§ 4. Функції колективної корисності

Перед будь-якою людською спільнотою стоять дві основні задачі: створення й розподіл. Як у взаємодії з природою створити побільше благ, як розподілити витрати на створення цих благ і як розподілити самі блага між членами спільноти? І взагалі, якщо відомі функції індивідуальних корисностей, як побудувати функцію колективної корисності?

Формально задача колективного прийняття рішень формулюється так:

$$\max\left\{u_i(x)\middle|x\in X\subseteq E^n\right\},\quad i\in N=\{1,\ldots,n\}, \tag{2.4.1}$$

де u_i – функція корисності i-го агента (§1), X – множина альтернатив.

Існування альтернативи x^*, на якій одночасно досягають максимуму всі індивідуальні функції корисності, у практичних задачах настільки рідкісний випадок, що його можна не враховувати (у цьому випадку задачі колективного прийняття рішень, як такої, і немає). Отже, задача (2.4.1) у термінах Розділу 1 є слабоструктурованою. Необхідна додаткова інформація, яка б дозволила визначити, що розуміється під розв'язком задачі (2.4.1).

Можливо, наприклад, виділити "пріоритетного" члена спільноти ("царя", "вождя"), індивідуальна функція корисності якого максимізується, для інших індивідуальних функцій корисності встановлюються "порогові" рівні $\bar{u}_i=\text{const}$:

$$\max\left\{u_k(x)\middle|u_i(x)\geq\bar{u}_i,\ i\neq k;\ x\in X\right\}. \tag{2.4.2}$$

Зокрема, $\bar{u}_i$ і $\bar{u}_j$, $i\neq j$, можуть бути рівними. Якщо для фіксованих значень $\bar{u}_i$ задача (2.4.2) не буде мати розв'язку, то "пороги" (хоча б один) необхідно змінити.

Припускаючи ж, що апріорі всі члени суспільства рівні у своїх правах, навряд чи можна погодитись із постановкою (2.4.2). Логічними ("демократичними") будуть дві такі "крайні" постановки:

$$\sum_{i\in N}u_i(x)\to\max_{x\in X}, \tag{2.4.3}$$

$$u_1(x)=u_2(x)=\ldots=u_n(x)\to\max_{x\in X}. \tag{2.4.4}$$

Задача (2.4.3) називається *утилітарною* постановкою (функція $W_y(u_1,\ldots,u_n)=\sum_{i\in N}u_i$ називається *утилітарною функцією колективної* *корисності*), задача (2.4.4) – *егалітарною* (від латинського слова "рівність"). Інтерпретуючи функції індивідуальної корисності u_i як прибуток *i*-го члена спільноти, отримуємо, що утилітаризм максимізує сумарний прибуток спільноти, не звертаючи уваги на його перерозподіл між членами спільноти (так, наприклад, в оптимальній точці x^* може бути, що $u_1\left(x^*\right)=1$млн грн, $u_2\left(x^*\right)=\ldots=u_n\left(x^*\right)=1$ грн – у "багатому суспільстві" всі, крім одного, – бідні).

Егалітарна постановка може привести до ситуації, коли $u_1\left(x^*\right)=\ldots=u_n\left(x^*\right)=1$ грн. – "рівність у бідності". Розглянуті ситуації ілюструє рис. 2.4.1.

