Розділ 2
ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОРИСНОСТІ

Математизація будь-якої науки полягає у формалізації змістовних понять, які склалися в ній. Центральне місце в процесі математизації займає питання побудови кількісних оцінок характеристик явищ, що суттєво сприяє їхньому вивченню та використанню.

Нехай маємо множину об'єктів, які ОПР може порівнювати за їхньою перевагою для себе, тобто нехай він хоча б для деяких пар об'єктів у змозі вказати, який із них є для нього переважаючим. При цьому виникає питання: чи можна в цих умовах, спираючись лише на результати виконаних порівнянь, так приписати об'єктам, що порівнюються, кількісні оцінки, щоб більш переважючому об'єкту відповідала більша оцінка? Функція, яка встановлює таку відповідність і називається *функцією корисності.*

У цьому розділі будуть розглядатися елементарні властивості відношення переваги на множині альтернатив, умови існування функції корисності при різних умовах прийняття рішень і різних способах завдання відношення переваги.

Відношення переваги. Нехай X – задана множина альтернатив. *Відношенням нестрогої переваги* на X будемо називати (див. Розділ 1) будь-яке задане на цій множині рефлексивне бінарне відношення.

Рефлексивність відношення нестрогої переваги (далі будемо казати – відношення переваги і позначати як "$\geq$" чи $R_{\geq}$) відбиває той природний факт, що будь-яка альтернатива $x \in X$ не гірше за себе.

За заданим на множині X відношенням переваги $R_{\geq}$ можна однозначно визначити два відповідних йому відношення:

♦ байдужості $R_{\sim} = (X \times X \setminus R_{\geq} \cup R_{\geq}^{-1}) \cup (R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1})$ *(далі будемо позначати як "~"), інколи, це відношення називають* толерантністю *;*

♦ *строгої переваги* $R_{>} = R_{>} \setminus R_{\geq}^{-1}$ (далі будемо позначати як ">"),

де $R_{\geq}^{-1}$ – відношення, що є оберненим до відношення $R_{\geq}$, позначається через $R_{\leq}$, тобто "$\leq$".

У теорії корисності в основному розглядаються відношення строгої переваги ">" і відношення байдужості "~", яке можна охарактеризувати відсутністю строгої переваги: $x \sim y \Leftrightarrow (x \overline{<} y,\ y \overline{<} x)$.

Байдужість може виникати кількома шляхами.

По-перше, ОПР може щиро вважати, що фактично немає жодної різниці між x і y, тобто бажано мати x у такій само мірі, як і y, і навпаки.

По-друге, байдужість може наступити, коли ОПР не впевнена у своїй перевазі між x і y. Вона може вважати факт порівняння x із y важким і може відмовлятися говорити про строгу перевагу, не будучи впевненою, чи розглядає вона x і y як однаково бажані (або небажані).

По-третє, ситуація $x \sim y$ може виникнути у випадку, коли ОПР вважає x і y зовсім не порівнянними за перевагою.

Відношення строгої переваги розподіляють на два типи (див. Розділ 1):

✓ слабке впорядкування *(асиметричне і від'ємне транзитивне відношення);*

✓ строге впорядкування *(слабко зв'язане слабке впорядкування).*

Слабке впорядкування. Основною рисою слабкого впорядкування є асиметричність. Якщо для вас елемент x є кращим за елемент y, то водночас не може бути y кращим за x.

Транзитивність є наслідком асиметричності та від'ємної транзитивності і представляється розумним критерієм істинності для індивідуальних переваг. Якщо для вас x переважніше, ніж y, а y переважніше, ніж z, то здоровий глузд підказує, що x переважніше, ніж z.

Якщо відношення строгої переваги "<" є слабким упорядкуванням, а байдужість "~" визначається як відсутність строгої переваги, то від супротивного легко показати, що відношення "~" є еквівалентністю (рефлексивне, симетричне і транзитивне).

Однак концепція слабкого порядку в цілому вразлива для критики тому, що наділяє ОПР занадто необмеженою можливістю судження про перевагу, використовуючи транзитивність. Щоб показати, як транзитивність може порушуватися, розглянемо приклад.

Приклад. Припустимо, що при вкладанні капіталу в яку-небудь справу ви відчуваєте, що сума в 1000 у. о. є найкращим вкладенням. Ваша перевага зменшується, якщо ви відхиляєтеся від 1000 у. о. у будь-який бік. Хоча для вас важливіше 955 у. о. ніж 950 у. о., може виявитися, що ви не можете впевнено вибрати кращу суму між 950 і 1080 у. о. або між 955 і 1080 у. о. Але тоді одержимо:

955 у. о. > 950 у. о.,

950 у. о. ~ 1080 у. о.,

955 у. о. ~ 1080 у. о.,

що суперечить транзитивності відношення байдужності. У цьому прикладі відношення байдужності не є транзитивним.

