – деякі додатні числа, що характеризують відносну важливість критеріїв (коефіцієнти важливості). Нехай, наприклад, $m = 2$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $f(x') = (2, 8)$, $f(x'') = (1, 27)$. Тоді F_Σ вказує, що x' краще за x'' тому, що $2 + 8 < 1 + 27$. Однак, якщо до першого критерію застосувати допустиме перетворення $\phi_1(z') = z^5$, а до другого $\phi_2(z'') = z^{1/3}$ (тобто f_1 замінити на f_1^5, а f_2 на $f_2^{1/3}$), то висновок виявиться протилежним тому, що $32 + 2 > 1 + 3$.

Множина досяжності. Окремі (локальні) критерії f_i, утворюють *векторний критерій* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) = (f_i)_{i \in M}$, де $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ називають множиною індексів критеріїв. Вважається, що кожна альтернатива x цілком характеризується відповідною (векторною) *оцінкою*, тобто вектором $f(x)$. Тому вибір оптимальної альтернативи з множини всіх альтернатив X зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини досяжних оцінок $Y = f(X) = \{ y \in E^m \,|\, y = f(x),\ x \in X \}$, де E^m – m-вимірний числовий простір, який називається *простором оцінок* (критеріїв). За необхідності цей простір буде вважатися евклідовим, тобто з метрикою $\rho_2(y',y'')=\langle y'-y'',y'-y''\rangle^{1/2}=\left[\sum_{i\in M}(y'_i-y''_i)^2\right]^{1/2}$, інколи використовуються інші простори, наприклад, із метриками $\rho_1(y',y'')=\sum_{i\in M}|y'_i-y''_i|$ чи $\rho_\infty(y',y'')=\max_{i\in M}|y'_i-y''_i|$. Часто буває, що в реальних задачах множину Y будувати дуже складно, а то й неможливо. Тому розглядається деяка більш широка множина $\hat{Y}\subseteq E^m$, векторам із якої можна надати певного змісту. Найчастіше – ця множина $\hat{Y}$ досяжних оцінок є гіперпаралелепіпедом $Y^m=\prod_{i\in M}Y_i$. Іноді Y отримують із Y^m за допомогою тих чи інших обмежень, спрямованих на виключення позбавлених чи змісту, чи заздалегідь недосяжних векторів. Введення в розгляд множини $\hat{Y}$ дає ряд переваг. Наприклад, виникає можливість дослідження не однієї, а відразу цілої сім'ї задач, для кожної з яких множина досяжних оцінок входить у $\hat{Y}$. Зокрема, можливо вивчати характерні залежності оптимального розв'язку від тих чи інших параметрів задачі.

Далі альтернативи завжди будуть позначатися літерою x із різними індексами, а відповідні їм оцінки – літерою y із тими ж індексами, наприклад: $y=f(x)$, $y^*=f(x^*)$ і т. п. Якщо деяка векторна оцінка y^0 є досяжною і їй відповідає кілька альтернатив, то під x^0 буде розуміти (якщо немає спеціальних застережень) довільна з цих альтернатив (тобто будь-яка альтернатива, що задовольняє рівності $f(x^0)=y^0$).

Незалежність критеріїв за перевагою. У багатокритеріальній задачі кожний розв'язок $x\in X$ цілком характеризується своєю оцінкою $y=f(x)$ і тому вибір оптимального розв'язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини Y всіх досяжних оцінок.

Природно, що найбільш просто порівнювати за перевагою ті векторні оцінки, що відрізняються одна від одної лише однією компонентою. Значення критерію f_i можуть по-різному співвідноситися за перевагою ОПР залежно від того, які значення всіх інших критеріїв. Інакше кажучи, для чисел s і t з Y може виявитися, наприклад, що оцінка $(y_1,\dots,y_{i-1},\ s,\ y_{i+1},\dots,y_m)$ є важливішою за $(y_1,\dots,y_{i-1},\ t,\ y_{i+1},\dots,y_m)$, однак $(y'_1,\dots,y'_{i-1},\ s,\ y'_{i+1},\dots,y'_m)$ менш краща порівняно з $(y'_1,\dots,y'_{i-1},t,y'_{i+1},\dots,y'_m)$. І тоді сказати, яке зі значень критерію s чи t – важливіше, не вказуючи значень інших критеріїв, неможливо.

Критерій f_i, для якого має місце зазначене твердження, називається *залежним за перевагою* від інших. Наприклад, якщо f_1, f_2 відповідно – довжина й ширина кімнати, а f_3 висота стелі, то з погляду мешканця f_3 залежить за перевагою від (f_1, f_2). Ще приклад: кожний із критеріїв f_1 (температура повітря) і f_2 (його вологість) залежать за перевагою один від одного (мається на увазі комфортність для людини).

