~~**Контрольні завдання до § 1**~~

~~1. Визначте мету свого життя на наступний тиждень, місяць, рік (можна й більше).~~

~~2. Які засоби отримання позитивної оцінки на іспиті з курсу "Теорія прийняття рішень" для вас є допустимими (можливими, бажаними) – регулярне відвідування лекцій, своєчасне виконання лабораторних робіт, відвідування консультацій викладача, "використання інтелекту" сусіда на контрольних роботах і т. п.~~

~~3. Конкретизуйте мету "щастя всього людства" (на ваш погляд) і визначте допустимі для вас засоби її досягнення.~~

~~4. Як ви інтерпретуєте вислів Ф. Ніцше "хочеш бути щасливим – не мрій".~~

~~5. Оцініть засоби досягнення мети "вироблення комуністичного людства" за М. Бухаріним: "Пролетарське присилування в усіх формах, починаючи від розстрілів і закінчуючи трудовою повинністю, є, як не парадоксально звучить, засобом вироблення комуністичного людства з людського матеріалу капіталістичної епохи".~~

~~6. Прокоментувати вислів: "Вибирай цілі, враховуючи засоби".~~

~~7. Запропонуйте цікаві й корисні приклади, аналогічні описаним табл. 1.1.1–1.1.5, які б можна було б навести в наступних виданнях посібника (з посиланням на автора прикладу – див. Розділ 3, § 3).~~

§ 2. Бінарні відношення

Нехай задана множина альтернатив (об'єктів) Ω, принцип оптимальності безпосередньо у числовій формі не задано, але експерт для деяких пар об'єктів може вказати, який з об'єктів пари кращий (переважає) за іншого. У цьому випадку говоритимемо, що ці два об'єкти знаходяться в бінарному відношенні. Оскільки, з одного боку, народна мудрість говорить: "Усе пізнається у порівнянні" (для вибору кращого потрібно порівнювати), з іншого – найпростіше порівнювати два об'єкти (ще одна народна мудрість: "У трьох соснах заблукав"), бінарні відношення широко використовуються у теорії прийняття рішень.

Бінарним відношенням R на множині Ω називається довільна підмножина R декартового добутку $\Omega\times\Omega$ (нагадаймо, що декартовим добутком двох множин A і B називається множина пар елементів (a,b), де $a\in A$, $b\in B$). Якщо пара елементів x і y знаходиться в бінарному відношенні R, то будемо позначати цей факт як $(x,y)\in R$ або xRy. Якщо потрібно вказати множину Ω, на якій задано бінарне відношення R, то будемо писати $R(\Omega)$ або (R,Ω).

Крім безпосереднього задання всіх пар, для яких виконується відношення *R*, існує три основних способи задання відношень: матрицею, графом, перетинами.

Нехай множина Ω містить *n* елементів: $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Тоді матриця бінарного відношення $A(R)$ задається елементами a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$: $a_{ij}(R) = 1$, якщо $x_i R x_j$; $a_{ij}(R) = 0$, якщо не виконується $x_i R x_j$. З іншого боку, якщо задана матриця *A* розміром $n \times n$ із нулів й одиниць і вибрано нумерацію елементів множини Ω, що складається з *n* елементів, то тим самим на Ω задається деяке відношення $R = R(A)$ таке, що $x_i R x_j$, виконано тоді й лише тоді, коли $a_{ij}(R) = 1$.

Задання бінарного відношення *R* графом здійснюється так. Елементам скінченої множини $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (при деякій нумерації) ставиться у взаємно-однозначну відповідність вершини графа *G*. Проведемо дугу від вершини x_i до вершини x_j тоді і лише тоді, коли виконується $x_i R x_j$ (при $i = j$ дуга (x_i, x_j) перетворюється у петлю при вершині x_i).

Якщо задано довільний граф *G* із *n* вершинами й обрано нумерацію на множині Ω, то тим самим на Ω задається деяке відношення $R = R(\Omega)$ таке, що $x_i R x_j$ виконується тоді і лише тоді, коли у графі *G* є дуга (x_i, x_j). Граф є геометричним представленням відношення аналогічно тому, як графік є геометричним представленням функції. Геометрична мова корисна, якщо граф достатньо простий. Навпаки, вивчати й описувати складні графи з великою кількістю вершин часто зручно у термінах відношень.

Оскільки у багатьох практичних випадках ЗПР кількість альтернатив скінченна (або стає скінченною після попереднього аналізу інформації), то попередні способи задання бінарного відношення широко використовуються (особливо наочним є задання графом).

