~~тенційними прибутками, а~~ $\cancel{P \approx x}$ ~~означає, що для вас байдужна різниця між лотереєю відповідно до P і безпосереднім одержанням~~ ~~*x*~~ ~~грошових одиниць. Треба оцінити~~ ~~*x*~~ ~~за умовою~~ $\cancel{P \approx x}$ ~~у таких випадках:~~

~~а)~~ $\cancel{P(0) = 0,5, P(10000) = 0,5;}$

~~б)~~ $\cancel{P(0) = 0,1, P(10000) = 0,9;}$

~~в)~~ $\cancel{P(-500) = 0,5, P(500) = 0,5;}$

~~г)~~ $\cancel{P(-100) = 0,2, P(-10) = 0,8;}$

~~д)~~ $\cancel{P(0) = 1/3, P(1000) = 1/3, P(3000) = 1/3;}$

~~е)~~ $\cancel{P(90000) = 0,5, P(100000) = 0,5.}$

§ 3. Функції корисності в умовах ризику та невизначеності

Найважливішим застосуванням теорії очікуваної корисності є можливість формалізації процесу прийняття рішень в умовах ризику й невизначеності.

Задача прийняття рішень (ЗПР) є визначеною на наступній тріаді множин: X – множина альтернатив; Y – множина наслідків; S – множина станів.

Множина S є проявом стохастичної невизначеності у прийнятті рішень, причому конкретна інтерпретація станів залежить від формулювання задачі (наприклад, попит на ту чи іншу продукцію, погода і т. п.). Множину S також називають множиною "станів природи" чи "станів зовнішнього середовища", щоб підкреслити властиву їй невизначеність і незалежність від ОПР.

Відомі (див. § 2) дві форми взаємозв'язку тріади множин, кожній із яких відповідає своє визначення множини станів і свій підхід до оцінки очікуваної корисності альтернатив. Це – екстенсивна й нормальна форми.

В екстенсивній формі стан визначається як відображення альтернатив у наслідки $s : X \to Y$. Цей підхід сформульований Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном (див. § 2). При такій постановці множина станів природи задачі не фігурує. Стохастична невизначеність тут описується розподілом імовірностей на множині наслідків Y, що відповідають альтернативам із X. Переваги ОПР повинні бути виражені у вигляді функцій корисності $u(y)$, визначеній на множині наслідків Y. Очікувана корисність альтернативи х може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $E(x) = E(u(y), p(x,y))$, де $p(x,y)$ – розподіл ймовірностей на множині наслідків *Y*, що відповідають альтернативі *x*. Оскільки кожній альтернативі однозначно відповідає свій розподіл ймовірностей, то в такій постановці ЗПР можна говорити про вибір найкращого розподілу ймовірностей.

Для ЗПР у нормальній формі альтернативи $x \in X$ визначаються як відображення станів у наслідки $x : S \to Y$. Цей підхід було сформульовано Л. Севіджем (див. § 2). Тут множина станів *S* фігурує в ЗПР, а стохастична невизначеність описується за допомогою одного незалежного від альтернатив розподілу ймовірностей на *S* і задається відповідною щільністю $p(s)$, $s \in S$. Переваги ОПР, як і у попередньому випадку, задаються функціями корисності, але тепер вони будуються не на множині наслідків *Y*, а на множині $X \times S$, оскільки будь-який наслідок однозначно визначається парою $(x,s) \in X \times S$. Для ЗПР у нормальній формі очікувана корисність альтернативи *x* може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $E(x) = E(u(x,s), p(x))$.

За наявності фундаментальної погодженості (коли невизначеність вважається викликаною тими самими причинами) екстенсивна й нормальна форми ЗПР еквівалентні з погляду очікуваної корисності розглянутих альтернатив.

Розглянемо конкретні види функцій корисності (критеріїв) для нормальної форми ЗПР, які найчастіше вживаються в методах прийняття рішень [5].

