§ 3. Методи голосування

Більшість суспільних рішень приймається на основі голосування. Голосуванням обираються президенти, народні депутати, голосуванням приймаються рішення у Верховній Раді, на засіданнях Вчених рад університету і факультетів, на засіданнях кафедр, при прийнятті рішень Державною екзаменаційною комісією, у студентських колективах, у сім'ї (яку телевізійну програму дивитись) і т. п. Хоча практика голосування нараховує тисячі років, фактичне його вивчення почалося близько двохсот років тому у працях французів Борда (Жан Шарль де Борд [1733–1799], фізик, математик, політік, член Французької Академії наук) і Кондорсе (Жан Антуан Ніколя де Кондорсе, [1745–1794], філософ, математик член Французької АН, у 1776–1792 рр. був член-кореспондентом Петербурзької Академії наук, у 1792 р. виключений за велінням Катерини II за жирондистські погляди, закінчив життя на гільйотині).

Розглянемо найуживаніші на практиці методи голосування. Нехай $N = \left\{\overline{1,n}\right\}$ – множина "виборців", $A = \{a,b,c,...\} = \{a_1, a_2,..., a_m\}$ – множина "кандидатів". Кожен виборець задає "індивідуальну перевагу" на множині кандидатів у вигляді строгого ранжування, тобто задає лінійний порядок $L(A)$ (повне, транзитивне, асиметричне бінарне відношення). Система всіх індивідуальних переваг називається *профілем.* Розглянемо профіль, що задається табл. 3.3.1 (далі будемо писати "профіль табл. 3.3.1"). Цей профіль містить інформацію про те, що п'ять перших виборців на перше місце поставили кандидата a, на друге – d, на третє – c, на четверте (останнє) $-b$. Аналогічно, наступні три виборці розташували кандидатів у послідовності – a, d, b, c і т.д. Отже, маємо $n = 17$ і $m = 4$.

Таблиця 3.3.1

Кількість голосів	5	3	5	4
Впорядкування кандидатів	a	a	b	c
	d	d	c	d
	c	b	d	b
	b	c	a	a

Правило (метод) відносної більшості. На перше місце вісім виборців поставили кандидата a ($n_a = 8$), п'ять виборців – b ($n_b = 5$) і чотири виборці – c ($n_c = 4$), $n_d = 0$. Перемагає той кандидат, за якого проголосувала більшість виборців (у даному випадку – a, випадок рівності голосів поки що не розглядаємо). Зрозуміло, що перемогти може й кандидат, за якого проголосували, наприклад, 1 % виборців (за інших – ще менше). Абсурд? Так, але ж за цим методом обираються "мери" в Україні. Тому назвемо це "парадоксом голосування".

Правило відносної більшості з вибуванням ("відносна більшість у два тури", "абсолютна більшість"). За подібним правилом відбуваються вибори Президента України. Якщо деякий кандидат набрав більше половини голосів, то він – переможець. Інакше до другого туру проходять два кандидати, що набрали відносну більшість голосів (тому – "відносна у два тури"). Для нашого профілю у другий тур проходять кандидати a і b. Після "відсіювання" інших кандидатів (тому – "відносна більшість з вибуванням"), маємо табл. 3.3.2 (переваги виборців після першого туру не змінюються).

Таблиця 3.3.2

Кількість голосів	5	3	5	4
Впорядкування кандидатів	a	a	b	b
	b	b	a	a

У другому турі $n_a = 8$, $n_b = 9$, тобто перемагає кандидат b (перемагає "абсолютно", набираючи більше половини голосів, тому метод і називається методом "абсолютної більшості"). Зауважимо, що випадок рівності голосів ми поки що виключаємо. Не розглядається і випадок "голосування" проти обох, як при виборах Президента України, коли перемогти може кандидат, який набрав менше половини голосів виборців.

Правило Борда ("підрахунку очок"). У цьому правилі за останнє місце кандидата йому нараховується 0 балів (очок), за передостаннє – 1, ..., за перше – (m – 1).

Розглянемо профіль (табл. 3.3.3). Маємо: $n_a = 24$, $n_b = 22$, $n_c = 27$, $n_d = 29$. Перемагає кандидат, що набрав найбільшу кількість балів, у нашому випадку – це кандидат d.

Таблиця 3.3.3

Кількість голосів	5	3	5	4	S
Впорядкування кандидатів	a	a	b	c	3
	d	d	c	d	2
	c	b	d	b	1
	b	c	a	a	0

Зауважимо, що за подібним методом часто визначаються переможці у спортивних змаганнях (наприклад, у багатоборстві враховують кількість перших, других місць і т. д.).

