§ 4. Метод аналізу ієрархій

Деякі складні задачі експертного оцінювання мають структуровану множину критеріїв. Однією з найбільш поширених структур множини критеріїв є ієрархія. У вершині ієрархії (інколи кажуть на верхньому чи на першому рівні) знаходиться найважливіший критерій. Деяка підмножина критеріїв утворює другий (за важливістю) рівень ієрархії, інша підмножина – третій і т. д. На нижньому рівні ієрархії знаходяться безпосередньо альтернативи. На рис. 3.4.1 наведено загальну схему ієрархії, де f_j^i – елементи ієрархії критеріїв, x_i – альтернативи. Верхній індекс елементів вказує рівень ієрархії, нижній – порядковий номер. Метод аналізу ієрархій (МАІ, запропонований Сааті [22]) реалізує декомпозицію задачі експертного оцінювання на простіші складові частини. Унаслідок цього визначається відносна значимість альтернатив за ієрархічною системою критеріїв. Відносна значимість виражається чисельно у вигляді векторів пріоритетів. Отримані таким чином значення векторів пріоритетів є оцінками у шкалі відношень і відповідають так званим жорстким оцінкам.

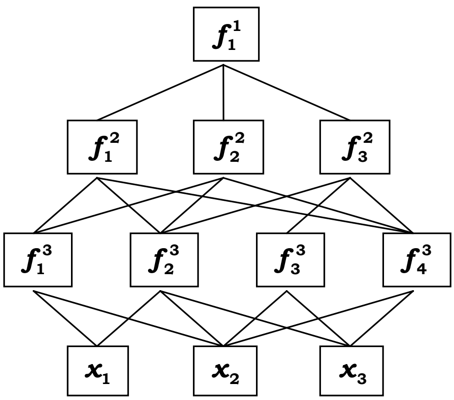

Рис. 3.4.1

Можна виділити ряд модифікацій МАІ, які визначаються характером зв'язків між критеріями й альтернативами, розташованими на найнижчому рівні ієрархії, а також методом порівняння альтернатив. За характером зв'язків між критеріями й альтернативами визначається два типи ієрархій. До першого типу відносяться такі, у яких кожен критерій, що має зв'язок з альтернативами, пов'язаний з усіма розглянутими альтернативами (тип ієрархій з однаковим числом і функціональним складом альтернатив). До другого типу ієрархій належать такі, у яких кожен критерій, що має зв'язок з альтернативами, пов'язаний не з усіма альтернативами (тип ієрархій із різним числом і функціональним складом альтернатив). У МАІ відомі три методи порівняння альтернатив: попарне порівняння; порівняння альтернатив щодо стандартів і порівняння альтернатив копіюванням. Нижче розглядаються методологія МАІ та відмінні риси його модифікацій.

Метод попарного порівняння елементів ієрархії. У цій модифікації методу розглядається ієрархія з однаковими числом і функціональним складом альтернатив.

Для установлення відносної важливості елементів ієрархії використовується шкала відношень (табл. 3.4.1). Ця шкала дозволяє експерту ставити у відповідність ступеням переваги одному порівнюваному об'єкту перед іншим – деяке число.

Таблиця 3.4.1. **Шкала відношень (ступеня значущості дій)**

Ступінь значимості	Визначення	Пояснення
1	Однакова значимість	Дві дії вносять однаковий внесок у досягнення мети
3	Слабка значимість	Існують недостатньо переконливі міркування на користь переваги однієї з дій
5	Істотна значимість	Є дані для того, щоб довести перевагу однієї з дій
7	Очевидна значимість	Переконливе свідчення на користь однієї дії перед іншою
9	Абсолютна значимість	Незаперечні переконливі свідчення на користь переваги однієї дії іншій
2, 4, 6, 8	Проміжні значення сусідніми судженнями	Ситуація, коли необхідно компромісне рішення

Правомірність цієї шкали доведена практично при порівнянні з багатьма іншими. При використанні зазначеної шкали експерт, порівнюючи два об'єкти в змісті досягнення цілі, розташованої на вищому рівні ієрархії, повинен поставити у відповідність цьому порівнянню число в інтервалі від 1 до 9 або обернене до нього. У тих випадках, коли важко розрізнити скільки є проміжних градацій від абсолютного до слабкої переваги або цього не потрібно в конкретній задачі, може використовуватися шкала з меншим числом градацій. Гранично шкала має дві оцінки: 1 – об'єкти рівнозначні; 2 – перевага одного об'єкта над іншим.