Мінімаксний критерій Вальда. Мінімаксний критерій (ММ) використовує функцію корисності альтернатив $E_{MM}(x) = \min\limits_{s \in S} u(x,s)$, що відповідає позиції крайньої обережності. Шукана альтернатива вибирається з умови $x^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} E_{MM}(x) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} \min\limits_{s \in S} u(x,s)$. Обрані таким чином альтернативи цілком виключають ризик. Це означає, що які б стани природи $s \in S$ не реалізувалися, відповідний результат не може виявитися гіршим за $E_{MM}(x^*)$. Ця властивість робить мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в практичних задачах він застосовується найчастіше.

Однак відсутність ризику може привести до певних втрат. Продемонструємо це на прикладі.

Приклад. Нехай числові оцінки наслідків альтернатив x_1, x_2 при станах s_1, s_2 задаються нижче наведеною табл. 2.3.1.

Таблиця 2.3.1

	s_1	s_2	$E_{MM}(x)$
x_1	1	100	1
x_2	1,1	1,1	1,1
		Max	1,1

Хоча альтернатива x_1 здається більш вигідною, оптимальною за ММ – критерієм буде альтернатива x_2. Ухвалення рішення за цим критерієм може, однак, виявитися ще менш розумним, якщо:

✓ стан s_2 зустрічається частіше ніж s_1;

✓ рішення реалізується багаторазово.

Вибираючи альтернативу, що пропонується за ММ-критерієм, щоправда, уникаємо невдалого значення 1, що реалізується при альтернативі x_1 при стані s_1, одержуючи замість нього при цьому стані не набагато кращий результат 1,1, зате в стані s_2 втрачаємо виграш 100, одержуючи всього лише 1,1. Цей приклад показує, що в численних практичних ситуаціях песимізм мінімаксного критерію може виявитися дуже невигідним.

Застосування ММ-критерію буде виправданим, якщо ситуація, у якій приймається рішення, характеризується такими обставинами:

✓ про можливості появи зовнішніх станів нічого невідомо;

✓ необхідно рахуватися з появою різних станів природи $s \in S$;

✓ рішення реалізується лише один раз;

✓ необхідно виключити будь-який ризик, тобто за жодних умов $s \in S$ не допускається отримання результату, меншого за $E_{MM}(x^*)$.

Критерій Байєса–Лапласа. На відміну від мінімаксного критерію, цей критерій враховує кожен із можливих наслідків альтернативи.

Нехай $p(s)$ – імовірність появи стану $s \in S$, тоді для BL-критерію корисність кожної альтернативи характеризується математичним сподіванням корисностей її наслідків

$$E_{BL}(x) = \int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds.$$

Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$x^* \in \operatorname{Arg} \max_{x \in X} E_{BL}(x) = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds.$$

При цьому вважається, що ситуація, у якій приймається рішення, характеризується такими обставинами:

✓ імовірності появи станів відомі і не залежать від часу;

- ✓ рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;
- ✓ для малого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

При досить великій кількості реалізацій середнє значення корисностей альтернативи x наближається до математичного сподівання корисностей її наслідків. Тому при повній (нескінченній) реалізації будь-який ризик практично виключається. BL–критерій є оптимістичнішим, ніж MM–критерій, однак він вимагає вищого рівня інформованості й досить тривалої реалізації.

Критерій мінімізації дисперсії оцінки. Цей критерій використовують, коли ОПР, зацікавлена в отриманні "стійкого" щодо станів середовища рішення і відомо, що ймовірності станів середовища мають нормальний розподіл. При виборі цього критерію кожна альтернатива оцінюється дисперсією функції корисності її наслідків при всіх мінімізованих станах середовища:

$$E_D(x) = \int\limits_{s\in S} p(s)\left(\int\limits_{s\in S} p(s)u(x,s)ds - u(x,s)\right)^2 ds = \int\limits_{s\in S} p(s)\big(E_{MM}(x) - u(x,s)\big)^2 ds$$

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_{x\in X} E_D(x) = \operatorname{Arg}\min_{x\in X} \int\limits_{s\in S} p(s)\big(E_{MM}(x) - u(x,s)\big)^2 ds.$$

Інші умови такі ж самі, як і для попереднього критерію.