Строге впорядкування. Це відношення строгої переваги є слабко зв'язаним ($x \neq y \Rightarrow (xRy$ чи $yRx), \quad \forall x, y \in X$) слабким упорядкуванням. Воно відповідає реалії більш, ніж слабке впорядкування, оскільки враховує нетранзитивну байдужість, що з'являється через "недосконалість здатності людського розуму, що розрізняє, чому нерівності встановлюються лише при досить великій різниці величин" [12].

Надалі ми будемо враховувати цю властивість шляхом відмови від безумовної вимоги транзитивності відношення байдужості.

§ 1. Функції корисності в умовах визначеності

Функції корисності на зліченних множинах. Найбільш прості умови існування функцій корисності можна сформулювати у випадку зліченної множини альтернатив.

Теорема 2.1.1. (про функцію корисності для слабких упорядкувань). Якщо відношення "<" на X є слабким впорядкуванням, а множина класів еквівалентності на X за відношенням "~" (далі будемо позначати цю множину через $X_{\sim}$) є зліченною, то існує дійснозначна функція u на X, для якої: $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$; $x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$, $\forall x, y \in X$.

Доведення. Оскільки за умовою теореми множина класів еквівалентності $X_{\sim}$ є зліченною, то позначимо всі її елементи через $a_1, a_2, \ldots$, а через $r_1, r_2, \ldots$ деякий перелік множини раціональних чисел.

Введемо на множині класів еквівалентності $X_{\sim}$ строге упорядкування, яке позначимо через >' ($a <' b \Leftrightarrow \exists x \in a,\ \exists y \in b\ :\ x < y$). Це потрібно, оскільки, на відміну від множини X, елементами множини $X_{\sim}$ є множини.

Визначимо так дійснозначну функцію u на $X_{\sim}$.

Будемо вважати $u(a_1) = 0$. Далі за індукцією для a_m на кожному кроці буде реалізовуватися одна з трьох можливостей:

1. $a_i <' a_m$ для усіх $i < m$; у цьому випадку покладемо $u(a_m) = m$.
2. $a_m <' a_i$ для усіх $i < m$; у цьому випадку покладемо $u(a_m) = -m$.
3. $a_i <' a_m <' a_j$ для деяких $i, j < m$ і для жодного $h < m$, відмінного від i,j, не виконується $a_i <' a_h <' a_j$; у цьому випадку покладемо $u(a_m)$ рівним першому у переліку $r_1, r_2, \ldots$ числу r_k, для якого $u(a_i) < r_k < u(a_j)$.

За побудовою $u(a_m) \neq u(a_i)$, $\forall i < m$, і $a_i <' a_j \Leftrightarrow u(a_i) < u(a_j)$, $\forall i, j \leq m$. Це має місце для будь-якого натурального m, тому виконується на всій множині $X_{\sim}$. Остаточно визначимо на X функцію u, поклавши $u(x) = u(a)$, $\forall x \in a$.

Якщо тепер $a <' b$, то за введеним вище строгим упорядкуванням <' для $\forall x \in a, \ \forall y \in b \ \Rightarrow \ x < y$, звідки випливає: $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$, $\forall x, y \in X$. Співвідношення $x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$, $\forall x, y \in X$ доводиться з визначення байдужості ($x \sim y \Leftrightarrow (x \bar{<} y, \ y \bar{<} x)$) від супротивного.♦

Розглянемо тепер відношення переваги, якщо воно є строгим частковим упорядкуванням. Нагадаємо, що бінарне відношення R на множині Y буде *строгим частковим упорядкуванням*, якщо воно є не рефлексивним і транзитивним.

Оскільки сам факт того, що "<" – строге часткове упорядкування на X, допускає співвідношення ($x \sim y, y \sim z, x < z$), відношення "~" не зобов'язане бути транзитивним і тому – еквівалентністю. Однак інше відношення – відношення подібності "$\approx$", визначене як $x \approx y \Leftrightarrow (x \sim z \Leftrightarrow y \sim z), \ \forall z \in X$, у цих умовах виявляється транзитивним і відповідно є еквівалентністю (рефлективність і симетричність випливає з визначення, а також рефлективності та симетричності відношення "~"). Таким чином, відношення $x \approx y$ виконується щоразу, коли з байдужості x порівняно з деяким $z \in X$ випливає, що y також знаходиться у відношенні байдужості з z і навпаки.