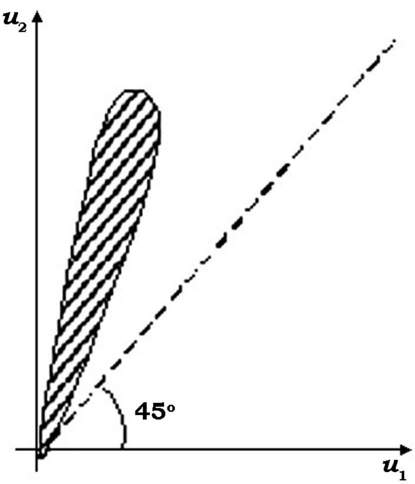

Рис. 2.4.1

Оскільки ситуація з "абсолютною" рівністю здається "непродуктивною", як правило, розглядається функція колективної корисності у вигляді $W_e\left(u_1,\ldots,u_n\right)=\min\limits_{i=\overline{1,n}}\left\{u_i\right\}$, яку необхідно максимізувати на множині альтернатив *X*. Ця функція називається *егалітарною функцією колективної корисності* (задачу (2.4.4) тоді доцільно називати "крайнім" або "абсолютним" егалітаризмом). "Економічна" інтерпретація егалітарної функції зрозуміла – суспільство намагається максимізувати мінімальну "зарплату" (прибуток найбіднішого агента). Суперечка між утилітаризмом та егалітаризмом точиться тисячоліттями, можна привести безліч аргументів "за" і "проти" як для першого, так і для другого. Ми ж будемо розглядати їх як "крайні" способи агрегації індивідуальних функцій корисності (ФК) у колективну (агреговану) функцію корисності (КФК).

Розглянемо цікаві приклади.

1. Два міста A і B з'єднані двома дорогами ("прямою" й "окружною") довжиною 3 км і 5 км відповідно (рис. 2.4.2). Міста хочуть побудувати спільне підприємство (наприклад, лікарню), причому на ділянці BC ($|BC| = 2$) із якихось причин це зробити неможливо. Чим ближче лікарня до міста, тим краще. Абсолютно егалітарний розв'язок буде лежати на дорозі ADB у точці D, що є серединою дуги AB ($u_1(D) = u_2(D) = 2{,}5$ км). Але точка C ($u_1(C) = 1$ км, $u_2(C) = 2$ км) і для першого, і для другого агента є кращою!

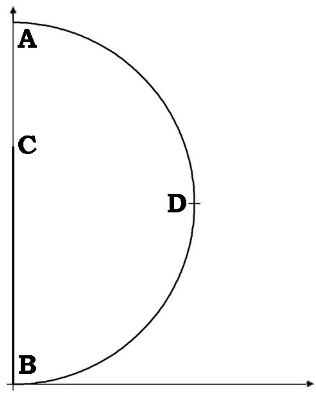

Рис. 2.4.2

2. Два агенти "перетворюють" свою працю в кукурудзу, причому агент 2 має продуктивність вдвічі більшу, ніж агент 1: одна година роботи агента 2 дає 2 центнери кукурудзи, агента 1 – одну од. ФК в агентів однакові: $u(x, y) = \sqrt[3]{y(10 - x)}$, де x – витрати праці в годинах, y – отримана кукурудза в центнерах (ФК – монотонно зростає й увігнута по y, спадає й опукла по x).

Маємо задачу:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sqrt[3]{y_1(10 - x_1)} + \sqrt[3]{y_2(10 - x_2)} \to \max, \\ y_1 + y_2 = x_1 + 2x_2, \;\; x_i, y_i \geq 0, \;\; i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Необхідні умови оптимальності для задачі (2.4.5), оскільки вона є опуклою задачею математичного програмування, будуть і достатніми, тому матимемо (викладки пропонуємо зробити читачеві самостійно): $y_1^* = 2y_2^*$, $\left(10 - x_1^*\right) = 4\left(10 - x_2^*\right)$. Таким чином, продуктивніший агент отримує за свою працю вдвічі менше кукурудзи, маючи при цьому в чотири рази менше вільного часу.

3. Брат і сестра повинні поділити між собою одиницю нескінченно подільного пирога. Брат удвічі голодний, ніж сестра: один і той самий шматок пирога x приносить брату (з функцією корисності u_1) удвічі більшу корисність $u_1(x) = 2u_2(x)$, де u_2 – функція корисності сестри. Нехай функції u_1, u_2 є зростаючими, увігнутими й диференційованими.

Розв'язок утилітарної задачі: $u_1(x) + u_2(1-x) \to \max\limits_{x\in[0,1]}$ знаходиться з необхідних умов оптимальності, оскільки функція є увігнутою. Маємо:

$$u_1'\left(x^*\right) = u_2'\left(1 - x^*\right) = 0,5u_1'\left(1 - x^*\right) < u_1'\left(1 - x^*\right) \Rightarrow x^* > 1 - x^* \Rightarrow x^* > 0,5.$$

Розв'язок егалітарної задачі:

$$u_1(\bar{x}) = u_2(1 - \bar{x}) = 0,5u_1(1 - \bar{x}) < u_1(1 - \bar{x}) \Rightarrow \bar{x} < 1 - \bar{x} \Rightarrow \bar{x} < 0,5.$$

Отже, утилітарист віддає більшу частину пирога голодному братові, егалітарист віддає йому меншу частину! Чому? Бо турбується перш за все за голодну сестру – компенсує їй знижений апетит.

