~~8. Довести, що якщо R відношення часткового порядку, то R^{-1} також є частковим порядком.~~

~~9. Довести, що для лінійно впорядкованої множини поняття мажоранти (міноранти) і максимума (мінімума) збігаються.~~

~~10. Довести, що серед будь-яких шести осіб знайдуться або три попарно знайомих, або три попарно незнайомих.~~

§ 3. Функції вибору

Нехай задано скінченну множину альтернатив $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ і ОПР, користуючись своїм особистим уявленням про кращі альтернативи, для кожної множини $X \subseteq \Omega$ вибирає підмножину кращих $C(X)$. Єдина вимога, яка накладається на вибір: $C(X) \subseteq X$ – кращі альтернативи можна обирати з того, що пропонують, зокрема, $C(\varnothing) = \varnothing$.

Уже на множині з двох альтернатив $\Omega = \{x_1, x_2\}$ можна зробити 16 виборів! Дійсно, коли пропонується одна альтернатива – виборів два (обирати її або не обирати), коли пропонується дві альтернативи – виборів чотири (не обирати жодної, обирати одну (2 вибори) і обирати обидві). Отже, усього виборів $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$. На множині з 7 альтернатив виборів більше за 10^{120} (це число має порядок кількості можливих шахових партій, що, у свою чергу, має порядок кількості атомів у "видимому всесвіті"!). Тобто описувати явно вибір, задаючи вибір кращих альтернатив $C(X)$ на кожній підмножині X "універсальної" множини Ω, неможливо вже у найпростіших випадках! Що ж робити? Як здійснювати "розумний", "логічний" вибір? Один із шляхів цього – у блоці 4 загальної схеми задавати "принципи логічності" і вивчати результуючий вибір (множини альтернатив, що задовольняють цим принципам). Наприклад, нехай Ω – групи факультету кібернетики третього курсу. "Логічно" вважати, що краща група на курсі повинна бути кращою на своїй спеціальності. Формально ця умова (умова "спадковості" – див. нижче) записується так: $Y \subseteq X$, $x \in Y \cap C(X) \Rightarrow x \in C(Y)$. Конкурс на кращу групу, у якому краща група курсу виявиться не кращою групою на своїй спеціальності, навряд чи можна вважати об'єктивним, незалежно від того, за якими показниками підводяться його підсумки.

Будемо називати *функцією вибору C*, задану на Ω, відображення, що зіставляє кожній підмножині $X \subseteq \Omega$ її підмножину $C(X)$, тобто $C:\ 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$, $C(X) \subseteq X$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Вище ми відмічали, що вибір найпростіше здійснювати, порівнюючи дві альтернативи, тобто на Ω задавати деяке бінарне відношення *R*. Тоді розглядаючи звуження цього бінарного відношення на будь-яку підмножину $X \subseteq \Omega$ можна задати дві функції: $C^R(X)=\left\{x \in X \mid \ \forall y \in X \ y\bar{R}x\right\}$ – множина мажорант на множині *X*; $C_R(X)=\left\{x \in X \mid \ \forall y \in X \ xRy\right\}$ – множина максимумів на *X*. Функція вибору C^R називається *блокуванням*, C_R – *перевагою*.

Із властивостей бінарних відношень безпосередньо випливає

Теорема 1.3.1. Функції вибору C^R і C_R пов'язані співвідношеннями $C^R = C_{R^d}$, $C_R = C^{R^d}$, де R^d – двоїсте до *R*.

Таким чином, із двох функцій вибору, що породжуються заданим бінарним відношенням *R*, досить розглядати одну. Далі будемо зіставляти бінарному відношенню *R* функцію блокування C^R і називати її "функцією вибору, породжену бінарним відношенням *R*". Такі функції називаються *нормальними*. Довільна функція вибору *C* не обов'язково є нормальною. Розглянемо наступну функцію вибору на

$$\Omega=\{x,y\}: C(x)=x,\ C(y)=\varnothing,\ C(x,y)=\{x,y\} \qquad (1.3.1)$$

(прийнято писати $C(x)=x$ замість формального $C(\{x\})=\{x\}$).

Нехай існує бінарне відношення *R*, яке породжує функцію вибору (1.3.1). Тоді із $C^R(y)=\varnothing$ випливає, що yRy вірно й невірно $y\bar{R}y$, тобто $y \notin C^R(x,y)$, що суперечить (1.3.1). На мові графів усе дуже наочно: оскільки $C(y)=\varnothing$, вершина *y* повинна блокуватись (при ній має бути петля), а, з іншого боку, вершина *y* не має блокуватись, оскільки $C(x,y)=\{x,y\}$.

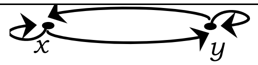
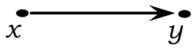
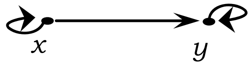
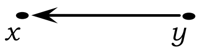
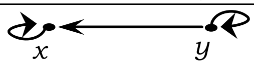
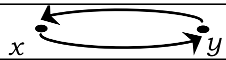
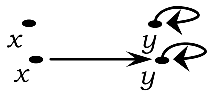
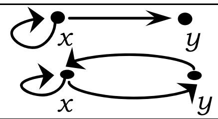
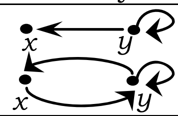
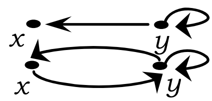
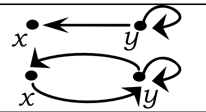
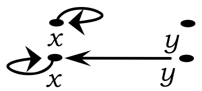
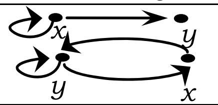
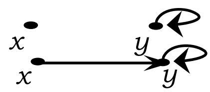
Наведемо всі, окрім порожньої, функції вибору на множині з двох елементів $\Omega=\{x,y\}\equiv\{\text{сир, ковбаса}\}$ (табл. 1.3.1). Можна змістовно описати всі можливі вибори. Наприклад, $C(x)=C(y)=C(x,y)=\varnothing$ – "піст"; $C(x)=x$, $C(y)=\varnothing$, $C(x,y)=x$ – "вегетаріанець"; $C(x)=x$, $C(y)=y$, $C(x,y)=\{x,y\}$ – "студент"; $C(x)=x$, $C(y)=y$, $C(x,y)=\varnothing$ – "буриданів осел" і т. д.