Критерій максимізації ймовірності. При використанні цього критерію ОПР фіксує величину оцінки функції корисності наслідків $u^* : \min\limits_{x\in X}\min\limits_{s\in S} u(x,s) \le u^* \le \max\limits_{x\in X}\max\limits_{s\in S} u(x,s)$, яку він хоче ймовірно досягти. Для кожної альтернативи x визначається ймовірність $p\{u(x,s) \ge u^*\}$ того, що функція корисності наслідків буде не менша за u^* для кожного стану середовища $s \in S$. Критерій полягає в максимізації ймовірності досягнення значення заданої оцінки

$$E_F(x) = \int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\ge u^*}} p(s)ds,\quad x^* \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} E_F(x) = \operatorname{Arg}\max_{x\in X} \int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\ge u^*}} p(s)ds.$$

Умови застосування цього критерію такі ж самі, як і для BL–критерію.

Модальний критерій. Суть цього критерію полягає у виборі альтернативи, виходячи з найбільш імовірного стану середовища $s^* \in S : s^* = \arg\max\limits_{s\in S} p(s)$. При використанні цього критерію ОПР вважає, що середовище знаходиться у стані s^* і вибирає альтернативу з умови: $E_{MOD}(x) = \max\limits_{x\in X} u(x, s^*)$. Хоча цей критерій є досить песимістичним, він має певні переваги:

- ✓ достатньо виділити лише найбільш імовірний стан середовища і не потрібно знати точне кількісне значення ймовірності його виникнення;

✓ зменшується об'єм обчислень, оскільки розрахунки ведуться лише для найбільш імовірного стану середовища.

Критерій Севіджа (S-критерій). За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується $E_{SE}(x) = \max_{s \in S}(\max_{z \in X} u(z,s) - u(x,s))$.

Цю величину можна інтерпретувати як втрати (штрафи), що виникають у стані $s \in S$ при заміні оптимальної для неї альтернативи на альтернативу *x*. Тоді логічно приймати рішення за умовою мінімізації максимально можливих втрат:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_{x \in X} E_{SE}(x) = \operatorname{Arg}\min_{x \in X}\max_{s \in S}(\max_{z \in X} u(z,s) - u(x,s)).$$

До ситуації прийняття рішень за цим критерієм висуваються такі ж самі вимоги, що і у випадку ММ-критерію.

Критерій стабільності (V–критерій). Із метою мати "максимальну незалежність від станів природи" ("мінімальну залежність") О. Волошин запропонував такий критерій "стабільності". За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною

$$E_{ST}(x) = \max_{s \in S}(\max_{t \in S} u(x,t) - u(x,s)).$$

Цю величину можна інтерпретувати як втрати, що виникають при виборі альтернативи $x \in X$, при реалізації стану природи $s \in S$. Як оптимальну альтернативу логічно прийняти ту, для якої різниця між максимальним і мінімальним виграшами буде мінімальною, тобто розв'язок задачі прийняття рішень за V-критерієм вибирається з множини:

$$x^* \in X^* = Arg\min_{x \in X} E_{ST}(x) = Arg\min_{x \in X}\max_{s \in S}(\max_{t \in S} u(x,t) - u(x,s)).$$

Якщо розв'язок не єдиний, його необхідно вибирати з недомінованих альтернатив (див. Розділ 5).

До ситуації прийняття рішень за цим критерієм висуваються такі ж самі вимоги, що і у випадку ММ-критерію.