Кожен може перевірити – ким є їхні знайомі? Утилітаристи чи егалітаристи? Мірліс [7] пропонує такий тест. Два автомобілі зіштовхуються та спалахують. В одному автомобілі – одна людина, у іншому – чотири. У єдиного свідка ДТП є час врятувати лише одну машину. Кого будете рятувати ви? Якщо машину з чотирма пасажирами, то ви утилітарист. Підсвідомо ви вважаєте, що "корисність" чотирьох людей апріорі більша за "корисність" одного. Егалітарист намагатиметься зрівняти шанси кожного, наприклад, кине монету – яку машину спасати!

Не дивлячись на відмінність утилітаризму й егалітаризму, вони мають одну спільну "функціональну" рису. В обох випадках використовується функція колективної корисності (ФКК), що агрегує індивідуальні корисності в єдиний "індекс" корисності, що представляє колективний "добробут".

Між цими двома крайнощами "містяться" всі інші "колективні добробути", які визначимо так.

Нехай $N = \left\{\overline{1,n}\right\}$ – фіксована "спільнота", $u = (u_1, \ldots, u_n)$ – розподіл корисностей, $u \in E_{>0}^n$. *Порядком колективного добробуту* (ПКД) називається впорядкування R у E^n (рефлексивне, транзитивне і зв'язне бінарне відношення на E^n).

Позначимо через P його строгу компоненту: $uPv \iff (uRv)\wedge(v\bar{R}u)$, через J – компоненту байдужності: $uJv \iff (uRv)\wedge(vRu)$. Припустимо, що ПКД задовольняє таким двом додатковим властивостям (аксіомам).

А1. Анонімність (симетрія по агентах). Якщо u отримане з v перестановкою координат, то uJv.

А2. Одностайність. Якщо $u \geq v$ ($u_i \geq v_i$, для $\forall\ i=\overline{1,n}$), то uRv. Зокрема, якщо $u >> v$ ($u_i > v_i$ для $\forall\ i=\overline{1,n}$), то uPv.

Наведемо приклад. Нехай u^* отримано з $u \in E^n_{>0}$ перестановкою компонент по неспаданню. Вектори u і v еквівалентні за лексимінним порядком (*LM*), якщо $u^* = v^*$. Вектор u переважає вектор v за *лексимінним* порядком, якщо u^* лексикографічно переважає v^*, тобто існує $k=\overline{0,n-1}$ таке, що: $u_i^* = v_i^*$, для $i=\overline{1,k}$ і $u_{k+1}{}^* > v_{k+1}{}^*$. Зокрема, якщо $W_e(u) > W_e(v)$, то вектор u лексимінно переважає вектор v.

"Нестрогий" лексимінний порядок будемо позначати через *LM*($uLMv$), строгу компоненту P_{LM}, компоненту байдужності – J_{LM}.

Очевидно, що лексимінний порядок є ПКД. Розглянемо його властивості. Нехай S, $S \subseteq E^n_{>0}$ – множина допустимих векторів корисностей. Нижче припускатимемо, що S – компактна множина (обмежена й замкнена). Нехай $u,v \in E^n_{>0}$, $u > v$ означає, що $u \geq v$ і $u \neq v$.

Скажемо, що вектор u є *оптимальним за Парето (ефективним)* у S, якщо для $\forall\, v \in S$: $v > u \Rightarrow v \notin S$. Вектор v називається *слабко-оптимальним за Парето (слабко-ефективним)* у S, якщо для $\forall\, v \in S$: $v >> u \Rightarrow v \notin S$.

Теорема 2.4.1. Нехай $W_e = \min\limits_{i=\overline{1,n}}\{u_i\}$ – егалітарна функція корисності, $S_0 = \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in S} W_e$. Тоді множина $S_0 \neq \varnothing$, усі її елементи є слабко-ефективними й існує хоча б один ефективний елемент.