Цікаво відмітити, що не існує оцінки кількості нормальних функцій вибору при фіксованому *n*. Відмітимо також, що одну і ту ж нормальну функцію вибору можуть породжувати різні бінарні відношення.

Доцільно в останньому випадку виділяти "мінімальне" відношення, граф якого має мінімальне число дуг.

Для формального описання класу нормальних функцій вибору визначимо для $X \subseteq \Omega$ покриваючу сім'ю, таку що $\{X_i\}$, $X_i \subseteq \Omega$, $i \in J$, таке, що $X \subseteq \bigcup_{i \in J} X_i$.

Таблиця 1.3.1

$C(x)$	$C(y)$	$C(x,y)$	R_1	R_2
x	y	$\{x,y\}$		
x	y	x		
x	y	y		
x	y	$\varnothing$		
x	$\varnothing$	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
$\varnothing$	y	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
x	$\varnothing$	x		
x	$\varnothing$	y	Не існує	Не існує
$\varnothing$	y	y		
$\varnothing$	y	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
x	$\varnothing$	$\varnothing$		
$\varnothing$	y	$\varnothing$		
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
$\varnothing$	$\varnothing$	x	Не існує	Не існує
$\varnothing$	$\varnothing$	y	Не існує	Не існує

Теорема 1.3.2. Функція вибору C є нормальною тоді і лише тоді, коли для будь-якої множини $X \subseteq \Omega$ і будь-якої покриваючої її сім'ї $\{X_i\}_{i \in J}$ виконується:

$$X \setminus C(X) \subseteq X \setminus \bigcap_{i \in J} C(X_i). \tag{1.3.2}$$

Отже, якщо функція вибору нормальна, то будь-який об'єкт із X, що не є кращим у X, не є кращим хоча б для однієї множини з покриваючої сім'ї. Зокрема, якщо елемент не вибирається з деякої підмножини X, то він не повинен вибиратись із будь-якої множини, що її містить.

Доведення теореми. *Необхідність.* Нехай C – нормальна, тобто існує бінарне відношення R таке, що $C = C_R$. Нехай

$$x \in X \setminus C_R(X) \Rightarrow x \in X,\ x \notin X \setminus C_R(X) \Rightarrow \exists y \in X:\ yRx.$$

Нехай y належить деякій множині X_i із покриваючої сім'ї. Тоді:

$$\exists y \in X_i:\ yRx \Rightarrow x \notin C_R(X_i) \Rightarrow x \notin \bigcap_i C_R(X_i) \Rightarrow x \in X \setminus \bigcap_i C(X_i).$$

Достатність. Нехай C – функція вибору, що задовольняє (1.3.2). Задамо відношення R формулою: $R = \bigcup_{X \subseteq \Omega} C(X) \times X$. Покажемо, що $C = C_R$. Нехай $xRy \Rightarrow \forall X:\ x \in C(X)$, $y \in X$, $C(X) \subseteq X \Rightarrow x, y \in X$: $xRy \Rightarrow x \in C_R(x)$. Тобто $C(x) \subseteq C_R(X)$.

Покажемо, що $C_R(X) \subseteq C(X)$, $\forall x \in \Omega$. Нехай

$$\begin{cases} x \in C_R(X) \Rightarrow xRy, \forall y \in X_i,\ \forall i \Rightarrow x \in C(X_i), \\ x \notin C(X) \Rightarrow \text{ з } (1.3.2)\ \exists i : x \notin C(X_i). \end{cases}$$

З отриманого протиріччя випливає: $C_R(X) \subseteq C(X)$. Теорему доведено.♦

Теорема 1.3.3. $C^R(X) \neq \varnothing$ для $\forall X \subseteq \Omega$ тоді і лише тоді, коли відношення R є ациклічним.

Доведення. *Достатність.* Нехай R – ациклічне бінарне відношення, $x \in X \subseteq \Omega$. Якщо для всіх $y \in X$, $y\bar{R}x$, то $x \in C(X)$ і тому $C(X) \neq \varnothing$. Інакше, знайдеться $y^* \in X$ такий, що $y^* Rx$. При цьому або $y^* \in C(X)$, або знайдеться z таке, що zRy^*.

Продовжуючи цей процес, знайдемо $v \in X$ таке, що для всіх $w \in X$ виконується $w\bar{R}v$, тобто $v \in C(X)$. Інакше, у силу скінченності X, отримаємо протиріччя з ациклічністю R. Таким чином, при ациклічному R вибір $C^R(X)$ не порожній.

Необхідність. Нехай $C^R(X) \neq \varnothing$ для $\forall X \subseteq \Omega$, але *R* не є ациклічним. Це означає, що існують $x_i \in \Omega$ такі, що $x_{i+1} R x_i$, $i = \overline{1, k-1}$, і $x_1 R x_k$. Але тоді з визначення C^R маємо, що $C(X) = \varnothing$, де $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Отримане протиріччя показує, що бінарне відношення *R*, що породжує функцію вибору C^R, є ациклічним. Теорему доведено.♦

Отже, кожному бінарному відношенню *R* на Ω відповідає деяка функція вибору C^R на Ω; різним бінарним відношенням *R* можуть відповідати однакові C^R; функції вибору *C*, що збігаються з C^R для деякого бінарного відношення (R, Ω), називаються нормальними; не всі функції вибору нормальні.