Правило Кондорсе. За Кондорсе переможцем оголошується той кандидат, що "перемагає" всіх інших у попарних порівняннях. Так, у попередньому профілі: вісім виборців поставило кандидата a вище за b, дев'ять виборців поставило a нижче за b (позначимо це $a:b=8:9$). Маємо $b:c=8:9$, $c:d=9:8$, $a:c=8:9$, $b:d=5:12$, $a:d=8:9$. Єдиний кандидат, який "перемагає" всіх інших – це кандидат c.

Зауважимо, що правило Кондорсе видається вельми логічним – переможець перемагає всіх інших у єдиноборствах. Шахіст, що переміг усіх інших претендентів у мікро матчах (скажімо, із двох партій) – безумовно найкращий. Та й при формуванні індивідуальної переваги виборець попарно порівнює (свідомо чи підсвідомо) кандидатів. Але в читача вже, мабуть, виникло запитання. А як бути, якщо кожен із кандидатів когось перемагає, а комусь програє? У цьому випадку за визначенням переможця за Кондорсе (переможця Кондорсе) не існує. Це один із так званих "парадоксів голосування". Найпростіший випадок маємо при $n=m=3$: для першого виборця a кращий за b і c, b кращий за c (позначимо це $a \succ b \succ c$); для другого $b \succ c \succ a$; для третього $c \succ a \succ b$. Цей профіль називається "Циклом Кондорсе". Маємо – $a:b=2:1$, $a:c=1:2$, $b:c=2:1$ (у кожного по одному виграшу і по одному програшу).

Повернемось до правил голосування. Наведені вище правила (чи подібні до них) застосовуються в житті, усі є досить логічними, кожне з них має свої "переваги". Але їхнє застосування до одного й того самого профілю (табл. 3.3.1) дає абсолютно різні результати! Це ще один "парадокс голосування".

Який висновок можна зробити? Не все так просто, як може здатись на перший погляд, правила голосування потрібно вивчати. Причому, можна робити це двома шляхами. Перший – придумувати "хороші" ("логічні", "розумні") правила голосування (і сприймати результат як даність), другий – задавати "розумні" ("логічні", "хороші") умови на результат і підбирати" правила, які приводять до цього результату (наприклад, "результат виборів повинен бути таким, щоб не було ображених").

Спочатку розглянемо знаменитий "парадокс Ерроу" (Р. Ерроу, американський математик, економіст, лауреат Нобелівської премії), із якого власне і почалась сучасна теорія голосування.

Розглянемо загальну задачу. Нехай на основі індивідуальних преваг необхідно знайти не лише "колективного" ("спільного") переможця, а й "колективний порядок". Причому, нехай, як і раніше індивідуальні переваги будуть строгими (кандидати в індивідуальних перевагах не повинні "ділити" місця), колективний же порядок може бути і нестрогим (єдиним розумним компромісом при рівноправності виборців і кандидатів у випадку переваг $a \succ b$ (одного виборця) і $b \succ a$ (в іншого), звичайно, буде $a = b$ (a і b "ділять" місце)). Найпростіший метод побудови колективного порядку за даним правилом голосування є наступний – переможець виключається з профілю, для отриманого профілю знову знаходиться переможець, який займає друге місце у колективній перевазі, і т. д.

Так, для профілю табл. 3.3.1, після виключення переможця a для правила відносної більшості маємо профіль табл. 3.3.4. Для цього профілю переможцем буде кандидат d, після його виключення маємо профіль табл. 3.3.5, для якого переможцем буде c. Отже, правило відносної більшості дає колективну перевагу $a \succ d \succ c \succ b$.

Таблиця 3.3.4

Кількість голосів	5	3	5	4
Впорядкування кандидатів	d	d	b	c
	c	b	c	d
	b	c	d	b

Таблиця 3.3.5

Кількість голосів	5	3	5	4
Впорядкування кандидатів	c	b	b	c
	b	c	c	b

Аналогічно, правило абсолютної більшості дає колективну перевагу $b \succ c \succ d \succ a$ (зверніть увагу, ця перевага "повністю протилежна" попередній).

Правило Борда дає: $d \succ c \succ a \succ b$, Кондорсе: $c \succ d \succ b \succ a$.

Отже, "достатньо розумні" правила побудови колективного порядку приводять до різних результатів (аж до протилежних).

Підемо іншим шляхом. Задамо "розумні апріорні" вимоги до колективного ранжування у вигляді аксіом.

Аксіома А1 (повнота). Для будь-яких кандидатів a і b колективний порядок встановлює, що або $a \succ b$, або $a = b$, або $a \prec b$ (скорочено – $\forall\, a,b \in A$: $(a \succ b) \vee (a = b) \vee (a \prec b)$).

Аксіома А2 (транзитивність): $(a \succeq b) \wedge (b \succeq c) \Rightarrow a \succeq c$.