Однак, набагато частіше зустрічаються критерії, для яких можна впорядкувати за перевагою всі їхні значення без розгляду значень інших критеріїв. Прикладами є вже згадувані критерії доходу, витрат і т. п. Такі критерії називаються незалежними за перевагою від інших [10]. Критерій f_i є *незалежним за перевагою* від інших m-1 критеріїв, якщо для будь-яких чотирьох оцінок виду:

$$(y_1,\dots,y_{i-1}, s, y_{i+1},\dots,y_m),\ (y_1,\dots,y_{i-1}, t, y_{i+1},\dots,y_m),$$
$$(y'_1,\dots,y'_{i-1}, s, y'_{i+1},\dots,y'_m),\ (y'_1,\dots,y'_{i-1}, t, y'_{i+1},\dots,y'_m)$$

зі співвідношення $(y_1,\dots,y_{i-1}, s, y_{i+1},\dots,y_m)R(y_1,\dots,y_{i-1}, t, y_{i+1},\dots,y_m)$ завжди випливає $(y'_1,\dots,y'_{i-1}, s, y'_{i+1},\dots,y'_m)R(y'_1,\dots,y'_{i-1}, t, y'_{i+1},\dots,y'_m)$.

Якщо критерій f_i є незалежним за перевагою від сукупності інших, то на множині Y_i можна ввести відношення нестрогої переваги R і вважати, що sRt, коли $(y_1,\dots,y_{i-1}, s, y_{i+1},\dots,y_m)R(y_1,\dots,y_{i-1}, t, y_{i+1},\dots,y_m)$ для деяких двох (а виходить і будь-яких двох) оцінок такого виду.

Задачі, у яких усі критерії незалежні за перевагою, тобто кожен критерій незалежний за перевагою від сукупності всіх інших, а відношення нестрогої переваги на множині значень кожного критерію є відношення "$\geq$" ("не менше"), називаються *багатокритеріальними задачами максимізації.* У таких задачах кожному критерію бажано мати можливо більше значення, чи, як говорять, кожен критерій бажано максимізувати. Якщо ж у задачі кожен критерій бажано мінімізувати, то вона називається *багатокритеріальною задачею мінімізації.*

Надалі, за винятком тих випадків, що особливо обговорюються, будуть розглядатися багатокритеріальні задачі максимізації.

Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації. Будемо розглядати скінченно вимірні задачі багатокритеріальної максимізації:

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X,$$

де X – множина альтернатив, яка є множиною з простору E^n; $f(x) = (f_i(x))_{i \in M}$ – вектор критеріїв, який задається відображенням $f : X \to E^m$; $M = \{1, 2, \dots, m\}$ – множина індексів критеріїв, m – кількість критеріїв. У таких задачах множина альтернатив X, як правило, виділяється з якоїсь ширшої множини $D \subseteq E^n$ за допомогою обмежень, що найчастіше представляються у вигляді нерівностей:

$$X = \left\{ x \in D \middle| g_1(x) \geq 0,\ g_2(x) \geq 0,\ \ldots,\ g_k(x) \geq 0 \right\},$$

де $g_i(x),\ j = 1, 2, \ldots, k,$ – числові функції, які визначені на *D*. При цьому вважається, що і вектор критеріїв $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ також визначений на *D*.

У ролі множини *D*, як правило, виступає або весь простір E^n, або деяка його специфічна підмножина, наприклад, невід'ємний ортант $E^n_{\geq 0}$, утворений усіма векторами з невід'ємними компонентами: $E^n_{\geq 0} = \left\{ x \in E^n \middle| x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \right\}$.

Практично, множина *D* виділяється з E^n за допомогою найпростіших і очевидних обмежень на змінні.

Класи задач багатокритеріальної оптимізації. Залежно від структури множини *X* (чи *D*) і властивостей функцій f_i (а також g_i) для зручності досліджень виділяють різні класи багатокритеріальних задач. Так, якщо множина *X* (чи *D*) містить скінченну кількість елементів, то задача називається *скінченною*, а якщо *X* (чи *D*) є зліченною множиною, то – *дискретною*.

Зокрема, якщо в кожного вектора з *X* (чи *D*) компоненти – цілі числа, то задача називається *цілочисельною*. А якщо вектори, які утворюють *X* (чи *D*) є булевими (тобто складаються з нулів та одиниць), то і сама задача називається *булевою*.