Наступна теорема стверджує: якщо відношення "<" є не рефлексивним і транзитивним, а множина класів еквівалентності на X за відношенням "$\approx$" (далі будемо позначати цю множину через $X_{\approx}$) є зліченною, то елементам множини X можна так поставити у відповідність числа, щоб їхній порядок відповідав як відношенню "<", так і "$\approx$". Однак через те, що відношення "$\approx$" може виявитися не транзитивним, ми не можемо стверджувати, що з $x \sim y$ та $x \not\approx y$ випливає $u(x) = u(y)$. У випадку $x \sim y$ і $x \not\approx y$ може виявитися справедливим будь-яке з трьох співвідношень: $u(x) = u(y), u(x) < u(y), u(y) < u(x)$.

Теорема 2.1.2. (про функцію корисності для строгих часткових упорядкувань). Якщо відношення "<" на X є строгим частковим упорядкуванням, а множина $X_{\approx}$ класів еквівалентності на X за відношенням "$\approx$" є зліченною, то існує дійснозначна функція u на X, для якої: $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y); \ \ x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y), \ \ \forall x, y \in X$.

Доведення цієї теореми спирається на доведення попередньої теореми та відому теорему Шпільрайна [12] про взаємозв'язок слабкого та строгого часткового упорядкувань на множині класів еквівалентності відповідно за відношеннями байдужості та подібності.

Таким чином, можна зробити такі висновки.

Бінарне відношення є слабким упорядкуванням, якщо воно є асиметричним і від'ємно транзитивним. Визначаючи відношення байдужості "~" як відсутність строгої переваги, отримуємо, що воно є еквівалентністю (тобто рефлексивним, симетричним і транзитивним), якщо відношення "<" на X є слабким упорядкуванням. Якщо множина $X_{\sim}$ класів еквівалентності, у сенсі відношення "~", є зліченною, то за умови, що відношення "<" є слабким упорядкуванням, елементам x, y, ... множини X можна поставити у відповідність корисності $u(x), u(y), \ldots$ таким чином, що $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$. Звідси випливає, що $x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$.

Відношення переваги є строгим частковим упорядкуванням, якщо воно є нерефлексивним і транзитивним. У цьому випадку відношення байдужості може не бути транзитивним, але у цьому випадку відношення подібності "$\approx$" є еквівалентністю. Якщо відношення "<" на множині X – строге часткове упорядкування, а множина $X_{\approx}$ є зліченною, то корисності можуть бути поставлені у відповідність елементам множини X таким чином, що $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ і $x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$.

Функції корисності на незліченних множинах. Поширимо теорему про функцію корисності для слабких упорядкувань на випадок, коли множина $X_{\sim}$ класів еквівалентності на X за відношенням "~" є не обов'язково зліченною. Введемо для цього так звану умову *сепарабельності*, яка має відношення до поняття щільності множини щодо впорядкування.

Нехай R є бінарним відношенням на множині Y. Множина $Z \subseteq Y$ називається R – *щільною у множині* Y, якщо для будь-яких x і y, що належать Y, але не належать Z, і для яких xRy, знайдеться таке $z \in Z$, що (xRz, zRy).

Наприклад, оскільки між двома будь-якими дійсними числами мається раціональне число, то зліченна множина раціональних чисел є "<" – щільною у E^1.

Теорема 2.1.3. (про функцію корисності для слабких впорядкувань на незліченних множинах). Існує така дійснозначна функція u на множині X, що еквівалентність $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$, $\forall x, y \in X$, має місце тоді і тільки тоді, коли відношення "<" на X є слабким впорядкуванням та існує зліченна підмножина множини $X_{\sim}$, яка є "<'" – щільною у $X_{\sim}$, де $a <' b \Leftrightarrow \exists x \in a,\ \exists y \in b\ :\ x < y$ - строге впорядкування на множині класів еквівалентності $X_{\sim}$.

На жаль, ця умова сепарабельності щодо впорядкування не має простої інтуїтивної інтерпретації. Щоб показати, як ця умова може порушуватись, візьмемо $X = E^2$ і покладемо відношення "<" – лексикографічним впорядкуванням:

$$(x_1,\ x_2) < (y_1,\ y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1,\ x_2 < y_2).$$

Тоді $X_{\sim} = \{\{x\} | x \in X\}$, так, що $\{x\} <' \{y\} \Leftrightarrow x < y$. При фіксованому x_1 потрібно щонайменше злічення підмножина множини E^1, щоб одержати щільну щодо впорядкування "<" підмножину множини $\{x_1\} \times E^1$. Але таких x_1 є незліченна множина, звідки випливає, що множина E^2 щодо впорядкування "<" не є сеперабельною.