Функція вибору *C*, визначена на множині Ω із *n* елементів, має множину визначення з 2^n елемента (кількість підмножин). Уже для досить малого *n* представлення функції вибору є дуже громіздким.

Зручним апаратом для представлення функцій вибору є булеві функції.

Будь-якій підмножині $X \subseteq \Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ зіставимо вектор:

$$\beta(X) = (\beta_i(X))_{i=\overline{1,n}}, \text{ де } \beta_i(X) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_i \in X, \\ 0, \text{ якщо } x_i \notin X. \end{cases}$$

Множині Ω відповідає, зокрема, вектор $\beta(\Omega) = (1, \ldots, 1)$ (*n* одиниць), множині $\varnothing$ – вектор $\beta(\varnothing) = (0, \ldots, 0)$ (*n* нулів).

Нехай на Ω задано функцію вибору *C*. Розглянемо сімейство з *n* булевих функцій від *n-1* змінної $f_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}), i = \overline{1, n}$, побудованих за правилом:

$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X), \tag{1.3.3}$$

де
$$f_i(\beta) = f_i(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n), \; i \neq 1, \; i \neq n,$$
$$f_1(\beta) = f_1(\beta_2, \ldots, \beta_n), \tag{1.3.4}$$
$$f_n(\beta) = f_n(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}).$$

Логічною формою функції вибору С (ЛФФВ(С)) називається сімейство функцій $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ від $n-1$ змінної, побудованих за формулою (1.3.3).

Навпаки, якщо задане довільне сімейство булевих функцій $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ від $n-1$ змінної, то співвідношення (1.3.3) однозначно визначає функцію вибору *C*. Отже, задання функції вибору є еквівалентним заданню ЛФФВ(С).

Розглянемо приклад на побудову ЛФФВ(С).

Нехай $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ і задано функцію вибору C так: $C(x_i) = x_i$, $C(x_i, x_j) = x_k$, де $k = \min\{i, j\}$, $C(\Omega) = x_1$ (див. табл. 1.3.2). Побудуємо табл. 1.3.3–1.3.5, що задають булеві функції f_i, $i = \overline{1,3}$.

Таблиця 1.3.2

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
x_1 x_2 x_3	x_1 x_2 x_3	(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)	(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)
x_1, x_2 x_1, x_3 x_2, x_3	x_1 x_1 x_2	(1,1,0) (1,0,1) (0,1,1)	(1,0,0) (1,0,0) (0,1,0)
x_1, x_2, x_3	x_1	(1,1,1)	(1,0,0)

Таблиця 1.3.3

β_2	β_3	f_1
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблиця 1.3.4

β_1	β_3	f_2
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Таблиця 1.3.5

β_1	β_2	f_3
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

За таблицями 1.3.3–1.3.5 побудуємо розклад функцій у досконалу диз'юнктивну нормальну форму:

$f_1(\beta_2, \beta_3) \equiv 1$, $f_2(\beta_1, \beta_3) = \overline{\beta}_1\overline{\beta}_3 \vee \overline{\beta}_1\beta_3 = \overline{\beta}_1(\overline{\beta}_3 \vee \beta_3) = \overline{\beta}_1$, $f_3(\beta_1, \beta_2) = \overline{\beta}_1\overline{\beta}_2$.

Розглянемо приклад на "відновлення" функції вибору за її логічною формою. Нехай $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ і задано сім'ю булевих функцій: $f_1(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1$, $f_2(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_2$, $f_3(\gamma_1, \gamma_2) \equiv 0$. Перенумеруємо змінні відповідно до (1.3.4): $f_1(\beta_2, \beta_3) = \beta_2$, $f_2(\beta_1, \beta_3) = \beta_3$, $f_3(\beta_1, \beta_2) \equiv 0$, отримані функції зведемо у табл. 1.3.6–1.3.8.

Таблиця 1.3.6

β_2	β_3	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Таблиця 1.3.7

β_1	β_3	f_2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблиця 1.3.8

β_1	β_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Використовуючи табл. 1.3.6–1.3.8 і формулу (1.3.3), отримаємо табл. 1.3.9.

Таблиця 1.3.9

X	β_1	β_2	β_3	$\beta_1 f_1$	$\beta_2 f_2$	$\beta_3 f_3$	$C(X)$
x_1	1	0	0	0	0	0	$\varnothing$
x_2	0	1	0	0	0	0	$\varnothing$
x_3	0	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_1, x_2	1	1	0	1	0	0	x_1
x_1, x_3	1	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_2, x_3	0	1	1	0	1	0	x_2
Ω	1	1	1	1	1	0	x_1, x_2

За логічною формою функції вибору легко отримати формулу для кількості всіх функцій вибору, заданих на множині Ω із n-елементів. Очевидно, що різних булевих функцій від $n-1$ змінної $2^{2^{n-1}}$ (кількість наборів змінних довжини $n-1$ дорівнює 2^{n-1}, на кожному наборі функція набуває два значення), логічна форма функції вибору складається з n функцій, отже $\left|C(\Omega)\right| = \left(2^{2^{n-1}}\right)^n = 2^{n2^{n-1}}$.

Представлення функцій вибору (ФВ) їхніми логічними формами створює єдину основу для дослідження всіх властивостей функцій вибору, їхньої класифікації й декомпозиції на простіші.

Операції над функціями вибору.

Функція вибору C_1 *вкладається* у функцію вибору C_2 ($C_1 \subseteq C_2$), якщо $C_1(X) \subseteq C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Об'єднанням ФВ C_1 і C_2 називається функція вибору $C = C_1 \cup C_2$, що визначається : $C(X) = C_1(X) \cup C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Перетин визначається : $C(X) = C_1(X) \cap C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Доповненням до ФВ C називається функція $\bar{C}$, для якої: $\bar{C}(X) = X \setminus C(X)$, $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Установимо відповідність між введеними операціями над функціями вибору й операціями над ЛФФВ.