Якщо *X* (чи *D*) опукла множина, а усі f_i – увігнуті функції, то задача називається *увігнутою*. Зокрема, якщо *X* – поліедральна множина (тобто "вирізана" з E^n кінцевою системою лінійних нерівностей і рівностей), а усі f_i – лінійні, то багатокритеріальна задача називається *лінійною*.

Ефективні й слабко-ефективні оцінки й альтернативи. У багатокритеріальній задачі максимізації із двох векторних оцінок, що відрізняються лише однією компонентою, переважнішою буде та, у якої ця компонента більша. А що можна сказати про векторні оцінки y і y', для яких виконуються нерівності:

$$y_i \geq y'_i,\ i = 1, 2, \ldots, m? \tag{4.1.1}$$

Для цього згадаємо, як описуються переваги.

Досить загальним і добре розробленим є спосіб опису переваг "мовою" бінарних відношень. Для опису переваг широко використовуються бінарні відношення (див. Розділ 1), що вводяться на множині порівнюваних об'єктів. У багатокритеріальних задачах такими множинами є множина альтернатив *X* і множина оцінок *Y*.

Відношення строгої переваги *P*: *aPb* означає, що об'єкт *a* є важливішими за *b*.

Відношення байдужості *I*: *aIb* означає, що об'єкти *a* і *b* однакові за перевагою (якщо вибір обмежити двома цими об'єктами, то байдуже, який із них узяти).

Відношення нестрогої переваги *R*: *aRb* означає, що об'єкт *a* не менш кращий, ніж *b*, тобто має місце *aPb* чи *aIb*; формально *R* є об'єднанням *P* та *I*.

Відношення переваги *R* та його підмножин *P* та *I* повинні задовольняти таким властивостям: *P* асиметричне і антирефлексивне; *I* – симетричне і рефлексивне, *R* – рефлексивне; *P* та *I* – не перетинаються (не може бути одночасно *aPb* і *aIb*). Варто мати на увазі, що *P* і *I* відновлюються за *R*: *aIb*, коли одночасно *aRb* і *bRa*, тобто $I = R \cap R^{-1}$; *aPb*, коли *aRb* вірно, але *bRa* невірно: $P = R \setminus R^{-1}$. Таким чином, *I* є "симетрична ", а *P* – "асиметрична частина" *R*.

Відношення *R*, *P* та *I* не є транзитивними. Якщо ж *R* виявляється транзитивним, то транзитивними будуть *P* і *I*; у цьому випадку *R* є квазіпорядком, *P* – строгим порядком, *I* – еквівалентністю.

Абсолютно-оптимальні оцінки й альтернативи. Припустимо, що переваги ОПР описуються відношенням нестрогої переваги *R* на $\hat{Y}$, причому відомо, що воно не тільки рефлексивне, але і транзитивне (тобто є квазіпорядком). Вважаючи, що $\hat{Y} = Y_1 \times \ldots \times Y_m$, можна записати такі співвідношення для оцінок, послідовно використовуючи відношення "$\geq$" для їхніх компонент

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m)\ R\ (y_1', y_2, \ldots, y_m),$$
$$(y_1', y_2, \ldots, y_m)\ R\ (y_1', y_2', \ldots, y_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(y_1', \ldots, y_{m-1}', y_m)\ R\ (y_1', y_2', \ldots, y_m').$$

На підставі цих співвідношень і транзитивності *R* приходимо до висновку, що справедливо yRy', тобто векторна оцінка y не менш переважна, ніж y'. Це означає введення на множині оцінок $\hat{Y}$ відношення нестрогої переваги, яке збігається з квазіпорядком "$\geq$" для векторів із E^m. Відповідно до загального визначення максимального елемента за відношенням *R* оцінка y^* називається найкращою за відношенням "$\geq$", якщо для будь-якої оцінки $y \in Y$ має місце $y^* \geq y$. Оскільки відношення "$\geq$" є квазіпорядком, то може існувати лише одна така точка y^*. Наприклад, це ілюструє рис. 4.1.2. Якщо в багатокритеріальній задачі існує найкраща за відношенням "$\geq$"оцінка y^*, то саме її і варто вважати оптимальною. У методах багатокритеріальної оптимізації таку оцінку, якщо вона існує, називають *абсолютно-оптимальною*.