Критерій Гурвіца. Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Л. Гурвіц запропонував критерій GW, функція корисності якого забезпечує компроміс між граничним оптимізмом і крайнім песимізмом. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною $E_{GW}(x) = \alpha \max_{s \in S} u(x,s) + (1-\alpha)\min_{s \in S} u(x,s)$, де $\alpha \in [0,1]$ – ваговий коефіцієнт, що характеризує схильність ОПР до ризику.

Рішення приймається з умови:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\max_{x \in X} E_{GW}(x) = \operatorname{Arg}\max_{x \in X}(\alpha \max_{s \in S} u(x,s) + (1-\alpha)\min_{s \in S} u(x,s)).$$

Для $\alpha = 0$ GW-критерій перетворюється в ММ-критерій. Для $\alpha = 1$ він перетворюється у критерій азартного гравця. На практиці вибрати цей коефіцієнт буває так само важко, як правильно вибрати сам критерій. Навряд чи можливо знайти кількісну характеристику для тих часток оптимізму й песимізму, що присутні при прийнятті рішення. Тому найчастіше $\alpha = 0,5$ без заперечень приймається як деякої "середньої" точки зору.

Інколи величина α використовується для обґрунтування вже прийнятого рішення. Для рішення, що сподобалося, обчислюється ваговий коефіцієнт α і він інтерпретується як показник співвідношення оптимізму та песимізму. Таким чином, позиції, виходячи з яких приймаються рішення, можна розсортувати принаймні заднім числом.

Вибір відповідно до GW-критерію може, незважаючи на цілком урівноважену точку зору, приводити до нераціональних рішень. Розглянемо приклад, побудований так, що оптимальне (відповідно до GW-критерію) рішення є незалежним від α.

Приклад. Нехай вибирається одна з двох альтернатив, які мають оцінки, наведені у табл. 2.3.2.

Таблиця 2.3.2

	s_1	s_2	…	s_{n-1}	s_n
x_1	10000	1	…	1	1
x_2	9999	9999	…	9999	0.99

Із цієї таблиці бачимо, що x_1 буде вибраним за GW-критерієм при будь-якому $\alpha \in [0,1]$, але більш вдалим вибором буде x_2.

GW-критерій висуває до ситуації, у якій приймається рішення, такі вимоги:
- ✓ про ймовірності появи станів нічого не відомо;
- ✓ із появою нових станів необхідно рахуватися;
- ✓ реалізується мала кількість рішень;
- ✓ допускається деякий ризик.

Критерій Ходжа–Лемана. Цей критерій спирається одночасно на ММ-критерій і BL-критерій. Функція корисності альтернатив визначається як: $E_{HL}(x) = \alpha \int\limits_{s \in S} p(s)u(x,s)ds + (1-\alpha)\min\limits_{s \in S} u(x,s)$.

За допомогою параметра $\alpha \in [0,1]$ виражається ступінь довіри до використовуваного розподілу ймовірностей $p(s)$, $s \in S$. Якщо ця довіра висока, то акцентується BL-критерій, у протилежному випадку перевага віддається ММ-критерію. Рішення приймається за умовою:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_{x \in X} E_{HL}(x) = \operatorname{Arg}\max_{x \in X}\left(\alpha \int\limits_{s \in S} p(s)u(x,s)ds + (1-\alpha)\min_{s \in S} u(x,s)\right).$$

Для $\alpha = 0$ HL-критерій перетворюється в ММ-критерій, а для $\alpha = 1$ він перетворюється в BL-критерій. Ступінь впевненості $\alpha \in [0,1]$ в будь-якому розподілі ймовірностей $p(s)$, $s \in S$, практично не піддається оцінці. Таким чином, вибір параметра α є повністю суб'єктивним. Крім того, без уваги залишається і число реалізацій рішень. Тому HL-критерій має досить обмежену галузь застосування.