Матриці попарних порівнянь. Після побудови ієрархії встановлюється метод порівняння її елементів. Якщо приймається метод попарного порівняння, то будується множина матриць попарних порівнянь. Для цього в ієрархії виділяють елементи двох типів: елементи – "батьки" і елементи – "нащадки". Елементи – "нащадки" впливають на відповідні елементи вищого рівня ієрархії, які є для них "батьками". Матриці попарних порівнянь будуються для всіх елементів – "нащадків", що відносяться до відповідного елемента – "батька". Елементами – "батьками" можуть бути елементи, що належать будь-якому ієрархічному рівневі, крім останнього, на якому розташовані, як правило, альтернативи. Парні порівняння проводяться в термінах домінування одного елемента над іншим. Отримані судження виражаються в цілих числах за дев'ятибальною шкалою (див. табл. 3.4.1).

Заповнення квадратних матриць попарних порівнянь здійснюється за таким правилом. Якщо елемент E_1 домінує над елементом E_2, то комірка матриці, що відповідає рядкові E_1 і стовпчику E_2 заповнюється цілим числом, а комірка, що відповідає E_2 і E_1, заповнюється оберненим до нього числом. Якщо елемент домінує E_2 над E_1, то ціле число ставиться в комірку, що відповідає рядкові E_2 *і* стовпчику E_1, а дріб проставляється в клітку, що відповідає E_1 і E_2. Якщо елементи рівноцінні, то в симетричних комірках матриці ставляться одиниці.

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1/\mu_1 & \mu_1/\mu_2 & \dots & \mu_1/\mu_n \\ \mu_2/\mu_1 & \mu_2/\mu_2 & \dots & \mu_2/\mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n/\mu_1 & \mu_n/\mu_2 & \dots & \mu_n/\mu_n \end{pmatrix}.$$

Для отримання кожної матриці експерт виносить $n(n-1)/2$ суджень (тут n – порядок матриці попарних порівнянь). Розглянемо приклад формування матриці попарних порівнянь.

Нехай $E_1, E_2, \dots, E_n$ – множина з n елементів (альтернатив) і $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ відповідно до їхньої ваги або інтенсивності. Порівняємо попарно вагу або інтенсивність, кожного елемента з вагою або інтенсивністю, будь-якого іншого елемента множини відносно до загальної для них властивості або цілі (стосовно елемента – "батько"). У цьому випадку матриця попарних порівнянь має поданий вигляд.

Матриця попарних порівнянь має властивість зворотної симетрії, тобто $\mu_{ij} = 1/\mu_{ji}$. При проведенні попарних порівнянь варто відповідати на такі питання: який із двох порівнюваних елементів є важливішим (або має більший вплив) чи є ймовірним (або важливішим). При порівнянні критеріїв звичайно запитують, який із критеріїв важливіший; при порівнянні альтернатив стосовно критерію – яка з альтернатив краща або ймовірна.

Оцінка однорідності суджень. Ранжування елементів, що аналізуються з використанням матриці попарних порівнянь, здійснюється на підставі аналізу головних власних векторів матриці попарних порівнянь. Обчислення головного власного вектора *W* додатної квадратної матриці *A* проводиться на підставі рівності $AW = \lambda_{\max} W$, де $\lambda_{\max}$ – максимальне власне число матриці *A*.

Для додатної квадратної матриці *A* правий власний вектор *W*, що відповідає максимальному власному числу $\lambda_{\max}$ із точністю до постійного множника *C*, можна обчислити за формулою:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = CW, \qquad (3.4.1)$$

де $e = (1,\ 1, \ldots, 1)^T$ одиничний вектор; *k* – показник степеня.

На практиці обчислення власного вектора виконуються до досягнення заданої точності ξ: $e^T (W^k - W^{k-1}) \le \xi$. Із достатньої для практики точністю можна прийняти $\xi = 0{,}01$ незалежно від порядку матриці. Максимальне власне значення обчислюється за формулою:

$$\lambda_{\max} = e^T AW. \qquad (3.4.2)$$

У практичних задачах кількісна (кардинальна) і транзитивна (порядкова) однорідність (погодженість) порушується, оскільки людські відчуття не можна виразити точною формулою. Для покращення однорідності в числових судженнях, яка величина a_{ij} не була б узята для порівняння *i*-го елемента з *j*-м, a_{ij} приписується значення оберненої величини, тобто $1/a_{ij}$. Звідси, якщо один елемент у *a* раз є важливішим за інший, то останній лише в $1/a$ раз є важливішим за перший.