Універсальним способом задання відношень (зокрема, на нескінченних областях) є задання за допомогою перетинів.

Верхнім перетином $R^+(x)$ називається множина елементів $y \in \Omega$ таких, що $(y, x) \in R$: $R^+(x) = \{y \in \Omega : (y, x) \in R\}$. Аналогічно задається *нижній перетин*: $R^-(x) = \{y \in \Omega : (x, y) \in R\}$.

Відношення називається *порожнім* і позначається $\varnothing$, якщо воно не виконується ні для однієї пари $(x, y) \in \Omega^2 \equiv \Omega \times \Omega$. Для порожнього відношення справедливо:

✓ при заданні матрицею $a_{ij}(\varnothing)=0$ для всіх *i*, *j*;

✓ граф $G(\varnothing)$ не має дуг;

✓ $R^+(x)=R^-(x)=\varnothing$ для будь-якого x (далі будемо позначати: $\forall\ x\in\Omega$).

Відношення *U* називається *повним*, якщо $U=\Omega^2$ (воно виконується для всіх пар $(x,y)\in\Omega^2$). Для повного відношення *U* справедливо:

✓ $a_{ij}(U)=1$ для $\forall$ *i*, *j*;

✓ граф $G(U)$ містить усі дуги та всі петлі;

✓ $R^+(x)=R^-(x)=\Omega$ для $\forall\ x\in\Omega$.

Відношення *E* називається *діагональним* (або відношенням рівності або одиничним відношенням), якщо *xEy* тоді і лише тоді, коли $x=y$ (позначатимемо: $xEy \Leftrightarrow\ x=y$). Для діагонального відношення виконується:

✓ $a_{ij}(E)=1$ при $i=j$; $a_{ij}(E)=0$ при $i\neq j$;

✓ граф $G(E)$ має петлі при всіх вершинах, інші дуги відсутні;

✓ $R^+(x)=R^-(x)=\{x\}$ для $\forall\ x\in\Omega$.

Відношення $\bar{E}$ називається *антидіагональним*, якщо $x\bar{E}y \Leftrightarrow x\neq y$. Для антидіагонального відношення $\bar{E}$ виконується:

✓ $a_{ij}(\bar{E})=0$ при $i=j$; $a_{ij}(\bar{E})=1$ при $i\neq j$;

✓ граф $G(\bar{E})$ має всі дуги, петлі відсутні;

✓ $R^+(x)=R^-(x)=\Omega\setminus\{x\}$ для $\forall\ x\in\Omega$.

Нагадаємо основні операції над відношеннями, вважаючи, що всі вони задані на одній і тій самій множині Ω.

Відношення R_1 і R_2 *рівні* ($R_1=R_2$), якщо $xR_1y \Leftrightarrow xR_2y$, $\forall\ (x,y)\in R_1,R_2$.

Відношення R_1 *вкладається* у відношення R_2 (позначається $R_1\subseteq R_2$), якщо з xR_1y випливає xR_2y.

Відношення R_1 *строго вкладається* у відношення R_2 ($R_1\subset R_2$), якщо $R_1\subseteq R_2$ і $R_1\neq R_2$.

Очевидно, що з $R_1\subseteq R_2$ випливає $a_{ij}(R_1)\le a_{ij}(R_2)$ для $\forall$ *i*,*j*; $R_1^+(x)\subseteq R_2^+(x)$, $R_1^-(x)\subseteq R_2^-(x)$ для $\forall\ x\in\Omega$.

Відношення $\bar{R}$ називається *доповненням* до відношення *R*, якщо $\bar{R} = \Omega^2 \setminus R$, тобто воно виконується для тих і лише тих пар, для яких не виконується відношення *R*. Очевидно, що:

✓ $a_{ij}\left(\bar{R}\right) = 1 - a_{ij}\left(R\right)$ для $\forall\, i,j$;

✓ $\bar{R}^{+}\left(x\right) = \Omega \setminus R^{+}\left(x\right)$, $\bar{R}^{-}\left(x\right) = \Omega \setminus R^{-}\left(x\right)$ для $\forall\ x \in \Omega$;

✓ у графі $G\left(\bar{R}\right)$ маються ті і лише ті дуги, котрі відсутні у графі $G\left(R\right)$.

Легко бачити, що $\bar{\varnothing} = U$, $\bar{U} = \varnothing$, антидіагональне відношення $\bar{E}$ є доповненням діагонального відношення *E*.