Розглянемо тепер відповідне узагальнення теореми про функцію корисності для строгих часткових впорядкувань.

Теорема 2.1.4. (про функцію корисності для строгих часткових упорядкувань на незліченних множинах). Припустимо, що відношення "<" на множині *X* є строгим частковим впорядкуванням та існує злічення підмножина множини $X_{\approx}$ класів еквівалентності на *X* за відношенням "$\approx$", яка є "$<*$" – щільною у $X_{\approx}$, де $a <* b \Leftrightarrow \exists x \in a,\ \exists y \in b\ :\ x < y$ – строге часткове впорядкування на множині класів еквівалентності $X_{\approx}$. Тоді існує u – така дійснозначна функція на *X*, що $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y),\quad x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y),\quad \forall x, y \in X$.

У цьому випадку умова сепарабельності щодо впорядкування не є необхідною, як це було у попередній теоремі. Припустимо, наприклад, що $X = E^1$, і покладемо $x < y \Leftrightarrow x < y,\ y = x + n$ для деякого цілого додатного *n*. Тоді функція $u(x) = x$ відповідає твердженню теореми і $X_{\approx} = \{\{x\} | x \in X\}$.

Якщо підмножина $Z \subseteq X$ є зліченною, то існує таке *x*, що ні *x*, ні $x+1$ не належать *Z*. Але тому, що $x < x+1$, не існує такого $z \in Z$, що буде виконуватись $x < z < x+1$. Звідси випливає, що не існує зліченної підмножини в $X_{\approx}$, яка є "$<*$" – щільною в $X_{\approx}$.

Таким чином, можна зробити такі висновки.

Якщо множина *X* не є зліченною і відношення "<" на *X* – слабке впорядкування, то переваги можуть бути адекватно описаними за допомогою дійснозначних функцій у тому і лише в тому випадку, коли множина *X* містить зліченну підмножину *Y*, для якої з $x < y$ випливає існування такого $z \in Y$, що ($x < z$ або $x \sim z$) і ($z \sim y$ чи $z < x$).

Лексикографічні впорядкування за перевагою. Є приклади, коли умова щільності порушується. Якщо відношення "<" є лише строгим частковим впорядкуванням, то сепарабельність щодо впорядкування є достатньою, але не необхідною умовою існування дійснозначної функції корисності.

Контрольні завдання до § 1

1. Довести, що множина $\{2,4,6,\ldots\}$ є зліченною.
2. Довести, що множина $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ є зліченною.
3. Довести, що множина всіх раціональних чисел є зліченною.
4. Довести, що якщо транзитивне замикання відношення "<" є асиметричним, то відношення "<" є строгим частковим впорядкуванням.
5. Довести за теоремою 2.1.2, що дійснозначна функція u на зліченній множині X, яка задовольняє умові $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$; $x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$, $\forall x, y \in X$, існує тоді й лише тоді, коли відношення "<" є асиметричним.
6. Нехай a і b – числа, причому $a < b$. Довести, що існує раціональне число з інтервалу (a,b) (використати той факт, що існує таке додатне число n, що $1 < n(b-a)$; покласти, що m дорівнює найменшому цілому числу не меншому за a та показати, що $m/n \in (a,b)$).
7. Дати приклад функції корисності на множині $X = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$.

~~§ 2. Теорія очікуваної корисності~~

~~Коли кожна альтернатива відповідає ймовірнісній мірі на підмножині множини наслідків, у теорії корисності розглядається модель очікуваної корисності, яка дає спосіб обчислення корисностей альтернатив або зв'язаних із ними ймовірносних мір. Ідею такої моделі вперше запропонував ще Бернуллі, однак лише в минулому сторіччі були сформульовані дійсно прийнятні аксіоми переваги, що були покладені в її основу. Основні аксіоми цієї теорії були уведені фон Нейманом і Моргенштерном.~~

~~Спочатку розглянемо ілюстративний приклад.~~

~~**Приклад 1.** Припустимо, що власник невеликої будівельної фірми планує призначити підрядну ціну за роботу, що за його оцінкою обійдеться компанії у 200 тисяч умовних одиниць. Якщо він призначить ціну~~ x ~~і одержить замовлення, то йому і заплатять~~ x ~~і його прибуток буде дорівнювати~~ $x-200$~~. Оскільки будівельна індустрія знаходиться в нестабільному стані, власник думає, що можуть бути призначені кілька різних цін. Виходячи зі свого попереднього досвіду та знання даної ситуації, він оцінює ймовірність~~ $p(x)$ ~~одержання замовлення у~~