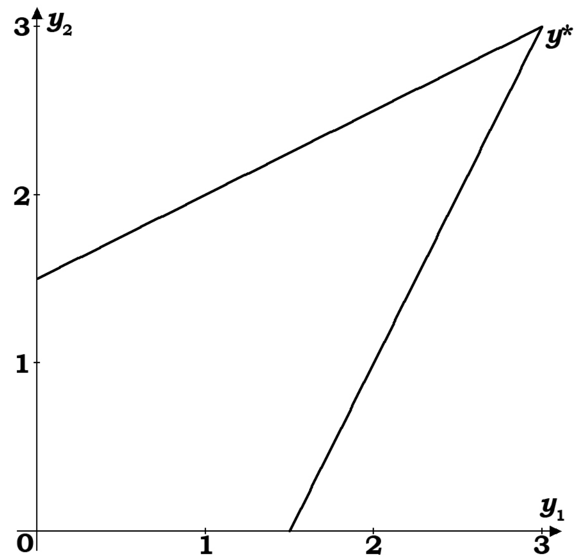

Рис. 4.1.2

Відношення "$\geq$", визначене на множині оцінок, породжує аналогічне за змістом відношення "$\geq$" на множині альтернатив, яке також є частковим квазіпорядком.

Альтернативі, максимальній за відношенням "$\geq$", відповідає максимальна за відношенням "$\geq$" оцінка з *Y*. Називається ця альтернатива також абсолютно-оптимальною. Отже, абсолютно-оптимальна альтернатива перетворює в максимум на *X* кожен із критеріїв $f_1, f_2, ..., f_m$. Умови існування абсолютно-оптимальних альтернатив встановлює така теорема.

Теорема 4.1.1. (про необхідні й достатні умови абсолютної оптимальності). Нехай множини оптимальних за кожним критерієм альтернатив є не порожніми, $X^i = Arg\max_{x \in X} f_i(x) \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, ..., m$. Тоді множина абсолютно-оптимальних альтернатив $Q(X) = \bigcap_{i=1}^{m} X^i$.

Доведення. Спочатку доведемо включення $Q(X) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} X^i$, що є очевидним, коли $Q(X) = \varnothing$. Нехай $Q(x) \neq \varnothing$ і оберемо $\overline{x} \in Q(X)$. Тоді за визначенням абсолютно-оптимальної альтернативи отримаємо такий ланцюг імплікацій:

$$\forall x \in X, \;\; \bar{x} \geq x \;\; \Rightarrow \;\; \bar{y} = f(\bar{x}) \geq f(x) = y \;\; \Rightarrow \;\; f_i(\bar{x}) \geq f_i(x), \;\; i = 1, 2, \ldots, m \;\; \Rightarrow$$

$$f_i(\bar{x}) = \max_{x \in X} f_i(x), \;\; i = 1, 2, \ldots, m \;\; \Rightarrow \;\; \bar{x} \in X^i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m \;\; \Rightarrow \;\; \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i.$$

Тепер доведемо включення $Q(X) \supseteq \bigcap_{i=1}^{m} X^i$, що є очевидним, коли $\bigcap_{i=1}^{m} X^i = \varnothing$. Нехай $\bigcap_{i=1}^{m} X^i \neq \varnothing$ і оберемо $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i$. Тоді отримаємо такий ланцюг відношень:

$$\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i \;\; \Rightarrow \;\; \bar{x} \in X^i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m \;\; \Rightarrow f_i(\bar{x}) = \max_{x \in X} f_i(x), \;\; i = 1, 2, \ldots, m \;\; \Rightarrow$$

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x), \;\; i = 1, 2, \ldots, m \;\; \Rightarrow \;\; \bar{y} = f(\bar{x}) \geq f(x) = y \;\; \Rightarrow \;\; \forall x \in X, \;\; \bar{x} \geq x \;\; \Rightarrow$$

$\Rightarrow \;\; x \in Q(x)$. Теорему доведено.♦

Абсолютно-оптимальні альтернативи і відповідно абсолютно-оптимальні оцінки, як уже відзначалося, безумовно, можуть вважатися оптимальними, однак практично вони майже ніколи не існують. Це пов'язано з тим, що порядок "$\geq$" не є повним, наприклад, якщо $y_i > y'_i$, але $y_j < y'_j$, $i \neq j$, то y й y' за відношенням "$\geq$" є незрівнянними. Тому, залежно від суті задачі, доводиться використовувати оцінки й альтернативи, "максимальні" за відношеннями ">"чи ">>". Для таких оцінок використовують спеціальні назви.

Ефективні оцінки й альтернативи. Якщо R не є транзитивним чи $\hat{Y} \neq Y_1 \times \ldots \times Y_m$, то формальним шляхом прийти до сформульованого твердження yRy', неможливо. Однак, у будь-якому випадку, воно є настільки природним, що у всіх моделях прийняття індивідуальних рішень вводиться як аксіома. Прийняття цієї аксіоми, що часто називається (сильною) *аксіомою Парето*, означає введення в множині оцінок $\hat{Y}$ відношення строгої переваги, яке збігається з відношенням ">" для векторів з E^m. Нагадаємо, що вектори $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$ знаходяться у відношенні строгої переваги, якщо $y_i \geq y'_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, і хоча б одна нерівність є строгою, тобто $y \neq y'$. Для цього відношення можна визначити поняття "максимального" елементу.