Загалом $\bar{\bar{R}} = \Omega^2 \setminus \left(\Omega^2 \setminus R\right) = R$.

Перетином відношень R_1 і R_2 (позначається $R_1 \cap R_2$) називається відношення, що визначається перетином відповідних підмножин із Ω^2.

Легко перевірити, що для будь-яких R_1 і R_2:

$a_{ij}\left(R_1 \cap R_2\right) = a_{ij}\left(R_1\right) \wedge a_{ij}\left(R_2\right)$ для $\forall\, i,j$, де $\wedge$ – знак кон'юнкції;

$\left(R_1 \cap R_2\right)^{+}\left(x\right) = R_1^{+}\left(x\right) \cap R_2^{+}\left(x\right)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Аналогічно визначається *об'єднання* $R_1 \cup R_2$, для якого справедливо:

$a_{ij}\left(R_1 \cup R_2\right) = a_{ij}\left(R_1\right) \vee a_{ij}\left(R_2\right)$ для $\forall\, i,j$, де $\vee$ – знак диз'юнкції;

$\left(R_1 \cup R_2\right)^{-}\left(x\right) = R_1^{-}\left(x\right) \cup R_2^{-}\left(x\right)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Оберненим до відношення *R* називається відношення R^{-1}, що визначається умовою: $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$.

Очевидно, що для оберненого відношення R^{-1} виконується:

✓ $a_{ij}\left(R^{-1}\right) = a_{ji}\left(R\right)$ для $\forall\, i,j$;

✓ граф $G\left(R^{-1}\right)$ отримують із графа *G(R)* зміною направлення всіх дуг (зокрема петлі залишаються, нові не додаються);

✓ $\left(R^{-1}\right)^{+}\left(x\right) = R^{-}\left(x\right)$, $\left(R^{-1}\right)^{-}\left(x\right) = R^{+}\left(x\right)$.

Оскільки за визначенням $x\left(R^{-1}\right)^{-1}y \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$, то $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$. Аналогічно легко показати, що $\left(\overline{R^{-1}}\right) = \left(\bar{R}\right)^{-1}$.

Двоїстим до R називається відношення $R^d = \left(\overline{R^{-1}}\right)$ або, у силу попереднього, $R^d = \left(\bar{R}\right)^{-1}$. Маємо $\left(R^d\right)^d = \overline{\left(\overline{R^{-1}}\right)^{-1}} = \overline{\left(\left(\bar{R}\right)^{-1}\right)^{-1}} = \bar{\bar{R}} = R$. Використовуючи правило де Моргана, легко показати, що $\left(R_1 \cup R_2\right)^d = R_1^d \cap R_2^d$, $\left(R_1 \cap R_2\right)^d = R_1^d \cup R_2^d$. Для того, щоб перейти від графа $G(R)$ до графа $G\left(R^d\right)$, необхідно:

- ✓ видалити з графа $G(R)$ усі пари протилежних дуг і всі петлі;
- ✓ з'єднати вершини *i, j* дугами (i, j), (j, i), якщо вони не з'єднані у $G(R)$;
- ✓ додати петлі (i, i), які були відсутні у *G(R)*.

Добутком відношень R_1 і R_2 називається відношення $R = R_1 \cdot R_2$, що визначається так: існує $z \in \Omega$ таке, що xR_1z і zR_2y. Для добутку відношень виконується асоціативний закон: $\left(R_1 \cdot R_2\right) \cdot R_3 = R_1 \cdot \left(R_2 \cdot R_3\right)$, тобто добуток $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ визначається однозначно. Зокрема, $R \cdot R \cdot R = R^3$. Легко показати, що матриця добутку відношень $A\left(R_1 \cdot R_2\right) = A\left(R_1\right) \cdot A\left(R_2\right)$, де добуток матриць $A^1 = A\left(R_1\right)$ і $A^2 = A\left(R_2\right)$ визначається формулою: $a_{ik} = \overset{n}{\underset{j=1}{\vee}} \left(a_{ij}^1 \wedge a_{jk}^2\right)$.

Відношення $\left(R_1, \Omega_1\right)$ називається *звуженням* відношення (R, Ω) на множину Ω_1, якщо $\Omega_1 \subseteq \Omega$ і $R_1 = R \cap \Omega_1^2$. Граф $G\left(R_1\right)$ відношення $\left(R_1, \Omega_1\right)$ – це підграф графа $G(R)$, що породжується множиною вершин $\Omega_1 \subseteq \Omega$.