Теорема 2.4.2. Нехай множина S містить ефективний елемент u^0 такий, що $u_i^0 = u_j^0$ для $\forall\ i,j=\overline{1,n}$. Тоді $S_0 = \{u^0\}$.

Теорема 2.4.3. Нехай S містить слабко-ефективний елемент u_0 такий, що $(u_0)_i = (u_0)_j$, для $\forall\ i,j=\overline{1,n}$. Тоді $u_0 \in S_0$.

Розглянемо лексимінний порядок і позначимо через S_{LM} множину елементів множини *S*, максимальних за цим порядком.

Теорема 2.4.4. $S_{LM} \neq \varnothing$ і кожен елемент S_{LM} є ефективним у *S*. Нехай $u_0 \in S_0$, тоді $u^* = v^*$ (тобто множина S_0 скінченна). Якщо множина *S* опукла, то S_0 містить єдиний елемент.

Тепер нас, як і в "індивідуальній" теорії корисності, буде цікавити, чи можна на основі попарних порівнянь векторів колективної корисності (тобто, задаючи ПКД) порівняти кожному векторові колективної корисності – "індекс" колективного добробуту.

Функцією колективної корисності (ФКК) називається дійснозначна функція *W*, що визначена на E^n й задовольняє такі властивості. *Анонімність*: *W* симетрична за змінними $u_1,\ldots,u_n$; *одностайність*: $u \geq v \Rightarrow \ W(u) \geq W(v)$ (зокрема, якщо $u >> v \ \Rightarrow \ W(u) > W(v)$). Два приклади ми вже знаємо: це егалітарна ФКК $W_e(u) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} u_i$ та утилітарна $W_y(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$. Кожна ФКК *W* однозначно породжує ПКД *R*: $uRv \Leftrightarrow \ W(u) \geq W(v)$.

Представлення ПКД *R* за допомогою ФКК є так само зручним, як і представлення індивідуальних переваг за допомогою функції корисності. Але не всі ПКД можуть бути представлені ФКК.

Теорема 2.4.5. Лексимінний ПКД не представляється ФКК.

Доведення можна подивитись в [7].

Егалітарна програма здійснює перерозподіл добробуту від "багатого" до "бідного", утилітарна програма є байдужною до таких перерозподілів. Між цими двома крайніми випадками мається вельми широкий клас ПКД, кожен із яких у деякій мірі звертає увагу на перерозподіл від багатого до бідного, але також намагається підняти й загальну суму корисностей.

Принцип передачі Пігу–Дальтона стверджує, що передача корисності від одного агента до іншого, яка не збільшує розрив у їхньому добробуті, не може зменшити колективного добробуту.

Порядок *R* задовольняє принципу Пігу–Дальтона, якщо для двох агентів *i,j* й будь-яких векторів $u,v \in E^n$ виконується:

$$\left\{u_k = v_k \text{ для } \forall k \neq i,j,\ u_i + u_j = v_i + v_j \text{ та } \left|v_i - v_j\right| < \left|u_i - u_j\right|\right\} \Rightarrow \ vRu .$$

Якщо ПКД задовольняє принципу Пігу–Дальтона, то будемо говорити, що він не збільшує нерівності. Якщо за тих самих умов вектор *v* строго переважає *u*, то ПКД *R* скорочує нерівність.

Розглянемо *сепарабельно-адитивну ФКК* $W(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i)$. Яка властивість функції α відповідає ПКД, що скорочує нерівність?

Покладемо $u_i = x$, $u_j = y + \varepsilon$, $v_i = x + \varepsilon$, $v_j = y$, $\varepsilon > 0$. Із визначення принципу Пігу–Дальтона матимемо: $\forall\ x < y, \forall\ \varepsilon > 0$:

$$\alpha(x+\varepsilon) - \alpha(x) \geq \alpha(y+\varepsilon) - \alpha(y).$$

Остання умова є, очевидно, просто угнутістю функції α. Таким чином, для того, щоб ФКК $\sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i)$ не збільшувала (скорочувала) нерівність, необхідно й достатньо, щоб функція α була увігнутою (строго увігнутою). Можна легко перевірити, що лексимінний ПКД скорочує нерівність, а егалітарна ФКК його не збільшує.