Аксіома А3 (одностайність): якщо для всіх виборців $a \succeq b$, то й у колективному порядку також $a \succeq b$ ($\forall i \in N : a \overset{i}{\succeq} b \Rightarrow a \overset{k}{\succeq} b$).

Цю аксіому можна назвати і "паретовість" і "ефективність".

Аксіома А4 (незалежність). Розташування будь-яких двох кандидатів a і b у колективному порядку залежить лише від їхнього взаємного розташування в індивідуальних порядках і не залежить від розташування інших кандидатів.

Відмова від першої аксіоми може призвести до ситуації – "вибори не відбулися", відмова від транзитивності теж виглядає досить дивною, порушення аксіоми одностайності однозначно свідчить про "фальсифікацію" виборів, відмова від аксіоми незалежності приводить до можливості маніпулювання шляхом зняття чи введення кандидатів (положення кандидатів a і b у колективному порядку, наприклад, $a \overset{k}{\succ} b$, не повинно залежати від індивідуальної переваги у вигляді $a \succ c \succ b$, чи $a \succ b \succ c$, чи $c \succ a \succ b$, чи взагалі у відсутності кандидата c).

Теорема 3.3.1. ("Парадокс Ерроу", 1951). Єдиним колективним порядком, що задовольняє аксіомам А1–А4, є "диктаторський", тобто існує виборець $k \in N$ такий, що колективний порядок збігається з його індивідуальним порядком.

Парадокс Ерроу свого часу вразив науковий світ, згадаймо, якою була геополітична карта світу у 1951 р. Можливо він дає пояснення, чому наша цивілізація пройшла через диктаторські режими (а в деяких країнах ще й зараз існують диктатури). Хоча не все так сумно. Якщо $a = b$, то $b = a$, тобто теорема Ерроу стверджує не лише те, що колективний порядок "задається" індивідуальним порядком "диктатора", але й те, що індивідуальний порядок деякого виборця ("провидця") збігається з колективним порядком. А в цьому не має нічого поганого! З іншого боку, якщо до аксіом **А1 – А4** приєднати аксіому **ВД** "відсутності диктатора", то цим аксіомам за теоремою Ерроу відповідає "порожній" вибір. Для "непорожності" вибору можна спробувати послабти аксіому **ВД**. Саме це і реалізує система аксіом Ерроу–Гурвиця [18], в якій аксіома **ВД** заміняється аксіомою **ДД** "допустимості диктатора". Переходимо до доведення теореми.

Визначення 3.3.1. Будь-яка підмножина M множини виборців N називається коаліцією. Коаліція M називається K-вирішальною для кандидата a проти кандидата b тоді і лише тоді, коли з того, що всі члени коаліції M ставлять a вище за b, а всі виборці, що не входять у M, ставлять b вище за a, випливає $a \overset{K}{\succ} b$. Цей факт записується як $M = K(a,b) \Leftrightarrow (\forall i \in M \subseteq N:\ a \overset{i}{\succ} b,\ \forall j \in N \setminus M:\ a \overset{j}{\prec} b \Rightarrow a \overset{K}{\succ} b)$.

Визначення 3.3.2. Якщо для будь-яких двох кандидатів a і b коаліція M є K-вирішальною для a проти b, вона називається просто K-вирішальною. Тобто $M = K(a,b), \forall a,b \in A$. Зауважимо, що вся множина N є K-вирішальною (у силу А3). Порожня множина не може бути K-вирішальною для a проти b, ні для яких a і b. Якщо ніхто не ставить a вище за b, тобто у всіх $b > a$, то знову у силу А3 : $b \overset{K}{\succ} a$, і не може бути $a \overset{K}{\succ} b$.

Лема 3.3.1. Існує пара кандидатів (a,b), для якої знайдеться коаліція L, що складається з одного виборця $\{l\}$ така, що $L = K(a, b)$.

Доведення. Позначимо через T множину таких коаліцій M, для кожної з яких існує пара (a,b) така, що $M = K(a, b)$. Множина T не порожня, оскільки $N \subseteq T$. Візьмемо у T коаліцію L, що містить найменшу кількість виборців. Оскільки $T \neq \varnothing$, то L має не менше за одного виборця ($|L| \geq 1$). Нехай $|L| \geq 2$. Розіб'ємо L на 2 не порожні підмножини, що не перетинаються: одна $L' = \{l\}$ з одного елемента, інша L'' – з усіх останніх. Розглянемо профіль, заданий табл. 3.3.6.