Визначення 4.1.1. Будемо називати оцінку $y^0 \in Y$ *оптимальною за Парето (ефективною, максимальною за* ">"), якщо не існує оцінки

$y \in Y$ такої, що $y > y^0$. Множину всіх таких оцінок із Y будемо позначати через $P(Y)$ і називати множиною Парето чи множиною ефективних оцінок.

Відношення ">", визначене на множині оцінок, породжує аналогічне за змістом відношення ">" на множині альтернатив, яке є строгим частковим порядком. Отже, альтернатива $x^0 \in X$ *називається оптимальною за Парето (ефективною)*, якщо не існує альтернативи $x \in X$ такої, що $x > x^0$, тобто для якої $f(x) > f(x^0)$. Множина оптимальних за Парето (ефективних) альтернатив буде позначатися через $P(X)$.

Слабко-ефективні оцінки. Розглянемо, наприклад, випадок багатокритеріальної задачі прийняття групового рішення, коли f_i є критерієм *i*-го ОПР, що входить у групу ОПР (множину $M = \{1, 2,..., m\}$). У цьому випадку $f_i(x) \geq f_i(x')$ означає, що альтернатива x не гірша за x' із погляду *i*-го ОПР. У такій задачі відношення переваги на множині оцінок Y повинно відбивати "групову думку", яка агрегує індивідуальні.

Якщо $y = y'$, тобто $f(x) = f(x')$, то висновок про рівність x і x' за перевагою може бути зроблений і для групи в цілому. Залишається розглянути таке питання: якщо в (4.1.1) хоча б одна нерівність строга, то чи варто вважати, що альтернатива x *є* важливішою за x'. На жаль, позитивну відповідь на останнє питання можна дати не у всіх реальних ситуаціях. Дійсно, якщо в (4.1.1) строга нерівність лише одна, то це означає, що x переважніше за x' лише для одного члена групи, а для всіх інших обидві альтернативи рівноцінні. Але в деяких ситуаціях може виявитися, що "одного голосу" занадто мало, і тоді група в цілому не обов'язково повинна вважати x важливішим за x'.

Очевидно, у різних ситуаціях підсумок порівняння оцінок y та y' може залежати від того, скільки строгих нерівностей у (4.1.1) виконується при порівнянні їхніх компонент. Однак, самим слабким є припущення, яке полягає в тому, що в для всієї групи y переважніше y', якщо в (4.1.1) усі нерівності строгі. Це припущення є прийнятим майже у всіх відомих моделях групових рішень і називається *слабкою аксіомою Парето*. Воно вводить на $\hat{Y}$ відношення сильної переваги, що збігається з відношенням ">>" для векторів з E^m. Кажуть, що $y >> y'$ вірне тоді і тільки тоді, коли $y_i > y'_i$, $i = 1, 2,..., m$. Для цього відношення також визначається поняття максимального елементу.

Визначення 4.1.2. Оцінку $y^* \in Y$ будемо називати *оптимальною за Слейтером (слабко-ефективною або максимальною* за ">>"), якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y >> y^0$. Множину всіх таких оцінок із Y будемо позначається далі через $S(Y)$ і називати множиною Слейтера чи множиною слабко ефективних оцінок.

Відношення ">>", визначене на множині оцінок, породжує аналогічне за змістом відношення ">>" на множині альтернатив, яке є строгим частковим порядком. Отже, альтернатива $x^0 \in X$ називається *оптимальною за Слейтером (слабко ефективною)*, якщо не існує альтернативи $x \in X$ такої, що $x >> x^0$, тобто для якої $f(x) >> f(x^0)$. Множина оптимальних за Слейтером (слабко ефективних альтернатив) буде позначатися через $S(X)$.

Порівняння ефективних і слабко ефективних оцінок. Оскільки з $y >> y'$ випливає $y > y'$, то будь-яка ефективна векторна оцінка є слабко ефективною, так $P(Y) \subseteq S(Y)$. Дійсно, якщо y^0 не є слабко ефективною, то для деякої $y \in Y$ буде виконуватися $y >> y^0$, а тому й $y > y^0$ так, що y^0 не може бути ефективною.