Теорема 1.3.4. Нехай 1) $C_1 \subseteq C_2$; 2) $C = C_1 \cup C_2$; 3) $C = C_1 \cap C_2$; 4) задано $\bar{C}$. Тоді для $\forall\ i = \overline{1,n}$: 1) $f_i^{C_1} \le f_i^{C_2}$; 2) $f_i^C = f_i^{C_1} \vee f_i^{C_2}$; 3) $f_i^C = f_i^{C_1} \wedge f_i^{C_2}$; 4) $f_i^{\bar{C}} = \bar{f}_i^C$.

Доведення. 1) Нехай $X \subseteq \Omega$, $x_i \in C_1(X)$. З визначення логічної форми маємо: $\beta_i(X) \wedge f_i^{C_1}(\beta(X)) = 1$. Оскільки $C_1(X) \subseteq C_2(X)$, то $x_i \in C_2(X)$ і, отже, $\beta_i(X) \wedge f_i^{C_2}(\beta(X)) = 1$. Звідси випливає, що $f_i^{C_1} = f_i^{C_2}$. Якщо $x_i \notin C_1(X)$, але $x_i \in C_2(X)$, тоді $\beta_i(X) \wedge f_i^{C_1}(\beta(X)) = 0$ і $f_i^{C_1} = 0 \vee 1 = 1$. Оскільки $f_i^{C_2} = 1$, то маємо $f_i^{C_1} \le f_i^{C_2}$. 2) Нехай $X \subseteq \Omega$, $x_i \in C_1(X) \bigcup C_2(X)$. У силу (1.3.3) маємо:

$$\left(\beta_i(X) \wedge f_i^{C_1}(\beta(X))\right) \vee \left(\beta_i(X) \wedge f_i^{C_2}(\beta(X))\right) = 1. \qquad (1.3.5)$$

Звідси маємо: $\beta_i(X) \wedge \left(f_i^{C_1}(\beta(X)) \vee f_i^{C_2}(\beta(X))\right) = 1$. Отже, із $x_i \in C(X) \Rightarrow \beta_i(X) \wedge f_i^C = 1$. Навпаки, нехай $\beta_i(X) \wedge f_i^C(\beta(X)) = 1$. Із (1.3.5) випливає, що хоча б одна зі складових у (1.3.5) рівна 1. Тоді $x_i \in C_1(X) \bigcup C_2(X) = C(X)$ і з $f_i \wedge f_i^C = 1 \Rightarrow x_i \in C(X)$. Співвідношення 3), 4) доводяться аналогічно. Теорему доведено.♦

Композицією функцій вибору C_1 і C_2 називається функція вибору $C = C_1 \cdot C_2$, що визначається рівністю: $C(X) = C_2(C_1(X))$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$. Змістовно операція полягає в такому. Спочатку відбувається вибір відповідно до функції вибору C_1, а потім із $C_1(X)$ відбувається вибір за функцією C_2. Так, із десяти кандидатів у президенти спочатку обирають двох, потім – одного.

Теорема 1.3.5. Нехай $C = C_1 \cdot C_2$. Тоді

$$\begin{gathered} f_i^C = f_i^{C_1}(\beta_1,\dots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\dots,\beta_n) \wedge f_i^{C_2}(\beta_1 \wedge f_i^{C_1}(\beta_2,\dots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\dots,\beta_n),\dots, \\ \beta_{i-1} \wedge f_{i-1}^{C_1}(\beta_1,\dots,\beta_{i-2},1,\beta_i,\dots,\beta_n),\ \beta_{i+1} \wedge f_{i+1}^{C_1}(\beta_2,\dots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+2},\dots,\beta_n), \\ ,\dots,\beta_n \wedge f_n^{C_1}(\beta_2,\dots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\dots,\beta_{n-1})). \end{gathered} \qquad (1.3.6)$$

Доведення. Розглянемо $Y = C_1(X)$, тоді

$$\beta(Y) = \left(\beta_1 \wedge f_1^{C_1}(\beta(X)),\dots,\beta_n \wedge f_n^{C_1}(\beta(X))\right).$$

Побудуємо ЛФФВ функції $C = C_1 \cdot C_2$, підставивши у (1.3.3) замість $\beta(X)$ вираз $\beta(Y) = \beta(C_1(X))$. Отримаємо: $x_i \in C(X) \Leftrightarrow \left(\beta_i \wedge f_i^{C_1}(\beta(X))\right)$ $\wedge\ f_i^{C_2}\left(\beta_1 \wedge f_i^{C_1}(\beta(X)),\dots,\beta_{i-1} \wedge f_{i-1}^{C_1}(\beta(X)),\ \beta_{i+1} \wedge f_{i+1}^{C_1}(\beta(X)),\dots,\beta_n \wedge f_n^{C_1}(\beta(X))\right)$, звідки випливає (1.3.6).♦

Установимо взаємозв'язок між властивостями функцій і результатів операцій над ними.

Теорема 1.3.6. Нехай C_1 і C_2 – нормальні функції вибору. Тоді $C_1 \cap C_2$ – також нормальна функція вибору.