Таблиця 3.3.6

L'	L''	$N \backslash L$
a	c	b
b	a	a
c	b	c

Оскільки коаліція L – K-вирішальна, то $a \overset{K}{\succ} b$. Якщо $c \overset{K}{\succ} b$, то L'' є K-вирішальною c проти b. Але в L'' менше виборців, ніж у множині L, яка за визначенням мінімальна. Отже c не може бути гіршим за b, звідси (у силу аксіоми повноти А1) $b \overset{K}{\succ} c$. Отже, $a \overset{K}{\succ} b$, $b \overset{K}{\succ} c$ і за аксіомою транзитивності А2 $a \overset{K}{\succ} c$. Але це означає, що L' є K-вирішальною для a проти c, що суперечить мінімальності L. Лему доведено.

Лема 3.3.2. Коаліція $L = \{l\}$, існування якої доведено у лемі 3.1, є K-вирішальною.

Доведення. Нехай c – довільний кандидат. Розглянемо профіль 1 (див. стор. 105). Оскільки $\{l\} = K(a, b)$, то $a \overset{K}{\succ} b$. З аксіоми одностайності А3 випливає $b \overset{K}{\succ} c$, у свою чергу (з аксіоми А2), $a \overset{K}{\succ} c$. З аксіоми незалежності А4 маємо, що $a \overset{K}{\succ} c$ незалежно від b, звідки $\{l\} = K(a, c)$.

Аналогічно для будь-якого кандидата *d*, розглянувши профіль 2, можна довести, що $d \overset{K}{\succ} c$. Отже, $\{l\} = K(c,d)$ для $\forall c, d$.

Профіль 1	
$\{l\}$	$N \backslash \{l\}$
$\vdots$	$\vdots$
a	b
$\vdots$	$\vdots$
b	c
$\vdots$	$\vdots$
c	a
$\vdots$	$\vdots$

Профіль 2	
$\{l\}$	$N \backslash \{l\}$
$\vdots$	$\vdots$
d	c
$\vdots$	$\vdots$
a	d
$\vdots$	$\vdots$
c	a
$\vdots$	$\vdots$

Лема 3.3.3. Описаний у лемі 3.3.2 виборець l – диктатор.

Доведення. Розглянемо профіль $\ldots \overset{l}{\succ} a \overset{l}{\succ} \ldots \overset{l}{\succ} c \overset{l}{\succ} \ldots \overset{l}{\succ} b \overset{l}{\succ} \ldots$, усі інші виборці ставлять *c* вище за *a* і *b*, інші кандидати розташовуються довільно. Оскільки коаліція $L = \{l\}$ є *K*-вирішальною, то $a \overset{K}{\succ} c$, за аксіомою А3: $c \overset{K}{\succ} b$, за аксіомою А2: $a \overset{K}{\succ} b$. Виключаючи кандидата *c*, у силу аксіоми незалежності А4, маємо: $a \overset{l}{\succ} b$ і $a \overset{K}{\succ} b$, незалежно від розташування a і b у перевагах інших виборців. Теорему доведено.♦

Повернемось до вивчення методів голосування, що широко застосовуються на практиці.

По-перше, узагальнимо правило Борда й Кондорсе.

Задамо неспадаючу послідовність дійсних чисел $s_0 \le s_1 \le \ldots \le s_{m-1}$, $s_0 < s_{m-1}$. Виборці ранжують кандидатів, причому s_0 балів дається за останнє місце, s_1 – за передостаннє і т. д. Вибирається кандидат із максимальною сумою балів. Тим самим отримуємо "узагальнене правило Борда" або "метод голосування з підрахуванням балів".

Правило відносної більшості, таким чином, є частинним випадком методу голосування з підрахунком очок (у ньому $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-2} = 0$, $s_{m-1} = 1$). І, звичайно, саме правило Борда є частинним випадком цього методу ($s_0 = 0, s_1 = 1, \ldots, s_{m-1} = m-1$).

Цікаво порівняти правила Кондорсе й Борда (узагальнене правило Борда). У певному сенсі вони є "несумісними" – існують профілі, при яких переможець Кондорсе не може бути переможцем Борда ні за якою системою балів.

Розглянемо профіль (табл. 3.3.7, Фішберн, 1973). Нехай спочатку $s_0 < s_1 < s_2$ (нерівності строгі). Для цього профілю c – переможець Кондорсе (переконайтесь у цьому). З іншого боку, сума балів кандидата a більша за суму c: $n_a = 3s_2 + 3s_1 + s_0 > n_c = 3s_2 + 2s_1 + 2s_0$.♦

Таблиця 3.3.7

3	2	1	1	S
c	a	a	b	s_2
a	b	c	c	s_1
b	c	b	a	s_0

Твердження залишається справедливим і для випадку неспадаючої послідовності балів. Нехай, $s_0 \le s_1 \le s_2$, $s_2 > s_0$. У профілі, що задається табл. 3.3.8, a – переможець Кондорсе ($a:b = 6:5, a:c = 6:5$), але $n_a = 4s_2 + 4s_1 + 3s_0$, $n_b = 5s_2 + 4s_1 + 2s_0$, і $n_b - n_a = s_2 - s_0 > 0$. Профіль 3.3.8 запропоновано студентом факультету кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка С.В. Акулініним у 2006 р. У [7] "найменший" відомий приклад для цього випадку містить 17 виборців і три кандидати.