При порушенні однорідності ранг матриці буде відмінний від одиниці і вона буде мати кілька власних значень. Однак при невеликих відхиленнях суджень від однорідності одне з власних чисел буде істотно більшим за інші та приблизно дорівнюватиме порядкові матриці. Таким чином, для оцінки однорідності суджень експерта необхідно використовувати відхилення величини максимального власного числа від порядку матриці *n*.

Однорідність суджень оцінюється індексом однорідності (*ІО*) або відношенням однорідності (*ВО*) з допомогою таблиці, у якій *M*(*ІО*) –

середнє значення (математичне сподівання) індексу однорідності випадково складеної матриці попарних порівнянь, що базується на експериментальних даних (табл. 3.4.2).

Таблиця 3.4.2. **Середнє значення індексу однорідності**

Порядок матриці	**М(ІО)**	**Порядок матриці**	**М(ІО)**	**Порядок матриці *(n)***	**М(ІО)**
1	0,00	6	1,24	11	1,51
2	0,00	7	1,32	12	1,48
3	0,58	8	1,41	13	1,56
4	0,90	9	1,45	14	1,57
5	1,12	10	1,49	15	1,59

За припустиме береться значення $BO \leq 0{,}1$. Якщо для матриці попарних порівнянь відношення однорідності $BO > 0{,}1$, то це свідчить про істотне порушення логічності суджень, допущеному експертом при заповненні матриці, тому експертові пропонується переглянути дані, використані для побудови матриці, щоб покращити однорідність.

Ієрархічний синтез використовується для зважування власних векторів матриць попарних порівнянь альтернатив вагами критеріїв (елементів), що знаходяться в ієрархії, а також для обчислення суми по усіх відповідних зважених компонентах власних векторів нижчого рівня ієрархії. Далі розглядається алгоритм ієрархічного синтезу з урахуванням позначень, прийнятих у попередній ієрархії.

Крок 1. Визначаються вектори пріоритетів альтернатив $W^{x}_{(f_i^j)}$ щодо елементів f_i^j передостаннього рівня ієрархії $(i = S)$. Тут через f_i^j позначені елементи ієрархії, причому верхній індекс i указує рівень ієрархії, а нижній індекс j – порядковий номер елемента на рівні. Обчислення множини векторів пріоритетів альтернатив W_S^x щодо рівня ієрархії S здійснюється за ітераційним алгоритмом, реалізованим на основі співвідношень (3.4.1) і (3.4.2) по вихідним даним, зафіксованим у матрицях попарних порівнянь. Унаслідок цього визначається множина векторів: $W_S^X = \left\{ W^X_{f_1^S}, W^X_{f_2^S}, \ldots, W^X_{f_p^S} \right\}$.

Крок 2. Аналогічно обробляються матриці попарних порівнянь власне елементів f_j^i. Дані матриці, побудовані так, щоб визначити перевагу елементів визначеного ієрархічного рівня щодо елементів вищого рівня, із якими вони безпосередньо пов'язані. Наприклад, для обчислення векторів пріоритетів елементів третього ієрархічного рівня (див. рис. 3.4.1) обробляються три матриці попарних порівнянь:

f_1^2	f_1^3	f_2^3	f_4^3
f_1^3	μ_1/μ_1	μ_1/μ_2	μ_1/μ_4
f_2^3	μ_2/μ_1	μ_2/μ_2	μ_2/μ_4
f_4^3	μ_4/μ_1	μ_4/μ_2	μ_4/μ_4

f_2^2	f_1^3	f_2^3	f_4^3
f_1^3	μ_1/μ_1	μ_1/μ_2	μ_1/μ_4
f_2^3	μ_2/μ_1	μ_2/μ_2	μ_2/μ_4
f_4^3	μ_4/μ_1	μ_4/μ_2	μ_4/μ_4

f_3^2	f_2^3	f_3^3	f_4^3
f_2^3	μ_2/μ_2	μ_2/μ_3	μ_2/μ_4
f_3^3	μ_3/μ_2	μ_3/μ_3	μ_2/μ_4
f_4^3	μ_4/μ_2	μ_4/μ_3	μ_4/μ_4

Унаслідок обробки матриць попарних порівнянь визначається множина векторів пріоритетів критеріїв: $W^f = \left\{ W^f_{f_j^i} \right\}$.