Ситуації, у яких приймається рішення, характеризуються такими властивостями:

✓ імовірності появи станів не відомі, але деякі припущення про розподіл імовірностей можливі;

✓ прийняте рішення теоретично допускає нескінченно багато реалізацій;

✓ при малих числах реалізацій допускається деякий ризик.

Критерій Гермейєра. За підходом Ю. Гермейєра до відшукання слабко ефективних рішень у задачах багатокритеріальної оптимізації (див. Розділ 4) можна запропонувати ще один критерій (GE).

Нехай множина станів є скінченною, а саме $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $u(x,s)<0$ ($u(x,s)$ інтерпретуються як витрати) $\forall x\in X$, $\forall s\in S$, тоді функція корисності альтернатив за GE-критерієм визначається як $E_{GE}(x)=\min\limits_{s\in S} p(s)u(x,s)$, а рішення приймається з умови:

$$x^*\in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} E_{GE}(x)=\operatorname{Arg}\max_{x\in X}\min_{s\in S} p(s)u(x,s).$$

Імовірності станів природи $p(s)$, $s\in S$, у цьому критерії можна інтерпретувати як вагові коефіцієнти функцій корисності $u(x,s)$, $s\in S$, наслідків, які хочемо одночасно максимізувати. За теоремою Ю. Гермейєра про необхідну й достатню умови слабкої ефективності (див. Розділ 4, § 3) фактично шуканий розв'язок x^* визначається як одна (відповідна ваговим коефіцієнтам $p(s)$, $s\in S$) із слабко ефективних альтернатив задачі: $u(x,s)\to\max\limits_{x\in X}$, $s\in S$.

Якщо $u(x,s)>0$, $\forall x\in X$, $\forall s\in S$, то або можна перейти до від'ємних значень із допомогою перетворення $u(x,s)-a$, відповідним чином підібравши $a>0$, або розглянути $E_{GE}(x)=\min\limits_{s\in S}\dfrac{1}{p(s)}u(x,s)$.

У певному відношенні GE-критерій узагальнює MM-критерій. У випадку рівномірного розподілу ймовірностей вони стають ідентичними. Умови його застосовності такі:

✓ множина станів є скінченною;
✓ ймовірності появи станів відомі;
✓ із появою тих або інших нових станів необхідно рахуватися;
✓ допускається деякий ризик;
✓ рішення може реалізуватися один або багато разів.

Якщо функція розподілу відома не дуже надійно, а реалізацій рішення мало, то за GE-критерієм одержують невиправдано великий ризик. Таким чином, залишається деяка воля для суб'єктивних дій.

Критерій добутків. Цей критерій базується на ідеї фільтрації інформації, яка застосовується в теорії нечітких множин (див. Розділ 7). Добутком функцій належності нечітких множин визначається одна з операцій перетину нечітких множин.

Нехай множина станів є скінченною, а саме $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $u(x,s)>0,\ \forall x\in X\ ,\forall s\in S$.

Критерій добутків MU використовує функцію корисності альтернатив $E_{MU}(x)=\prod\limits_{s\in S}u(x,s)$. Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$x^*\in\operatorname{Arg}\max_{x\in X}E_{MU}(x)=\operatorname{Arg}\max_{x\in X}\prod_{s\in S}u(x,s).$$

Застосування цього критерію зумовлено такими обставинами:

- ✓ множина станів є скінченною;
- ✓ імовірності появи станів невідомі;
- ✓ із появою кожного зі станів окремо необхідно рахуватися;
- ✓ критерій застосовують і при малому числі реалізацій рішення;
- ✓ деякий ризик допускається.