Таблиця 3.3.8

4	2	2	3	S
a	c	b	b	s_2
b	a	a	c	s_1
c	b	c	a	s_0

Множину кандидатів, які можуть бути вибраними при деякому методі підрахунку балів, можна легко описати. Для даного профілю і даного кандидата a будуємо вектор $\Gamma(a) \in E^{m-1}$ так: $\Gamma_1(a)$ – це число виборців, у яких a має перше місце; $\Gamma_2(a)$ – число виборців, у яких a має перші два місця і т. д.

Тоді кандидат a не може бути переможцем ні при якому узагальненому методі Борда, якщо вектор $\Gamma(a)$ домінується за Парето вектором $\Gamma(b)$ для деякого іншого кандидата b. Більше того, можна показати, що a є переможцем за правилом підрахунку очок тоді і лише тоді, коли вектор $\Gamma(a)$ є слабо оптимальним за Парето (не існує кандидата b, для якого $\Gamma_i(b) > \Gamma_i(a)$ для $i = \overline{1, m-1}$). Якщо система балів утворює строгу послідовність ($s_0 < s_1 < \ldots < s_{m-1}$), то переможець a узгоджується з "просто" оптимальністю за Парето. Цікаво також відмітити, що переможець (найгірший) за Кондорсе не може бути найгіршим (переможцем) за правилом Борда, як це може мати місце для правила відносної більшості (див. профіль на табл. 3.3.1). Ці твердження випливають із того, що переможець за правилом Борда має у середньому найбільше число виборців, що його підтримують у "бінарних дуелях" із іншими кандидатами.

Найчастіше використовують два такі правила, що узагальнюють метод Кондорсе.

Правило Копленда. Позначимо через $K(a,x)$ число виборців, для яких кандидат a кращий за x, $a \neq x$. Порівняємо кандидата a із будь-яким іншим кандидатом x. Припишемо $K(a,x) = +1$, якщо для більшості виборців a кращий за x, інакше $K(a,x) = -1$; 0 при рівності. Оцінка Копленда кандидата a є $K(a) = \sum_{x \neq a} K(a,x)$. Переможцем Копленда (переможцем за Коплендом) називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Копленда.

Правило Сімпсона. Аналогічно $S(a,x)$ – число виборців, для яких кандидат a кращий за x, $a \neq x$. Оцінкою Сімпсона кандидата a називається число $S(a) = \min_{x \neq a} S(a,x)$. Переможцем Сімпсона називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Сімпсона.

Отже, для того, щоб перемогти за правилом Копленда, вам необхідно виграти в найбільшої кількості інших кандидатів. Для виграшу за правилом Сімпсона, необхідно, щоб проти вас ніякий інший кандидат не зібрав значної більшості. Зазначимо також, що правило Копленда відповідає утилітарному критерію вибору, Сімпсона – егалітарному. Очевидно, що переможець Кондорсе (якщо він існує) буде також переможцем і Копленда, і Сімпсона. Очевидно, також, що правила Копленда та Сімпсона, на відміну від правила Кондорсе, завжди визначають переможця (переможців).

Розглянемо основні властивості, яким повинні задовольняти правила голосування. Найперше, звичайно, необхідно вимагати забезпечення рівноправства виборців і кандидатів, що формально гарантуються наступними аксіомами.

Аксіома А5 (анонімність). Імена виборців не мають значення: якщо два виборці поміняються голосами, то результат не зміниться.

Аксіома А6 (нейтральність). Імена кандидатів не мають значення: якщо поміняти місцями кандидатів a і b у перевазі кожного виборця, то результат голосування зміниться відповідно (якщо раніше вибирався кандидат a, то тепер буде вибиратись кандидат b і навпаки; якщо раніше вибирався деякий кандидат c, відмінний від a і b, то тепер він же і буде вибраний).

Не можна, звичайно, відмовитись і від аксіоми А3 одностайності (оптимальності за Парето). Тому узагальнимо її так:

Аксіома А3' (ефективність). Якщо кандидат a для всіх виборців кращий за кандидата b, то b не може бути вибраним.