Доведення. Нехай $C_1 = C^{R_1}$, $C_2 = C^{R_2}$. Доведемо, що $C_1 \cap C_2 = C^{R_1 \cup R_2}$. Нехай $X \subseteq \Omega$, $x \in C_1(X) \cap C_2(X)$. Тоді з визначення "блокування" маємо:

$$\text{для } \forall\, y \in X,\ y\bar{R}_1 x,\ y\bar{R}_2 x \text{ або } y\left(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2\right)x \qquad (1.3.7).$$

Застосовуючи правило де Моргана:

$$y\left(\overline{R_1 \cap R_2}\right)x, \qquad (1.3.8)$$

звідки $C_1(X) \cap C_2(X) \subseteq C^{R_1 \cup R_2}(X)$. Навпаки, нехай $x \in C^{R_1 \cup R_2}(X)$. Тоді для всіх $y \in X$ виконано (1.3.8), звідки випливає (1.3.7), тобто $x \in C_1(X) \cap C_2(X)$. ♦

Коли ОПР здійснює вибір, він природно хотів би, щоб його результат задовольняв певним "розумним" умовам (наприклад, краща група на курсі повинна бути кращою на своїй спеціальності). Функції, які задовольняють певній умові, утворюють деякий "клас функцій, що задовольняють цій умові". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору.

1. Умова *спадковості* (СП): $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1 \cap C(X_2) \subseteq C(X_1)$.

2. Умова *незалежності від відкинутих альтернатив* (умова Неша – Н): $C(X_2) \subseteq X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C(X_1) = C(X_2)$.

3. Умова *згоди* (З): $\bigcap\limits_k C(X_k) \subseteq C\left(\bigcup\limits_k X_k\right)$.

4. Умова *незалежності вибору від шляху* (умова Плотта – КС (квазісуматорність)): $C\left(\bigcup\limits_k X_k\right) = C\left(\bigcup\limits_k C(X_k)\right)$.

5. Умова *суматорності* (СМ): $C\left(\bigcup\limits_k X_k\right) = \bigcup\limits_k C(X_k)$.

6. Умова *мультиплікаторності* (МП): $C\left(\bigcap\limits_k X_k\right) = \bigcap\limits_k C(X_k)$.

7. Умова *монотонності* (М): $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C(X_1) \subseteq C(X_2)$.

Зміст умов 1–7 очевидний. Кожна з них визначає деякий клас функцій вибору, що задовольняють даній умові. За цими класами збережемо позначення відповідних умов і розглянемо, яким умовам повинні задовольняти логічні форми функцій вибору C.

Теорема 1.3.7. Функція вибору C є:

1) спадковою; 2) незалежною від відкинутих альтернатив; 3) що задовольняє умові згоди; 4) квазісуматорною; 5) суматорною; 6) мультиплікаторною; 7) монотонною; тоді і лише тоді, коли для $\forall\ i = \overline{1,n}$:

1) $\beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i\left(\beta^1\right) \ge f_i\left(\beta^2\right)$;

2) $\beta_i^2 \wedge f_i\left(\beta^2\right) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^2 \wedge f_i\left(\beta^2\right) = \beta_i^1 \wedge f_i\left(\beta^1\right)$;

3) $\underset{k}{\wedge} f_i\left(\beta^k\right) \le f_i\left(\underset{k}{\vee}\beta^k\right)$;

Розглянемо випадок $n = 2$:

4) $\left(\beta_i^1 \vee \beta_i^2\right) \wedge f_i\left(\beta^1 \wedge \beta^2\right) = \left(\beta_i^1 \wedge f_i\left(\beta^1\right)\right) \vee \left(\beta_i^2 \wedge f_i\left(\beta^2\right)\right) \wedge$

$f_i\left(\left(\beta_1^1 \wedge f_1\left(\beta^1\right)\right) \vee \left(\beta_1^2 \wedge f_1\left(\beta^2\right)\right), \ldots, \left(\beta_n^1 \wedge f_n\left(\beta^1\right)\right) \vee \left(\beta_n^2 \wedge f_n\left(\beta^2\right)\right)\right)$;

5) $f_i(\beta) \equiv 0 \vee f_i(\beta) \equiv 1$;

6) $f_i\left(\underset{k}{\wedge}\beta^k\right) = \underset{k}{\wedge} f_i\left(\beta^k\right)$;

7) $\beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i\left(\beta^1\right) \le f_i\left(\beta^2\right)$.

Доведення безпосередньо випливає із представлення відповідних умов із допомогою булевих функцій, що утворюють логічну форму. Для прикладу наведемо доведення умови 1. Із умови спадковості отримуємо: $\beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow \beta_i^1 \wedge \left(\beta_i^2 \wedge f_i\left(\beta^2\right)\right) \le \beta_i^1 \wedge f_i\left(\beta^1\right)$. Якщо $\beta_i^1 = 0$, то маємо тотожність $0 \equiv 0$, якщо $\beta_i^1 = 1$, то $\beta_i^2 = 1$ і маємо нерівність: $f_i\left(\beta^2\right) \le f_i\left(\beta^1\right)$. ♦

Клас нормальних функцій вибору N описується такою теоремою.

Теорема 1.3.8. Функція вибору C на $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ є нормальною тоді і лише тоді, коли існує розбиття множини індексів елементів $N = \left\{\overline{1,n}\right\}$ на три підмножини J, J_0, J_1 (деякі з них можуть бути порожніми) такі, що:

$$\forall\ i \in J\ \ \exists J_i \subseteq J,\ J_i \ne \varnothing:\ f_i = \underset{k \in J_i}{\wedge} \overline{\beta}_k;$$

$$\forall\ i \in J_0:\ f_i \equiv 0;$$

$$\forall\ i \in J_1:\ f_i \equiv 1.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $C \in N$, тобто $\exists R \subseteq \Omega^2:\ C = C^R$. Для $\forall\ x_i$ можлива одна з трьох ситуацій:

$$\exists i_1,\dots,i_l \in N:\ x_{i_s}Rx_i,\ i_s \neq i,\ s=\overline{1,l},\ y\bar{R}x,\ y \notin \{x_{i_1},\dots,x_{i_l}\};$$
$$x_iRx_i;$$
$$R^+(x_i)=\varnothing.$$

Утворимо множину J з індексів, що відносяться до першої ситуації, множину J_0 – до другої, множину J_1 – до третьої. Очевидно, що множини утворюють необхідне розбиття.