Геометрично, при $m = 2$, $P(Y)$ є "північно-східною" границею множини Y (без горизонтальних і вертикальних ділянок, чи ділянок, що знаходяться у досить "крутих і глибоких проваллях"), а $S(Y)$ може додатково містити в собі вертикальні й горизонтальні ділянки границі, що прилягають до *P(У).* Так, на рис. 4.1.3 множина $P(Y)$ (ефективна границя Y) утворена кривими *bc*, *ef*, а $S(Y)$ складається з двох частин – *abcd* (включаючи *d*) і *efg*. У цьому легко переконатися, якщо помітити, що точки, які є кращими ніж y за відношенням ">", заповнюють прямий кут, сторони якого паралельні осям координат із вершиною у точці y (сама точка y виключається); а точки, що є кращими за y за відношенням ">>", складають внутрішність цього ж кута.

Економічна інтерпретація оптимальності за Парето. Визначення (слабко) ефективної альтернативи є "статичним" у тім сенсі, що ґрунтується на попарному порівнянні альтернатив і не пов'язується з питанням про те, чи можливо "повільно" перейти від однієї альтернативи до іншої, кращої, збільшуючи кожен критерій. Можливість здійснення такого переходу в деяких, особливо економічних моделях, становить великий інтерес. Прикладом є модель чистого обміну, у якій кожен споживач бере участь в обміні, прагнучи скласти собі набір товарів найбільшої корисності, тобто формально максимізувати свою функцію цінності. Такого роду моделі розглядали ще в XIX ст. Ф. Еджворт і В. Парето. Ефективним для моделі обміну є стан (розподіл товарів між споживачами), який не може бути покращеним шляхом перерозподілу товарів для жодного з учасників без обмеження інтересів деяких інших учасників. Отже, оптимальність за Парето відбиває ідею економічної рівноваги: якщо стан не є ефективним, то буде відбуватися торгівля, що приведе до ефективного стану. Якщо процес обміну розглядати як послідовність угод, вигідних усім учасникам, то формалізовано його можна описати гладкою кривою, рухаючись уздовж якої, усі критерії збільшуються. Тоді можна виділити стани, із яких не виходить жодна гладка крива такого типу. Такі стани були названі С. Смейлом критичними точками Парето. Зрозуміло, що множина таких точок (критична множина Парето) включає всю множину слабко-ефективних точок, але ширше останньої (через "локальний характер" визначення критичної точки Парето).

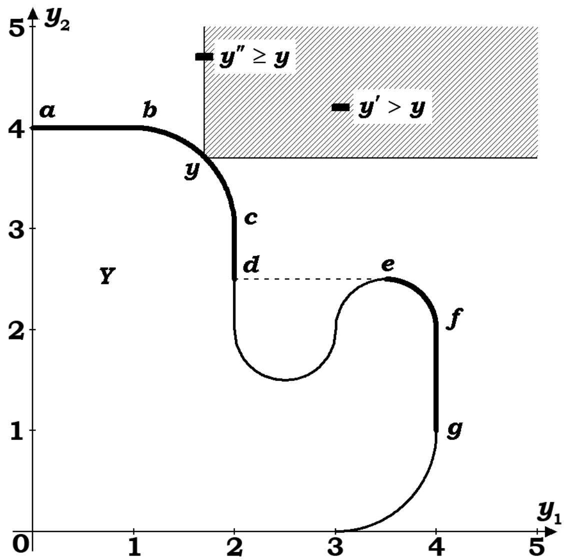

Рис. 4.1.3

Власно-ефективні альтернативи. Дослідження показують, що серед ефективних можуть зустрітися оцінки (альтернативи), що виявляються у певному сенсі аномальними.

Приклад 1. Розглянемо таку множину оцінок:

$$Y = \left\{ y \in E^2 \middle| y_1 \leq -(y_2)^2 \right\}.$$

Ефективні оцінки утворюють частину параболи $y_1 = -(y_2)^2$, що лежить у другому квадранті (Рис. 4.1.4). До ефективних відноситься й оцінка $y^* = (0,0)$. Різниці значень координат ефективних оцінок y і y^* виявляються рівними величинам:

$$\Delta y_2 = y_2 - y_2^* = y_2 > 0 \text{ і } \Delta y_1 = y_1 - y_1^* = -(\Delta y_2)^2 < 0 .$$