Інший результат показує, що принцип Пігу–Дальтона виконується не лише для сепарабельно-адитивних ФКК.

Теорема 2.4.6. Нехай ФКК є диференційованою. Тоді вона задовольняє принципу Пігу–Дальтона тоді й лише тоді, коли:

$$\forall\ u \in E^n:\ u_i \leq u_j\ \Leftrightarrow \frac{\partial W(u)}{\partial u_j} \leq \frac{\partial W(u)}{\partial u_i}.$$

Доведення. Нехай $v_i = u_i + \varepsilon$, $v_j = u_j - \varepsilon$, $v_k = u_k$, $k \neq i, j$; $u_i < u_j$; $\varepsilon \leq \frac{1}{2}(u_j - u_i) \Rightarrow W(u) \leq W(v)$, $\frac{d}{d\varepsilon}(W(v) - W(u)) = \frac{\partial W(u)}{\partial u_j} - \frac{\partial W(u)}{\partial u_i} \leq 0$. ♦

Розглянемо два принципи характеризації принципу Пігу–Дальтона.

Вектор $L(u) = \left(u_1^*, u_1^* + u_2^*, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i^*\right) = (W_e(u), \ldots, W_k(u), \ldots, W_y(u))$, де $W_k(u) = (L(u))_k = \sum_{i=1}^{k} u_i^*$ – сума доходів k перших "найбідніших" членів, називається *кривою Лоренса.*

Як впливає перерозподіл корисностей Пігу–Дальтона на криву Лоренса? Нехай $u_i^* < u_j^*$, $i < j$. Збільшимо u_i^* до $u_i^* + \varepsilon$, одночасно знижуючи u_j^* до $u_j^* - \varepsilon$ так, щоб $u_i^* + \varepsilon < u_j^* - \varepsilon$ (тобто виберемо ε: $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(u_j^* - u_i^*)$). Нижче наведено приклад, у якому при перерозподілі віднімається 4 одиниці корисності від u_7^* й передається u_2^* ($i = 2$, $j = 7$, $\varepsilon = 4$). Позначимо через v вектор, що отримується після перерозподілу:

$$u^* = (2,6,8,9,11,14,16,18) \to L(u) = (2,8,16,25,36,50,66,84),$$

$$v^* = (2,10,8,9,11,14,12,18) \to L(v) = (2,10,19,29,40,52,66,84).$$

Таким чином, після перерозподілу кожна координата кривої Лоренса або "піднімається", або залишається незмінною. Виявляється, що ця властивість загальна: будь-яка передача Пігу–Дальтона "піднімає" криву Лоренса. Цікаво, що справедливо і зворотне.

Скажемо, що вектор *u домінує за Лоренсом* вектор *v*, якщо його крива Лоренса $L(u)$ домінує за Парето криву Лоренса $L(v)$:

$$L(u) > L(v) \Leftrightarrow \forall k : \sum_{i=1}^{k} u_i^* \geq \sum_{i=1}^{k} v_i^*, \exists j : \sum_{i=1}^{j} u_i^* > \sum_{i=1}^{j} v_i^*.$$

Теорема 2.4.7. Якщо *u* домінує за Парето *v* або *u* отримано із *v* передачею Пігу–Дальтона, то *u* домінує за Лоренсом *v*. Навпаки, якщо *u* домінує за Лоренсом *v*, то можна підібрати послідовність передач Пігу–Дальтона й покращень Парето, які дозволяють із *v* отримати *u*.

Отже, ПКД *R* не збільшує нерівність тоді й лише тоді, коли він є узгодженим із домінуванням Лоренса: $\forall\, u,v\ L(u) > L(v) \Rightarrow uRv\ (uPv)$.

Послідовність покращень Парето, про яку йдеться в теоремі, для кожного скорочуючого нерівність ПКД приведе до оптимального за Лоренсом елемента. Таким чином, оптимуми Лоренса є підмножиною множини оптимумів Парето. Розглянемо випадок для $n = 2$. $L(u_1, u_2) = (\min\{u_1, u_2\}, u_1 + u_2) = (W_e(u), W_y(u))$. Отже, вектор корисностей є оптимальним за Лоренсом тоді й лише тоді, коли він не може бути поліпшеним за утилітарною ФКК без погіршення за егалітарною ФКК і навпаки.