Отримані значення векторів використовуються згодом при визначенні векторів пріоритетів альтернатив щодо всіх елементів ієрархії.

Крок 3 . Здійснюється власне ієрархічний синтез, що полягає в послідовному визначенні векторів пріоритетів альтернатив щодо критеріїв f_j^i, які знаходяться на всіх ієрархічних рівнях, крім передостаннього, що містить критерії f_j^S. Обчислення векторів пріоритетів проводиться в напрямку від нижніх рівнів до верхнього з урахуванням конкретних зв'язків між критеріями, що належать різним рівням. Обчислення проводиться шляхом перемножування відповідних векторів і матриць.

Вираз для обчислення векторів пріоритетів альтернатив визначається так:

$$W^X_{f_j^i} = \left[W^X_{f_1^{i-1}}, W^X_{f_2^{i-1}}, \dots, W^X_{f_n^{i-1}} \right] \cdot W^f_{f_j^{i-1}},$$

де $W^X_{f_j^i}$ – вектор пріоритетів альтернатив щодо критерію $W^X_{f_j^{i-1}}$, що визначає *j*-й стовпчик матриці; $W^f_{f_j^i}$ – вектор пріоритетів критеріїв $f_1^{i-1}, f_2^{i-1}, \dots, f_n^{i-1}$, пов'язаних із критерієм f_j^i вищого рівня ієрархії.

Оцінка однорідності ієрархії. Після розв'язання задачі ієрархічного синтезу оцінюється однорідність всієї ієрархії за допомогою підсумовування показників однорідності всіх рівнів, приведених шляхом "зважування" до першого рівня ієрархії, де знаходиться коренева вершина. Число кроків алгоритму з обчислення однорідності визначається конкретною ієрархією.

Розглянемо принципи обчислення індексу та відношення однорідності ієрархії. Нехай задана ієрархія критеріїв і альтернатив (рис. 3.4.2) і для кожного рівня визначений індекс однорідності та вектори пріоритетів критеріїв так: IO_1^1 – індекс однорідності для 1-го рівня; $\{IO_1^2, IO_2^2\}$ – індекси однорідності для 2-го рівня; $\{IO_1^3, IO_2^3, IO_3^3\}$ – індекси однорідності для 3-го рівня; $\{W_1^1\}$ – вектор пріоритетів $f_1^2,\ f_2^2$ відносно критерію f_1^1; $\{W_1^2\}$, $\{W_2^2\}$ – вектори пріоритетів критеріїв $f_1^3,\ f_2^3,\ f_3^3$ відносно критеріїв $f_1^2,\ f_2^2$ другого рівня.

У цьому випадку індекс однорідності розглянутої ієрархії можна визначити за формулою:

$$IO = IO_1^1 + \left\{W_1^1\right\}^T \begin{pmatrix} IO_1^2 \\ IO_2^2 \end{pmatrix} + \left\{W_1^1\right\}^T \left[W_1^2 W_2^2\right]^T \begin{pmatrix} IO_1^3 \\ IO_2^3 \\ IO_3^3 \end{pmatrix}.$$

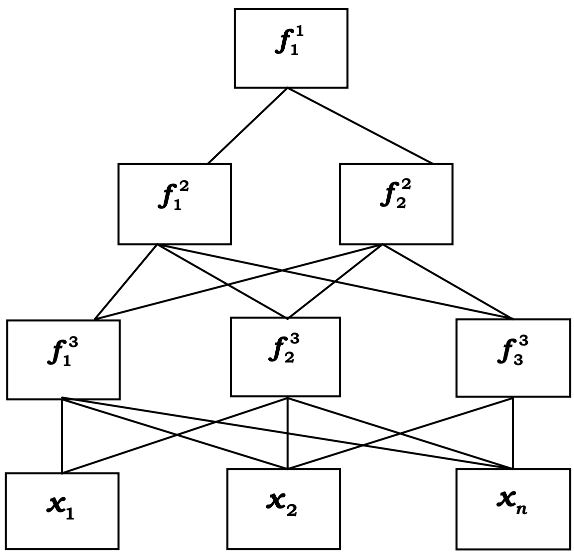

Рис. 3.4.2

Визначення відношення однорідності *ВО* для всієї ієрархії здійснюється за формулою: $BO = IO / M(IO)$, де $M(IO)$ – індекс однорідності ієрархії при випадковому заповненні матриць попарних порівнянь.