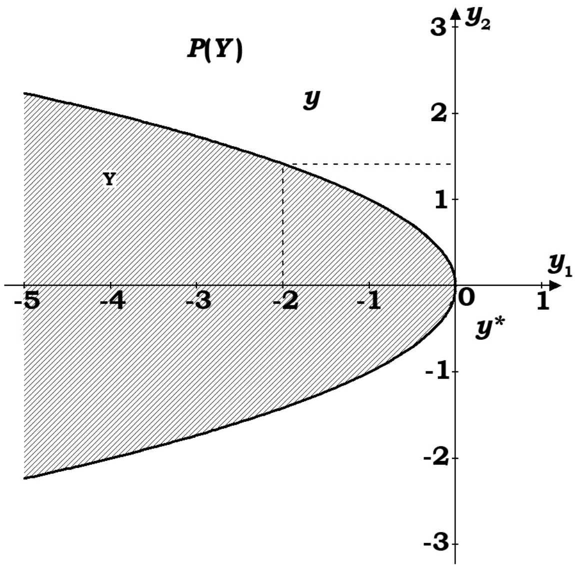

Рис. 4.1.4

Отже, якщо перейти з точки y^* у досить близьку до неї ефективну точку y, то буде отримано виграш першого порядку малості за другим критерієм за рахунок програшу другого порядку малості за першим критерієм. Якщо критерій f_1 не вважати набагато важливішим за f_2, то, очевидно, природно погодитися на деяке збільшення f_2, допустивши на порядок менші втрати по f_1. Таким чином, оцінка y^* є аномальною: вона є нестійкою в зазначеному випадку і тому відповідна їй альтернатива не може претендувати на оптимальність.

Розглянутий приклад доводить, що іноді має сенс спеціально виділяти ефективні оцінки (і альтернативи), які позбавлені подібних небажаних властивостей. Перше визначення такого роду ефективних рішень, названих власне ефективними (proper efficient), було дано Х. Куном і А. Таккером. Однак воно було сформульоване для диференційованого випадку і пов'язане зі спеціальними умовами регулярності, що дозволили одержати необхідні умови оптимальності. Для загального випадку визначення власної ефективності було запропоновано А. Джеофріоном.

Визначення 4.1.3. Ефективна оцінка $y^0 \in P(Y)$ називається *власноефективною чи оптимальною за Джеофріоном*, якщо існує таке додатне число θ, що для $\forall i \in M$, $\forall y \in Y$ (для яких виконується нерівність $y_i > y_i^0$), існує індекс $j \in M$ такий, що $y_j < y_j^0$ і виконується нерівність:

$$(y_i - y_i^0)/(y_j^0 - y_j) \le \theta\,. \qquad (4.1.2)$$

Зазначимо, що оскільки y^0 ефективна, то у випадку існування ефективної оцінки *y*, для якої при деякому *i* виконується нерівність $y_i > y_i^0$, *y* буде також ефективною, а тоді $\exists$ номер *j*, для якого буде справедливою нерівність $y_j < y_j^0$ (оскільки ефективні оцінки *y* та y' є між собою незрівнянними). Тому зміст приведеного визначення полягає у вимозі існування числа θ, для якого при зазначених умовах виконується (4.1.2).

Альтернативи, яким відповідають власно-ефективні оцінки, також називаються власно-ефективними чи оптимальними за Джеофріоном. Множину всіх таких альтернатив (оцінок) будемо позначати через *G*(*X*) (*G*(*Y*)). Так, у наведеному прикладі 1 множина *G*(*Y*) – це верхня гілка параболи (без вершини y^*).

Приклад 2. Найкраща за відношенням "$\ge$" (абсолютно-оптимальна) оцінка y^0 є власно-ефективною. Так як $y^0 \ge y$ для $\forall\ y \in Y$, то нерівність $y_i > y_i^0$ не виконується при жодному $i \in M$ та для жодного $y \in Y$. Тому для власної ефективності y^0 необхідність в умові (4.1.2) відсутня.

Звідси випливає, що альтернатива, яка обертає в максимум одночасно кожний із критеріїв f_i, є власно-ефективною. Зокрема, в однокритеріальних задачах будь-яка оптимальна альтернатива є власно-ефективною.

Приклад 3. Якщо множина *Y* є скінченною, то будь-яка ефективна оцінка є власно-ефективною. Якщо ефективна оцінка єдина, то є абсолютно-оптимальною, тому є власно-ефективною (попередній приклад). Якщо ж *P*(*Y*) містить більше однієї оцінки, то шукане додатне число θ можна задати рівністю:

$$\theta = \max\left\{ {y_i - y_i^0}\Big/{y_j^0 - y_j} \,\Big|\, y \in Y;\ i, j \in M;\ i \ne j;\ y_i > y_i^0;\ y_j^0 > y_j \right\}.$$

Отже, якщо *Y* є скінченним (а для цього достатньо скінченності множини альтернатив *X*), то поняття ефективності та власної ефективності рівносильні.