На рис. 2.4.3 показані типові конфігурації (без дилеми "рівність–ефективність" і з нею) для опуклої допустимої множини *S* і відповідні оптимуми Лоренса й Парето. Оптимуми Лоренса розміщені між розв'язками егалітарним α й утилітарним β.

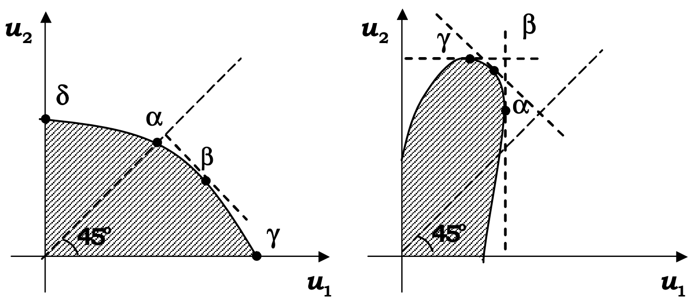

Рис. 2.4.3

Оптимуми Парето знаходяться на кривій $\delta\gamma$ на лівому рисунку й на кривій $\gamma\alpha$ – на правому.

Другий спосіб характеризації принципу Пігу–Дальтона має технічний характер. Він стверджує, що опуклі (строго опуклі) ПКД не збільшують (скорочують) нерівності.

Скажемо, що $n\times n$ матриця $\phi=\left(q_{ij}\right)$ є *двічі стохастичною*, якщо $q_{ij}\geq 0$, $\sum\limits_i q_{ij}=\sum\limits_j q_{ij}=1$ при всіх *i, j*. *Матриця перестановки* – це така двічі стохастична матриця, у якої $q_{ij}=0$ або 1 для всіх *i,j*.

Теорема 2.4.8. (Харді, Літтлвуд, Пойа, 1934). ПКД *R* не збільшує нерівність тоді й лише тоді, коли він задовольняє такій умові: для $\forall\ u\in E^n$ і будь-якої двічі стохастичної $n\times n$ матриці *Q* виконується:

$$(Qu)Ru\,. \tag{2.4.6}$$

Більше того, ПКД *R* скорочує нерівність тоді й лише тоді, коли виконується $(Qu)Pu$ для всіх *u* із повністю різними компонентами і для всіх двічі стохастичних матриць Q, що не є матрицями перестановок.

Наслідок із теореми 2.4.8. Скажемо, що ПКД R є опуклим (строго опуклим), якщо його верхні контурні множини $\left\{v\middle|\ vRu\right\}$ є опуклими (строго опуклими). Опуклий ПКД не збільшує нерівності. Строго опуклий ПКД скорочує нерівність. Доведення теореми можна знайти в [6]. ПКД, що задовольняє умові (2.4.6), також називається опуклим за Шуром. Рис. 2.4.4 показує, що контур опуклого за Шуром ПКД може бути не опуклим. Утилітарна функція колективної корисності не звертає уваги на нерівномірність у розподілі індивідуальних корисностей, егалітарна – у першу чергу, намагається підвищити мінімальну індивідуальну корисність. Як чисельно виміряти нерівномірність у розподілі індивідуальних корисностей, а отже, визначити, яке суспільство більш "справедливе"?

Розглянемо ПКД R, що скорочує нерівність. Для будь-якого додатного вектора корисностей *u* ($u_i>0$, $\forall\ i=\overline{1,n}$, або $u\in E^n_{>0}$) визначимо еквівалентний йому рівний розподіл корисностей із рівнем $\varepsilon(u):\left(\varepsilon(u),\varepsilon(u),\dots,\varepsilon(u)\right)Ju$ або $\left(\varepsilon(u)\cdot e\right)Ju$, де $e=(1,\dots,1)$. Визначимо середню корисність $\bar{u}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i}{n}$ й визначимо "індекс нерівності *J*, пов'язаний із ПКД R", так:

$$J(u)=1-\frac{\varepsilon(u)}{\bar{u}}\,. \tag{2.4.7}$$

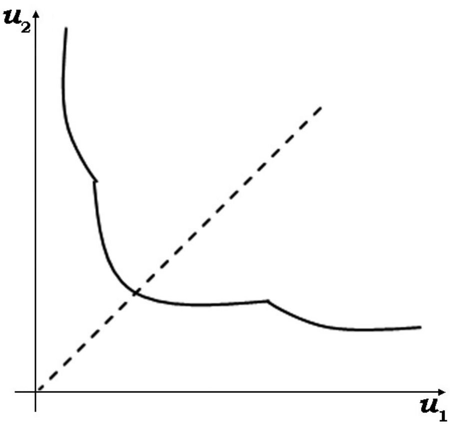

Рис. 2.4.4

Оскільки R скорочує нерівність, то розподіл $\bar{u}\cdot e$ не гірший за *u*. Отже, $(\bar{u}\cdot e)Ru \wedge uJ(\varepsilon(u)\cdot e) \Rightarrow (\bar{u}\cdot e)R(\varepsilon(u)\cdot e) \Rightarrow \bar{u} \ge \varepsilon(u)$.

Таким чином, $J(u)$ невід'ємний для всіх u. Більше того, $J(u)=0$ тільки при $\varepsilon(u)=\bar{u}$, що можливе тільки, якщо *u* – рівний розподіл ($u=\bar{u}\cdot e$), оскільки *R* скорочує нерівність. Нарешті, $J(u)$ обмежений зверху 1, оскільки $\varepsilon(u)$ невід'ємне, вектор *u* додатний. Звідси маємо: $0 \le J(u) \le 1$ для всіх *u*, причому $J(u)=0$ тоді й лише тоді, коли $u=\bar{u}\cdot e$.

Теорія індексів паралельна теорії ПКД. Дійсно, за індексом *J*, можна відновити функцію ε з (4.7) і ε буде ФКК, що представляє *R*.

Індекс Аткінсона й індекс Джині. Оскільки індекс нерівності *J* представляє ПКД, що скорочує нерівність, то він буде зменшуватися внаслідок передачі Пігу–Дальтона. Нарешті, покладемо, що індекси нерівності не змінюються при зміні масштабу корисностей. Підсумовуючи, скажемо, що індекс нерівності є функція *J*, яка визначена на $E^n_{>0}$ і задовольняє умовам:

1. $0 \le J(u) \le 1$, причому $J(u)=0$ тоді й лише тоді, коли $u=\bar{u}\cdot e$;
2. $J(v) < J(u)$, якщо *v* отримано з *u* передачею Пігу–Дальтона;
3. $J(\lambda u) = J(u)$ для $\forall\ \lambda > 0$.

Легко перевірити, що наступні ФКК скорочують нерівність:

$$W_q(u)=\sum_{i=1}^{n} u_i^q,\ 0<q<1;\ \ W_q(u)=-\sum_{i=1}^{n} u_i^q,\ \ q<0;\ \ W_0(u)=\sum_{i=1}^{n}\log u_i.$$

Відповідні міри нерівності ("*індекси Аткінсона*") отримуються безпосередніми обчисленнями з (2.4.7):

$$J_q(u) = 1 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\bar{u}}\right)^q\right)^{1/q},\ 0 < q < 1,\ q < 0;\ J_0(u) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{u_i}{\bar{u}}\right)^{1/n}.$$

Із точністю до нормування "*індекс Джині*" є середнім розкладом корисностей за всіма парами агентів:

$$G(u) = \frac{1}{n^2\bar{u}}\sum_{1\le i,j\le n}\left|u_i - u_j\right|.$$

Відновлюючи з індексу Джині ФКК за формулою (2.4.7), отримуємо:

$$W(u) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(2(n-k)+1\right)u_k^*.$$

Таким чином, ця ФКК є варіантом класичного утилітаризму, при якому ваги успішних агентів спадають лінійно відповідно до збільшення рангів.

Не дивлячись на привабливу інтерпретацію, індекс Джині має суттєвий недолік – відповідна ФКК не є "*сепарабельною*".