Розрахунок індексу однорідності $M(IO)$ за експериментальними даними (див. табл. 3.4.2) виконується за формулою аналогічною індексу однорідності. Однорідність ієрархії вважається задовільною при значеннях $BO \le 0.1$.

Агрегація думок декількох експертів. Для агрегування думок експертів береться середнє геометричне, що обчислюється за таким співвідношенням: $a_{ij}^{A} = \sqrt[n]{a_{ij}^{1} \ldots a_{ij}^{n}}$, де a_{ij}^{A} – агрегована оцінка елемента, що належить i-му рядку j-му стовпчику матриці попарних порівнянь; n – число матриць попарних порівнянь, кожна з яких складена одним експертом. Логічність цього критерію стає очевидною, якщо два експерти вказують при порівнянні об'єктів відповідно оцінки a і $1/a$, що при обчисленні агрегованої оцінки дає одиницю і свідчить про еквівалентність порівнюваних об'єктів.

Осереднення суджень експертів може здійснюватися і на рівні власних векторів матриць попарних порівнянь. Покажемо це на прикладі. Нехай задані судження двох експертів у виді матриць попарних порівнянь:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/7 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори W_i, максимальні власні значення $\lambda_{\max}$ й оцінки однорідності (IO, BO) для цих матриць мають такий вигляд:

✓ для матриці A_1

$$W_1 = (0{,}15,\ 0{,}16,\ 0{,}744)^T,\ \ \lambda_{\max} = 3{,}121,\ \ IO = 0{,}06,\ \ BO = 0{,}103;$$

✓ для матриці A_2

$$W_2 = (0{,}223,\ 0{,}127,\ 0{,}65)^T,\ \ \lambda_{\max} = 3{,}297,\ \ IO = 0{,}148,\ \ BO = 0{,}255.$$

Осереднення на рівні елементів власних векторів дає $W = (0{,}184,\ 0{,}117,\ 0{,}7)^T$. Осереднюючи елементи матриць A_1, A_2, одержимо матрицю: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2{,}45 & 0{,}17 \\ 0{,}41 & 1 & 0{,}26 \\ 5{,}9 & 3{,}9 & 1 \end{pmatrix}$.

Власним вектором матриці A буде: $W_A = (0{,}184,\ 0{,}116,\ 0{,}7)^T$.

Контрольні завдання до § 4

1. Методом аналізу ієрархій серед трьох автомобілів (А1, А2, А3) треба вибрати найкращий за критеріями (К1, К2, К3). Нехай за критерієм К1 автомобіль А1 має слабку значимість відносно до А2 та істотну значимість відносно до А3; автомобіль А3 має очевидну значимість відносно до А2. За критерієм К2 автомобіль А1 має очевидну значимість відносно до А2 і слабку значимість відносно до А3; автомобіль А3 має однакову значимість відносно до А2. За критерієм К3 автомобіль А1 має однакову значимість відносно до А2 та істотну значимість відносно до А3; автомобіль А2 має слабку значимість відносно до А3.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Ординальні та кардинальні оцінки, шкали критеріїв.
2. Що таке трикомпонентна модель пам'яті?
3. Привести приклади оцінки складності виконання елементарних операцій при прийнятті рішень.
4. Які основні ознаки "групової свідомості" за Янісом?
5. Опишіть загальну схему експертизи.
6. У чому полягає суть статистичних, алгебраїчних і методів шкалювання обробки експертної інформації?
7. Що таке відстань Хемінга і якими аксіомами вона визначається? Що таке медіани Кемені–Снелла, компроміс, середнє значення?
8. Опишіть методи фон Неймана-Моргенштерна та Гермогена–Акофа побудови кардинальних оцінок.
9. Задача голосування, індивідуальні переваги, профіль, методи голосування, колективна перевага.
10. Методи голосування типу Борда та Кондорсе. Методи Копленда і Сімпсона. Голосування з послідовним і паралельним виключенням.
11. Сформулюйте теорему Ерроу "Парадокс Ерроу".
12. Наведіть аксіоми анонімності, нейтральності, монотонності, поповнення, участі, неперервності. Сформулюйте теореми Янга та Мулена.
13. Маніпульованість, теорема Гіббарта–Саттертвайта.
14. У чому полягає метод аналізу ієрархій Сааті?
15. Як у методі Сааті здійснується аналіз однорідності суджень?
16. У чому полягає алгоритм ієрархічного синтезу?
17. Як у методі Сааті відбувається агрегування думок експертів?