Ефективна оцінка, що не є власно-ефективною, називається *невласно-ефективною.* Аналогічна термінологія вводиться і для альтернатив. Це означає, що переходом від невласно-ефективної альтернативи до деякої іншої можна забезпечити збільшення принаймні по одному певному критерію за рахунок втрат вищого порядку малості за всіма тими критеріями, значення яких зменшаться. Іншими словами, невласно-ефективна альтернатива в зазначеному сенсі є аномальною (нестійкою).

Примітка. Як уже вказувалося, поняття власно-ефективних оцінок і альтернатив не має сенсу вводити в тих випадках, коли один критерій важливіший за інші. Задачі, у яких критерії впорядковані за важливістю (і перенумеровані) так, що кожен попередній незрівнянно важливіший за усі наступні, називаються лексикографічними задачами оптимізації тому, що в таких задачах відношення нестрогої переваги є лексикографічним порядком "$\overset{lex}{\geq}$". Цей порядок задається так: $y \overset{lex}{\geq} y'$, коли виконана одна з умов:

1) $y_1 > y_1'$;

2) $y_1 = y_1',\ y_2 > y_2'$;

…………………

m) $y_i = y_i',\ i = 1, 2, \ldots, m-1,\ y_m > y_m'$;

m + 1) $y = y'$.

Відношення "$\overset{lex}{\geq}$", що є повним, впорядковує оцінки подібно тому, як розташовуються слова в словнику, і цим пояснюється походження прикметника "лексикографічний". З визначення видно, що в лексикографічній задачі варто домагатися як завгодно малого збільшення більш важливого критерію за рахунок як завгодно великих втрат за всіма іншими, менш важливими критеріями. Саме тому лексикографічно-оптимальна (найкраща за $\overset{lex}{\geq}$) оцінка не обов'язково буде власно-ефективною, хоча, як легко переконатися, вона обов'язково є невласно-ефективною.

Вище були введені поняття ефективності декількох типів і установлений взаємозв'язок між ними. Цьому зв'язку відповідають такі включення для множини оцінок і альтернатив, ефективних у різному сенсі: $G(Y) \subseteq P(Y) \subseteq S(Y),\quad G(X) \subseteq P(X) \subseteq S(X)$.

Приклади, наведені в цьому розділі, показують, що кожне з цих включень може бути строгим.

Контрольні завдання до § 1

1. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 3x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 + 2x_2 \leq 6,\ x_{1,2} \geq 0.$$

2. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$2x_1 + x_2 \to \max,\ -x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \leq 4,\ x_2 \leq 2,\ x_{1,2} \geq 0.$$

3. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 - x_2 \to \max,\ -x_1 + 3x_2 \to \max,\ -x_1 + 2x_2 \geq 2,\ 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 4.$$

4. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 \to \max,\ x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ -4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0.$$

5. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 4x_2 \to \max,\ 3x_1 + x_2 \le 9,\ x_1 + 3x_2 \le 9,\ x_1 + x_2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0.$$

6. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 + x_2 \to \max,\ x_2 \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ -2x_1 + x_2 \le -1,\ x_1 - x_2 \le 3,\ x_{1,2} \ge 0.$$

7. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 \to \max,\ -x_1 + 2x_2 \to \max,\ -x_1 + 2x_2 \le 2,\ 3x_1 - 2x_2 \le 6,\ x_{1,2} \ge 0.$$

8. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 \to \max,\ x_2 \to \max,\ 2x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0\ .$$

9. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 \to \max,\ x_1 + x_2 \to \max,\ x_1^2 + 2x_2^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0\ .$$

10. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у такій двокритеріальній задачі:

$$x_1 + x_2 \to \max,\ x_2 \to \max,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_{1,2} \ge 0\ .$$

~~§ 2. Умови оптимальності~~

~~У цьому розділі встановлюються умови оптимальності [10] без будь-яких істотних припущень щодо структури множини альтернатив X і властивостей заданої на ній вектор-функції критеріїв $f = (f_1,\ldots f_m)$. Для простоти й наочності викладення будемо розглядати умови оптимальності стосовно до оцінок альтернатив, маючи на увазі, що отримані результати легко переносяться і на самі альтернативи.~~

~~**Теорема 4.2.1.** (умови слабкої ефективності оцінок (Гермейєр)). Припустимо, що $y^0 > 0$. Оцінка y^0 є слабко ефективною тоді й тільки тоді, коли існує вектор $\mu \in M^+ = \left\{ \mu = (\mu_i)_{i\in M} \,\middle|\, \sum_{i\in M} \mu_i = 1;\ \mu_i > 0,\ i \in M \right\}$ такий, що:~~

$$\cancel{\min_{i\in M} \mu_i y_i^0 = \max_{y\in Y} \min_{i\in M} \mu_i y_i\ .} \qquad \cancel{(4.2.1)}$$