Розглянуті вище правила Борда, Копленда та Сімпсона анонімні, нейтральні й оптимальні за Парето. Те ж саме справедливо і для будь-якого правила голосування з підрахунком балів, якщо останні різні ($s_k < s_{k+1}$), при рівності балів оптимальність за Парето може порушуватись. Якщо ж нам необхідно виділити єдиного кандидата (при застосуванні правил підрахунку очок, Копленда, Сімпсона), то у загальному випадку це неможливо зробити без порушення або анонімності або нейтральності. Це стає очевидним, якщо розглянути профіль Кондорсе: $a \overset{1}{\succ} b \overset{1}{\succ} c$, $b \overset{2}{\succ} c \overset{2}{\succ} a$, $c \overset{3}{\succ} a \overset{3}{\succ} b$. Якщо при анонімному, нейтральному і однозначному правилі голосування вибирається, наприклад a, то при перестановці a і b, b і c, c і a (унаслідок цього отримаємо профіль: $b \overset{1}{\succ} c \overset{1}{\succ} a$, $c \overset{2}{\succ} a \overset{2}{\succ} b$, $a \overset{3}{\succ} b \overset{3}{\succ} c$), з одного боку (за анонімністю), переможцем повинен залишитись a, з іншого (за нейтральністю) – переможцем повинен стати c (оскільки ми поміняли "імена" a і c).

На практиці нас цілком влаштовують відображення голосування (такі, як множина переможців за Борда або за Коплендом), для котрих виконуються три вище наведених принципи і які "не дуже часто" приводять до рівності очок. Якщо необхідний однозначний вибір, то ми використовуємо або анонімне правило (вибираємо, скажімо, серед переможців того, за якого голосує "голова журі") або нейтральне правило (переможця вибираємо за алфавітом).

Наступний "критерій" – властивість монотонності. Він говорить про те, що більша підтримка кандидата не може зменшити його шанси бути вибраним. Ця властивість називається позитивним оберненим зв'язком.

Аксіома А7 (монотонність). Нехай a вибирається при даному профілі й профіль змінюється так, що положення a покращується, а відносне порівняння пари будь-яких кандидатів для будь-якого виборця залишається незмінним. Тоді a для нового профілю також буде вибраним.

Легко зрозуміти, що узагальнене правило Борда, правила Копленда та Сімпсона є монотонними. Правило ж відносної більшості з вибуванням, що широко застосовується на практиці, є немонотонним!

Розглянемо два профілі (табл. 3.3.9, 3.3.10). Другий профіль відрізняється від першого лише останнім стовпчиком, у якому положення a порівняно з b покращується. Перевірте, що для першого профілю переможцем за правилом відносної більшості з вибуванням є a, а для другого профілю c. Покращення позиції a приводить до його поразки! Можна уявити гіпотетичну ситуацію, у якій перший профіль – "істинний" (відповідає індивідуальним перевагам виборців), у другому профілі "підкуплені" два виборці міняють свою перевагу між a і b. Резюме – голосуйте чесно!

Таблиця 3.3.9

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Таблиця 3.3.10

6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

Не є монотонним і таке правило.

Метод альтернативних голосів. Виключаємо тих кандидатів, хто отримав найменшу кількість голосів. Потім знову підраховуємо голоси виборців для кандидатів, що залишились і знову виключаємо "найгірших" до того часу, поки не залишиться один кандидат (або декілька з рівною кількістю голосів).

Наступна властивість вперше була введена Смітом (1973) і Янгом (1974) і відома, як аксіома Янга про поповнення.

Аксіома А8 (поповнення (однозначні правила голосування)). Дві групи виборців N_1 і N_2, що не перетинаються, вибирають одного і того ж кандидата a з множини A. Тоді виборці з множини $N = N_1 \bigcup N_2$ також вибирають a.

За цією властивістю виборці розбиваються на "територіальні" дільниці або законопроект розглядається в підкомісіях.

Аксіома А'8 (поповнення (відображення голосування)). Нехай виборці з N_1 вибирають кандидатів A_1 з A, із N_2 – з A_2, $N_1 \bigcap N_2 = \varnothing$, $A_1 \bigcap A_2 \neq 0$. Тоді виборці з $N = N_1 \bigcup N_2$ виберуть кандидатів з $A_1 \bigcap A_2$.

Теорема 3.3. (Янг, 1975). Усі правила голосування, що базуються на підрахунку балів, задовольняють аксіомі поповнення. Якщо при рівності очок вибір відбувається на основі фіксованого порядку на A, то відповідні правила також задовольняють аксіомі поповнення. Правило Кондорсе (або його узагальнення таке, що вибирається переможець Кондорсе, якщо останній існує) не задовольняє аксіомі поповнення.

Аксіома А9 (участі). Нехай кандидат $a \in A$ вибирається виборцями з *N*. Нехай до множини виборців добавляється новий виборець i ($i \notin N$). Тоді виборці з $N \cup \{i\}$ повинні вибрати або *a*, або кандидата, який для агента i є строго кращим *a*.