Достатність. Визначимо $R \subseteq \Omega^2$ так: x_jRx_i для $\forall\ i \in J$ і $\forall\ j \in J_i$; x_iRx_i для $\forall\ i \in J_0$. Очевидно, що $C=C^R$. ♦

Розглянемо деякі властивості функцій вибору, які є природним узагальненням властивостей бінарних відношень.

Функція вибору C називається:

✓ *рефлексивною*, якщо $C(\{x_i\})=\varnothing$ для $\forall x_i \in \Omega$;

✓ *антирефлексивною*, якщо $C(\{x_i\}) \neq \varnothing$ для $\forall x_i \in \Omega$;

✓ *повною*, якщо $C(X)\neq\varnothing$, для $\forall\ X \neq \varnothing$;

✓ *транзитивною*, якщо з умови: $C(X_1 \cup X_2)=C(X_1)\neq\varnothing$, $C(X_2 \cup X_3)=C(X_2)\neq\varnothing$ випливає $C(X_1 \cup X_3)=C(X_1)\ \forall\ X_1,\ X_2,\ X_3$;

✓ *ациклічною*, якщо з умови: $C(X_k \cup X_{k+1})=C(X_k)\neq\varnothing$, $k=\overline{1,n-1}$, випливає: $X_1 \neq X_n$ для $\forall\ X_k$, $k=\overline{1,n}$.

Проілюструємо змістовно умови транзитивності й ациклічності (зміст умов 1–3 очевидний).

Нехай за результатами сесії серед студентів групи *А* і *В* кращими виявились два студенти групи *А*, кращими серед студентів *В* і *С* – 3 студенти з групи *В*. Тоді кращими серед студентів групи *А* і *С* будуть вказані студенти з групи *А*, при цьому вони будуть кращими і серед усіх трьох груп. Відповідна функція вибору ("кращими є студенти з максимальною сумою балів на іспитах") є транзитивною.

Нехай тепер знову кращими серед студентів груп *А* і *В* визнано 2 студенти з групи *А*. Нехай далі взяли залікові книжки студентів однієї з груп *А* або *С* (позначимо цю групу через *X*). Тоді, якщо серед студентів груп *В* і *X* стали три студенти з групи *В*, то зрозуміло, що група *X* не є групою *А*. Відповідна функція вибору ациклічна.

Розглянуті властивості у термінах властивостей логічних форм описуються такою теоремою.

Теорема 1.3.9. Функція вибору C є: 1) рефлексивною; 2) антирефлексивною; 3) повною; 4) транзитивною; 5) ациклічною тоді і лише тоді, коли для $\forall\ i=\overline{1,n}$:

1) $f_i(0,\dots,0)=0$; 2) $f_i(0,\dots,0)=1$; 3) $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} f_i(\beta)=1$ для $\forall\,\beta$;

4) $(\beta_i^1\vee\beta_i^2)f_i(\beta_i^1\vee\beta_i^2)=\beta_i^1 f_i(\beta^1)$, $(\beta_i^2\vee\beta_i^3)f_i(\beta_i^2\vee\beta_i^3)=\beta_i^2 f_i(\beta^2)$,

$\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}\beta_i^1 f_i(\beta^1)=\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}\beta_i^2 f_i(\beta^2)=1 \;\Rightarrow\; (\beta_i^1\vee\beta_i^3)f_i(\beta_i^1\vee\beta_i^3)=\beta_i^1 f_i(\beta^1)$;

5) $(\beta_i^k\vee\beta_i^{k+1})f_i(\beta_i^k\vee\beta_i^{k+1})=\beta_i^k f_i(\beta^k)$, $i=\overline{1,n}$, $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}\beta_i^k f_i(\beta^k)=1$, $k=\overline{1,n-1}\Rightarrow\beta^1\neq\beta^n$.

Розглянемо деякі взаємозв'язки між нормальними функціями вибору, що мають вказані властивості, і бінарними відношеннями з аналогічними властивостями, що їх породжують.

Теорема 1.3.10. Якщо відношення *R*: а) транзитивне; б) ациклічне, то функція вибору C_R є: а) транзитивною; б) ациклічною.

Доведення. а) Нехай $C_R(X\cup Y)=C_R(X)\neq\varnothing$. Це означає: $\forall\,x\in C_R(X)$, $\forall\,y\in Y$: xRy. Аналогічно, $C_R(Y\cup Z)=C_R(Y)\neq\varnothing \Leftrightarrow$ $\forall\,y\in C_R(Y)$, $\forall\,z\in Z$: yRz. У силу транзитивності *R* це означає, що $\forall\,x\in C_R(X)$, $\forall\,z\in Z$: xRz, тобто $C_R(X)\subseteq C_R(X\cup Z)$. Звідси випливає, що $\forall\,x\in X\setminus C_R(X) \Rightarrow x\notin C_R(X\cup Z)$. Нехай $z\in Z\setminus X$ і $z\in C_R(X\cup Z)$. Тоді $\forall\,x\in X$, zRx і, отже, $\forall\,y\in Y$, zRx, тобто $z\in C_R(Y\cup Z)$. Це означає, що $z\in C_R(Y)\subseteq Y$, звідки yRx для $\forall\,x\in X$, що суперечить $C_R(X\cup Y)=C_R(X)$.

б) Нехай $C(X_k\cup X_{k+1})=C(X_k)\neq\varnothing$, $k=\overline{1,n-1}$, і $X_N=X_1$. Це означає, що існують $x_i\in X_i$, $i=\overline{1,n}$, такі, що x_iRx_{i+1}, $i=\overline{1,n-1}$, і x_nRx_1, що суперечить ациклічності *R*.♦

Теорема 1.3.11. Якщо *R* – антирефлексивне і C^R – транзитивна функція вибору, то відношення *R* транзитивне.