Приклад. $G_5(4,\ 11,\ 3,\ 9,\ 8) = 1 - \frac{1}{5^2\cdot 7}(9\cdot 3 + 7\cdot 4 + 5\cdot 8 + 3\cdot 9 + 11) = \frac{6}{25}$.

Нехай тепер, відбувся перерозподіл корисностей між першими трьома агентами без зміни загальної корисності всередині групи з $(4,\ 11,\ 3)$ до $(7,\ 10,\ 1)$. Маємо: $G_3(4,\ 11,\ 3) = 8/27,\ G_3(7,\ 10,\ 1) = 9/27$.

Тобто індекс Джині для групи $\{1,\ 2,\ 3\}$ збільшився, у той час, як індекс Джині для всієї спільноти зменшився:

$$G_5(7,\ 10,\ 1,\ 9,\ 8) = 8/35 < G_5(4,\ 11,\ 3,\ 9,\ 8).$$

Отже, індекс Джині не є "*сепарабельним*" за таким визначенням.

Визначення (*Сепарабельність за підгрупами*). Дано дві спільноти N, T, $T \subset N$, і два вектори $u_T, \upsilon_T \in E_{>0}^{|T|}$ такі, що $\bar{u}_T = \bar{\upsilon}_T$ і вектор $u_{N\setminus T} \in E_{>0}^{|N\setminus T|}$, тоді $J_T(u_T) \ge J_T(\upsilon_T) \Leftrightarrow J_n(u_T, u_{N\setminus T}) \ge J_n(\upsilon_T, \upsilon_{N\setminus T})$.

Оскільки індекси Аткінсона відповідають сепарабельним ФКК, то вони є сепарабельними за підгрупами.

Контрольні завдання до § 4

1. Знайти розв'язок задачі 2.4.5.

2. На множині векторів корисностей $\{u = (1, 3, 7, 9, 5),\ \upsilon = (3, 2, 5, 4, 6),$ $w = (2, 5, 3, 7, 6)\}$ знайти егалітарний, утилітарний, лексикографічний та лексимінний оптимуми.

3. На множині векторів із п. 2 знайти оптимуми Парето та Лоренса.

4. Перевірити, що функції колективної корисності $W_q(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i^q$, $0 < q < 1$; $W_q(u) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^q$, $q < 0$; $W_0(u) = \sum_{i=1}^{n} \log u_i$ скорочують нерівність.

5. Обчислити індекс Джині для розподілів корисності з п. 2.

6. Для розподілів корисностей із п. 2 побудувати приклад "несепарабельності за підгрупами".

7. Для розподілів корисностей із п.2 обчислити індекси Аткінсона для $q = 0;\ 0,5;\ -2$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Дайте визначення слабкого упорядкування, сформулюйте умови існування функції корисності для слабких упорядкувань.
2. Сформулюйте умови існування функції корисності для строгих часткових упорядкувань.
3. Сформулюйте умову сепарабельності.
4. Дайте визначення слабкої імовірнісної міри.
5. Сформулюйте аксіому Архімеда.
6. Що називається множиною сумішей?
7. Що називається станами природи?
8. Що називається екстенсивною формою задачі прийняття рішень в умовах невизначеності?
9. Сформулюйте критерії Байда, Гурвіца, Гермейєра.
10. Сформулюйте критерій "мінімальної залежності від природи".
11. Сформулюйте задачу колективного прийняття рішень.
12. Дайте визначення утилітарної, егалітарної функції корисності.
13. Дайте визначення порядку колективного добробуту, сформулюйте аксіоми анонімності й одностайності.
14. Дайте визначення колективної функції корисності.
15. Сформулюйте принцип передачі Пігу – Дальтона.
16. Що таке крива Лоренса? Дайте визначення оптимуму за Лоренсом.
17. Сформулюйте теорему Харді-Літтвуда-Пойя.
18. Що таке індекс нерівності? Його зв'язок з функцією колективної корисності.
19. Які функції колективної корисності породжують індекси Аткінсона?
20. Дайте визначення індексу Джині. Якій функції колективної корисності він відповідає?
21. Дайте визначення сепарабельності за підгрупами індексу нерівності.