Переможця за Кондорсе для наведеного профілю (табл. 3.3.11) не існує, переможцем за Сімпсоном є кандидат *a*: $S(a)=6, S(b)=4,$ $S(c)=3, S(d)=5$. Нехай до розглянутого профілю додаються ще чотири виборці з перевагами: $c \succ a \succ b \succ d$. Для нового профілю переможцем буде b ($S(a)=6, S(b)=8, S(c)=7, S(d)=5$). Отже, чотирьом новим виборцям краще залишитись удома, щоб переміг *a*!

Таблиця 3.3.11

3	3	5	4
a	*a*	*d*	*b*
d	*d*	*b*	*c*
c	*b*	*c*	*a*
b	*c*	*a*	*d*

Теорема 3.3.4. (Мулен, 1986). Для всіх правил голосування з підрахунком очок, коли при рівності очок вибір відбувається з допомогою заданого порядку на *A*, аксіома участі виконується. Якщо *A* має хоча б чотирьох кандидатів, то для правил типу Кондорсе не задовольняється аксіома участі.

Для формування одного з найбільш відомих результатів теорії голосування знадобиться ще одна аксіома.

Аксіома 10 (неперервність). Нехай виборці з N_1 вибирають $a \in A$, із N_2 – $b \in A$, $a \neq b$, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. Тоді існує (досить велике) натуральне число m таке, що $(mN_1) \cup N_2$ вибере *a*.

Ця вимога є досить "м'якою": якщо група виборців N_2 є досить малою, то вона не повинна впливати на результат виборів, що визначається m "дуелями" групи виборців N_1. Ця аксіома, зокрема, гарантує відсутність диктатора.

Теорема 3.3.5. (Янг, 1975). Відображення голосування базується на правилі підрахунку балів тоді й лише тоді, коли задовольняє наступним чотирьом аксіомам: анонімності, нейтральності, поповнення й неперервності.

Доведення цієї теореми (що є характеризацією правила підрахунку очок) є вельми складним.

Не дивлячись на складнощі, що виявлені вище для методів типу Кондорсе, вони широко застосовуються на практиці.

Голосування з послідовним виключенням. Задається послідовність кандидатів, наприклад, *abcd*. Перші два кандидати порівнюються і за правилом більшості виключається один із них. Той кандидат, що залишився, порівнюється з наступним і т. д. При рівності голосів залишається, наприклад, "лівий" кандидат.

За таким методом у конгресі США організовується "процес поправок" (*a* – поправка до закону, *b* – поправка до поправки, *c* – початкова редакція, *d* – status quo). Цей метод, очевидно, є методом типу Кондорсе: якщо *a* – переможець Кондорсе, то він і виграє. Очевидно, також, що метод не є нейтральним – порядок виключення ("порядок денний") впливає на результат. Нехай маємо наступний профіль табл. 3.3.12. Для послідовності (*abcd*) переможець буде *d*, для (*abdc*) – *c*, (*adbc*) – *b*, (*bdac*) – *a*. Отже, "голова" (той, хто визначає порядок денний) може впливати на результат (хоча, звичайно, не для будь-якого профілю). Цікаво також зазначити, що цей метод може порушувати й оптимальність за Парето. Розглянемо далі профіль табл. 3.3.13. Для послідовності (*abcd*) переможцем буде кандидат *d*, хоча кандидат *a* для всіх виборців кращий за *d*. Розглянемо ще одне правило, що широко використовується (особливо у спорті).

Таблиця 3.3.12

1	2	1	1
d	*a*	*d*	*b*
b	*b*	*c*	*c*
a	*c*	*a*	*d*
c	*d*	*b*	*a*

Таблиця 3.3.13

1	1	1
b	*a*	*c*
a	*d*	*b*
d	*c*	*a*
c	*b*	*d*

Правило паралельного виключення. Для заданої послідовності кандидатів, наприклад, *abcd*, за правилом більшості порівнюється *a* з *b* і *c* з *d* ("півфінал"), потім переможці у парах порівнюються між собою ("фінал"). Цей метод є методом типу Кондорсе, у випадку відсутності рівності при попарних порівняннях він зберігає оптимальність за Парето. Якщо рівності можливі, то оптимальність за Парето може порушуватись.