Вибір рішення відповідно до MU-критерію виявляється значно менш песимістичним, ніж, наприклад, вибір відповідно до MM-критерію. Можна сказати, що MU-критерій тісно пов'язаний із BL-критерієм при рівномірному розподілі ймовірностей (цей випадок часто називають нейтральним критерієм NN): $E_{NN}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{s\in S}u(x,s)$. Зв'язок із нейтральним критерієм вбачається, наприклад, із такого міркування. Зі строгої монотонності логарифмічної функції випливає, що значення $E_{MU}(x)=\prod\limits_{s\in S}u(x,s)$ є максимальним за $x\in X$ саме тоді, коли є максимальним $\ln u(x,s)$. Тепер маємо $\ln E_{MU}(x)=\sum\limits_{s\in S}\ln u(x,s)$ і ця величина досягає максимуму одночасно з $\dfrac{1}{n}\ln E_{MU}(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{s\in S}\ln u(x,s)$. Останній вираз у точності відповідає нейтральному критерію, якщо лише величини $u(x,s)$ у ньому замінити на логарифми $\ln u(x,s)$.

Таким чином, унаслідок застосування MU-критерію відбувається деяке вирівнювання між великими й малими значеннями $u(x,s)$. Це може забезпечити іноді більшу вигоду, ніж при використанні MM-критерію, але при цьому повинна враховуватися можливість появи і гірших результатів. Варто зазначити, що при використанні цього критерію ні число реалізацій, ні інформація про розподіл ймовірностей не беруться до уваги.

Якщо рішення, прийняте згідно з MU-критерієм, визначається переважно малими значеннями функції корисності наслідків $u(x,s)$, то це вказує на його песимістичний характер, аналогічний MM-критерію. При великих значеннях функції корисності наслідків $u(x,s)$ песимістичний акцент знижується і, власне кажучи, відбувається все більше зближення даного критерію з нейтральним. Тим самим досягається певне вирівнювання між песимістичними й нейтральними поглядами.

Контрольні завдання до § 3

1. Прийняти рішення в умовах невизначеності у задачі з втратами $L(w,x) = -\left(5/4 + \omega\right)x_1 - \left(7/4 - \omega\right)x_2$, які визначені на множині альтернатив $D = \left\{x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le 4,\ x_1 + 2x_2 \le 6,\ x_{1,2} \ge 0\right\}$ і множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \left\{\omega \middle| \omega \in \{0,1\}\right\}$, що відбуваються з імовірністю $p\{\omega = 0\} = 1/4$, $p\{\omega = 1\} = 3/4$ за критерієм Байєса – Лапласа.

2. Прийняти рішення в умовах невизначеності у задачі з втратами $L(w,x) = -\left(4/3 + \omega\right)x_1 - \left(5/3 - \omega\right)x_2$, які визначені на множині альтернатив $D = \left\{x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le 5,\ -4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0\right\}$ і множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \left\{\omega \middle| \omega \in \{0,1\}\right\}$, що відбуваються з ймовірністю $p\{\omega = 0\} = 1/3$, $p\{\omega = 1\} = 2/3$ за критерієм мінімізації дисперсії оцінок.

3. Прийняти рішення в умовах невизначеності в задачі з втратами $L(w,x) = -(2-\omega)x_1 - (1-2\omega)x_2$, які визначені на множині альтернатив $D = \left\{x = (x_1, x_2) \mid -x_1 + 2x_2 \le 2,\ 3x_1 - 2x_2 \le 6,\ x_{1,2} \ge 0\right\}$ і множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \left\{\omega \middle| \omega \in \{0,1\}\right\}$, що відбуваються з ймовірністю $p\{\omega = 0\} = 1/2$, $p\{\omega = 1\} = 1/2$ за критерієм максимізації ймовірності розподілу оцінок при $L_2(w,x) \le -8$.

4. Прийняти рішення в умовах невизначеності в задачі з втратами $L(w,x) = -(1+\omega)x_1 - (-1-\omega)x_2$, які визначені на множині альтернатив $D = \left\{x = (x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 \le 3,\ -2x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 + x_2 \le 5,\ x_{1,2} \ge 0\right\}$ і множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \left\{\omega \middle| \omega \in \{0,1\}\right\}$ за критерієм Байда.