Доведення. Нехай C^R транзитивна, xRy, yRz. Тоді $C(x,y)=x$, $C(y,z)=y$, значить, $C(x,z)=x$, тобто xRz і відношення *R* транзитивне.♦

Теореми 1.3.9 і 1.3.11 дозволяють використовувати апарат логічних форм функцій вибору при вивченні класів функцій вибору.

Теорема 1.3.12. Функція вибору нормальна тоді й лише тоді, коли вона належить перетину класів спадковості та згоди ($N=\text{СП}\cap\text{З}$).

Доведення. У силу умов 1 і 3 теореми 1.3.7 і теореми 1.3.8 достатньо довести, що булева функція $g(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ задовольняє одночасно умовам 1 і 3 теореми 1.3.7 тоді й лише тоді, коли вона задовольняє умові теореми 1.3.8.

Необхідність. Нехай g задовольняє умові 3. Тоді при $g \not\equiv 0$:

$$g\left(\alpha^s\right)=1,\ s=\overline{1,k} \Rightarrow\ g\left(\underset{s=1}{\overset{k}{\vee}}\alpha^s\right)=1. \tag{1.3.9}$$

Знайдемо вид функції g, для чого запишемо її розвинення у досконалу диз'юнктивну нормальну форму: $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=\underset{p=1}{\overset{d}{\vee}}\alpha_1^{\sigma_1^p}\ldots\alpha_r^{\sigma_r^p}$. Розіб'ємо $J=\left\{\overline{1,r}\right\}$ на дві підмножини: $J^-=\left\{i \middle| g(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=1\right\}$, $J^+=\left\{i \middle| \exists\alpha^*=\left(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_{i-1}^*,1,\alpha_{i+1}^*,\ldots,\alpha_r^*\right): g\left(\alpha^*\right)=1\right\}$. Нехай $J^+=\left\{\overline{1,q}\right\}$. Тоді $g(\alpha)=\varphi\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_q\right)\wedge\left(\underset{t=q+1}{\overset{r}{\wedge}}\bar{\alpha}_t\right)$, де $\varphi\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_q\right)=\underset{p=1}{\overset{d}{\vee}}\alpha_1^{\sigma_1^p}\ldots\alpha_q^{\sigma_q^p}$.

Доведемо, що $\phi\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_q\right)=1$, тобто g задовольняє умові 1 (при $J^-\neq\varnothing$) або 3 (при $J^-=\varnothing$) теореми 1.3.8. Припустимо протилежне – нехай існує набір $\bar{\alpha}=\left(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{a}_q,0,\ldots,0\right)$ такий, що $g(\bar{\alpha})=\phi\left(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{a}_q\right)=0$. Із визначення J^+ випливає, що для $i=\overline{1,q}$ існує набір $\alpha^*(i)$ такий, що $g\left(\alpha^*(i)\right)=1$ і $a_i^*(i)=1$. Зрозуміло, що $\bar{\bar{\alpha}}=\underset{i=1}{\overset{q}{\vee}}\alpha^*(i)=(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$, звідки у силу (1.3.9) $g(1,\ldots,1,0,\ldots,0)=1$. Таким чином, $\bar{\alpha}\leq\bar{\bar{\alpha}}$, $g(\bar{\alpha})=0$, $g\left(\bar{\bar{\alpha}}\right)=1$, що суперечить умові 1 теореми 1.3.8. Отже, $g\equiv 0$ і умова 2 теореми 1.3.8 задовольняється.

Достатність. Нехай $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=\underset{s=1}{\overset{l}{\wedge}}\bar{\alpha}_{i_s}$. Тоді функція g відмінна від нуля лише на наборах, у яких $\alpha_{i_s}=0$, $s=\overline{1,l}$. Але диз'юнкція будь-яких таких наборів також має цю властивість, тому умова 3 теореми 1.3.8 виконується. Виконання умови 1 очевидне, оскільки функція $f(\alpha)=\bar{\alpha}_i$ монотонно спадає і, отже, функція g, що дорівнює кон'юнкції $\underset{s=1}{\overset{l}{\wedge}}\alpha_{i_s}$ також монотонно спадає. При $g\equiv 0$ або $g\equiv 1$ умови 1 і 2 також виконуються.♦

Функція вибору C на Ω називається *загальною скалярною* функцією, якщо існує числова функція $g:\ \Omega\to E^1$ така що:

$$C(X)=Arg\max_{x\in\Omega}g(x), \tag{1.3.10}$$

і називається *скалярною*, якщо $g(x)\neq g(y)$ при $x\neq y$.

Теорема 1.3.13. Функція вибору C є загальною скалярною функцією вибору тоді і лише тоді, коли вона породжується сильно транзитивним антирефлексивним бінарним відношенням.

Доведення. *Необхідність*. Нехай C – загальна скалярна функція. Покладемо $\Omega_1 = \operatorname{Arg}\max\limits_{\Omega} g$, $\Omega_2 = \operatorname{Arg}\max\limits_{\Omega\backslash\Omega_1} g, \ldots,$ $\Omega_k = \operatorname{Arg}\max\limits_{\Omega\backslash\bigcup_{i=1}^{k-1}\Omega_i} g =$ $= \operatorname{Arg}\min\limits_{\Omega} g$. Ясно, що $\Omega_1,\ldots,\Omega_k$ утворюють розбиття Ω. Визначимо на Ω бінарне відношення R так: $aRb \Leftrightarrow a \in \Omega_i$, $b \in \Omega_j$ та $i < j$. У силу (1.3.10) $C^R = C$. Сильна транзитивність побудованого відношення R випливає з теореми 1.2.1. Необхідність доведено.