При голосуванні за правилом відносної більшості з вибуванням іноді буває доцільним віддати свій голос не найкращому для себе кандидату, а деякому іншому: якщо я знаю, що найкращий для мене кандидат *a* все рівно не пройде, оскільки кандидати *b* і *c* гарантовано наберуть більше голосів, то я краще допоможу тому кандидату з *b*, *c*, котрий для мене переважніший (згадайте свої міркування під час виборів у Верховну Раду України 26 березня 2006 р., коли у бюлетенях було 45 партій і блоків). Тому природно виникає питання – чи існує "захищене від маніпулювання" правило голосування, тобто таке правило, що кожен виборець, знаходячись у кабіні для голосування, завжди захоче вказати свій пріоритет правдиво? У випадку бінарного вибору (при двох кандидатах – другий і третій тури виборів Президента України 2004 р.) голосування за правилом більшості є, очевидно, неманіпульованим. Якщо ж кандидатів не менше трьох, то єдиним неманіпульованим правилом голосування є диктаторське правило. Цей результат, аналогічний теоремі Erроу, був доведений Гіббартом (1973) і Саттертвайтом (1975). Зрозуміло, що диктаторське правило не може бути прийнято, як найбільш несправедливе (для абсолютної більшості людей). Однак для будь-якого недиктаторського правила голосування існує профіль переваг, при якому деякому агенту вигідно не повідомляти правдиво свої переваги. Таким чином, голосування не є механізмом збору інформації про переваги виборців, що заслуговує на довіру. Але що ж робити? Як подолати негативний результат Гіббарта–Саттертвайта? Головною особливістю цієї теореми є те, що будь-який профіль переваги є допустимим "входом" для правил голосування. Якщо можна зі змістовних міркувань обмежити область переваг, то загроза маніпуляцій, можливо, зникне. Наприклад, нехай профіль переваг змінюється в області, у якій переможець Кондорсе завжди існує. Тоді голосування за правилом більшості (що вибирає у точності переможця Кондорсе) є захищеним від маніпулювання.

На завершення даного параграфа сформулюємо теорему Гіббарта–Саттертвайта строго. Нехай $L(A)$ – множина лінійних порядків на скінченій множині кандидатів A (повних, транзитивних, асиметричних відношень на A). Нехай N – скінченна множина виборців. Думка виборця $i \in N$ записується з допомогою функції корисності $u_i : A \to E^1$, що відображає порядок на A (байдужості виключаються). Наприклад, $u_i(a) > u_i(b) > u_i(c)$ – для i-го виборця кандидат a на першому місці, b – на другому і т. д.

Правило голосування є однозначне відображення $S : L(A)^N \to A$, що ставить кожному профілю $u = (u_i, i \in N)$ результат виборів $S(u)$. Нехай S є відображенням "на": для кожного a існує такий профіль u, що $S(u) = a$ (ніякий кандидат не може бути апріорі відкинутим).

Визначення 3.3.3. Правило голосування є захищеним від маніпулювання, якщо для будь-якого профілю $u \in L(A)^N$ і будь-якого виборця $i \in N$ виконується: $u_i(S(u)) \geq u_i(S(v_i, u_{N \setminus i}))$ для $\forall v_i \in L(A)$.

Теорема 3.3.6. (Гіббарт, 1973; Саттертвайт, 1975). Якщо A має більше двох кандидатів, то правило S є захищеним від маніпулювання тоді і лише тоді, коли воно є диктаторським: $S = S^{i^*}$ для деякого агента i^* – диктатора, де $S^{i^*}(u) = \max u_{i^*}$ для всіх $u \in L(A)^N$.

Як бачить читач, за останні шістдесят років стало багато що зрозумілим у теорії голосування, отримано багато цікавих результатів, виявлено багато "екзотичних" властивостей правил голосування, що широко використовуються на практиці. Чому ці правила все ще широко використовуються дає нам уявлення про те (за Е. Муленом, [7]), "із якою швидкістю теорії прокладають собі шлях у реальний світ".

З іншого боку виявилось, що спроба апріорі вимагати від переможця "хороших" (логічних, демократичних, розумних) властивостей призводить до диктаторства (див. теореми 3.3.1, 3.3.6). Який вихід? Забезпечувати "демократичність" не переможця, а правил вибору, і приймати переможця таким, який він є – "Народ має тих керівників, яких заслуговує". Чому так виходить? А тому, що (цитуємо М. Бердяєва [13]) "Правда й істина може бути в меншості, а не в більшості, , навіть завжди, вона буває в меншості... Якщо немає правди й істини, будемо вважати за правду й істину те, що визнає більшість".

Контрольні завдання до § 3

1. Побудувати колективне ранжування для наведених профілів за методами: а) Борда, б) відносної більшості, в) абсолютної більшості в два тури, г) Кондорсе, д) Сімпсона, є) Компленда, ж) альтернативних голосів, з) послідовного виключення, і) паралельне виключення:

1.1.

5	4	2
a	c	b
b	a	a
c	b	c
d	d	d

1.2.

5	4	2
c	a	b
a	b	a
b	c	d
d	d	c

1.3.

5	4	2
c	b	a
d	a	b
a	d	c
b	c	d

1.4.

5	4	2
d	a	b
a	b	c
c	c	d
b	d	a

2. Підібрати профіль для ілюстрації аксіом участі й монотонності.

3. Для заданого профілю підібрати профіль, для якого переможці за Сімпсоном і Коплендом не збігаються.