Достатність. Структура сильно транзитивних відношень встановлена теоремою 1.2.1. Нехай $\Omega_1,\ldots,\Omega_k$ – розбиття Ω. Покладемо $g(x) = k - i$, якщо $x \in \Omega_i$. Функція вибору C^R, очевидно, збігається з функцією C, що побудована за формулою (1.3.10). Достатність доведено.♦

Оскільки множина визначення функції вибору скінченна, то для будь-якої загальної функції вибору знайдуться скалярні функції $C_1,\ldots,C_r$ такі, що $C = \bigcup\limits_{i=1}^{r} C_i$ (для цього досить ввести різні функції для збіжних значень – якщо для $x \neq y$ $g(x) = g(y)$, то $C_1(x) = g(x)$, $C_1(y) = \alpha \neq g(x)$, $C_2(x) = \alpha \neq g(y)$, $C_2(y) = g(y)$).

Функція вибору С, що є об'єднанням скалярних, називається сукупно екстремальною (отже, загальна скалярна функція є сукупно екстремальною). Клас сукупно екстремальних функцій позначимо через СЕ. Зміст введеного поняття полягає в такому. На Ω задається r числових функцій (критеріїв) $g_1,\ldots,g_r$. Із кожної множини $X \subseteq \Omega$ спочатку вибираються елементи, що є оптимумами за першим критерієм, потім – за другим і т. д. За вибір береться об'єднання отриманих виборів.

Для будь-якої множини A функцій вибору виділимо підмножину $A^{\overline{\varnothing}} : A^{\overline{\varnothing}} = \left\{ C \in A \middle| \ \forall X \subseteq \Omega,\ X \neq \varnothing :\ C(X) \neq \varnothing \right\}$.

Функція вибору C на Ω називається *паретівською* (П), якщо існують числові функції $g_1,\ldots,g_m$ такі, що:

$$C(X) = \left\{ x \middle| \ \nexists y \in X,\ y \neq x :\ g_i(y) \geq g_i(x),\ i = \overline{1,m} \right\}.$$

Сформулюємо основні теореми про взаємозв'язок класів ФВ.

Теорема 1.3.14. Клас сукупно екстремальних функцій

$$CE = (H \cap C\Pi)^{\overline{\varnothing}} = H^{\overline{\varnothing}} \cap C\Pi^{\overline{\varnothing}}.$$

Теорема 1.3.15. $KC = H \bigcap C\Pi$.

Теорема 1.3.16. $\Pi = \left(H \bigcap C\Pi \bigcap З\right)^{\overline{\varnothing}}$.

У практичних ситуаціях прийняття рішень ОПР при виборі деякої альтернативи з множини Ω керується власним уявленням про "кращі" альтернативи. У різних ОПР в одній і тій самій ситуації (в множині $X \subset \Omega$) уявлення про кращі альтернативи можуть відрізнятися, при цьому кожна з них може привести цілком розумне пояснення зробленого вибору. Навіть при виборі одних і тих самих альтернатив різними ОПР обґрунтування вибору в конкретній ситуації може мати відмінності. Таким чином, за відомим вибором у конкретній ситуації X навряд чи можна відновити логіку вибору ОПР, тобто передбачити її вибір у множині $Y \subset \Omega, Y \neq X$. Але в цьому випадку логіку вибору ОПР не можна визнати коректною "в цілому", глобально (не можна в певних ситуаціях притримуватись певних моральних принципів, в інших – ні, тобто змінювати свої принципи під впливом ситуації). Аналіз функцій вибору якраз і дає розуміння логіки вибору ОПР у будь-яких ситуаціях (множинах $X \subset \Omega$), описує правила "розумного" вибору ОПР глобально, на всій множині вибору. Так, якщо ОПР здаються логічними умови спадковості (СП), незалежності від відкинутих альтернатив (Н), згоди (З), то моделювання її вибору "адекватно" реалізується за допомогою задачі багатокритеріальної оптимізації (див. теорему 1.3.16 і Розділ 4, § 3 – "Методи багатокритеріальної оптимізації").

Контрольні завдання до § 3

1. Скільки існує різних бінарних відношень, різних функцій вибору на множині з двох елементів?

2. Довести теореми 1.3.14 – 1.3.16.

3. Побудувати логічну форму функції вибору для $\Omega = \{x, y, z\}$:

$C\ (x) = x$, $C\ (x,y) = y$, $C\ (\Omega) = z$, для інших $X : C\ (X) = \varnothing$;

$C\ (x) = x$, $C\ (x,y) = x$, $C\ (\Omega) = y$, для інших $X : C\ (X) = \varnothing$;

$C\ (z) = z$, $C\ (x,z) = z$, $C\ (\Omega) = z$, для інших $X : C\ (X) = \varnothing$;

$C\ (x) = x$, $C\ (x,y) = \{x,y\}$, $C\ (\Omega) = \{x,z\}$, для інших $X : C\ (X) = \varnothing$;

4. За логічною формою відновити функції вибору:

$f_1(\gamma_1,\gamma_2) = \gamma_1$, $f_2(\gamma_1,\gamma_2) = \gamma_2$, $f_3 \equiv 0$; $f_1(\gamma_1,\gamma_2) = \gamma_1 \wedge \gamma_2$, $f_2 \equiv 0$, $f_3 \equiv \gamma_1$;

$f_1(\gamma_1,\gamma_2) = \gamma_1 \vee \gamma_2$, $f_2 \equiv 1$, $f_3 \equiv \gamma_2$; $f_1(\gamma_1,\gamma_2) = \gamma_2$, $f_2 = \gamma_1$, $f_3 \equiv \gamma_1$.

5. Дослідити функції вибору з п. 3, п. 4 на належність до класів спадковості, Неша, згоди.