Нехай на множинах Ω_1 та Ω_2 задані відповідні відношення R_1 і R_2. Відношення $\left(R_1, \Omega_1\right)$ і $\left(R_2, \Omega_2\right)$ називаються *ізоморфними*, якщо існує взаємно-однозначне відображення $\phi: \Omega_1 \to \Omega_2$, що $xR_1y \Leftrightarrow \phi(x) R_2 \phi(y)$, ϕ при цьому називається *ізоморфізмом* $\left(R_1, \Omega_1\right)$ і $\left(R_2, \Omega_2\right)$.

Відображення $\phi: \Omega_1 \to \Omega_2$ називається *гомоморфізмом* $\left(R_1, \Omega_1\right)$ у $\left(R_2, \Omega_2\right)$, якщо $xR_1y \Rightarrow \phi(x) R_2 \phi(y)$.

Наведемо основні властивості бінарних відношень, що необхідні для аналізу задач прийняття рішень.

Рефлексивність. Відношення R називається рефлексивним, якщо для $\forall x, xRx$, іншими словами: $E \subseteq R$, де E – діагональне відношення. У матриці $A(R)$ рефлексивного відношення на головній діагоналі стоять одиниці; у графі $G(R)$ при кожній вершині є петля; $x \in R^+(x)$, $x \in R^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Антирефлексивність. Відношення R називається антирефлексивним, якщо з xRy випливає $x \neq y$, іншими словами: $R \subseteq \overline{E}$. У матриці $A(R)$ антирефлексивного відношення на головній діагоналі стоять нулі; у графі $G(R)$ відсутні петлі; $x \notin R^+(x)$, $x \notin R^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$. Легко показати, що якщо відношення R рефлексивне, то R^d антирефлексивне; якщо R – антирефлексивне, то R^d – рефлексивне.

Симетричність. Відношення R називається симетричним, якщо з xRy випливає yRx, іншими словами: $R \subseteq R^{-1}$. Матриця $A(R)$ симетричного відношення R симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall\ i,j$); у графі $G(R)$ разом із кожною дугою (x,y) входить і дуга (y,x); $R^+(x) = R^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$. Із визначення симетричного відношення ($R \subseteq R^{-1}$) випливає, що $R^{-1} \subseteq \left(R^{-1}\right)^{-1} = R$, отже, необхідною й достатньою умовою симетричності відношення є умова $R = R^{-1}$.

Асиметричність. Відношення R називається асиметричним, якщо з xRy випливає $y\bar{R}x$, іншими словами: $R \cap R^{-1} = \varnothing$. У матриці $A(R)$ асиметричного відношення $a_{ij}(R) \wedge a_{ji}(R) = 0$ для $\forall\ i,j$; граф $G(R)$ не може мати одночасно дуг (x,y) і (y,x); для $\forall\ x \in \Omega$ і $\forall\ y \in R^-(x)$, $x \notin R^-(y)$. Якщо відношення R асиметричне, то воно антирефлексивне. Дійсно, нехай для деякого x виконується xRx, тоді $xR^{-1}x$ і $x\left(R \cap R^{-1}\right)x$, тобто $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$, що суперечить асиметричності.

Антисиметричність. Відношення R називається антисиметричним, якщо з xRy і yRx випливає $x = y$ або $R \cap R^{-1} \subseteq E$. У матриці $A(R)$ антисиметричного відношення для $i \neq j$, $a_{ij}(R) \wedge a_{ji}(R) = 0$; граф $G(R)$ не може містити одночасно дуги (x,y) і (y,x) при $x \neq y$; для $\forall\ x \in \Omega$ і $y \in R^-(x)$, $x \neq y$, $x \notin R^-(y)$.

Транзитивність. Відношення R називається транзитивним, якщо з xRz і zRy випливає xRy або $R^2 \subseteq R$. У матриці $A(R)$ транзитивного відношення для $\forall\, i,\, k$ $\overset{n}{\underset{j=1}{\vee}}\left(a_{ij}(R) \wedge a_{ik}(R)\right) \leq a_{ik}(R)$; у графі $G(R)$ існує дуга (x,y), якщо існує шлях із x в y; для $\forall\, x \in \Omega$ і $y \in R^+(x)$ $R^+(y) \subseteq R^+(x)$. За індукцією для транзитивного відношення R маємо: із xRz_1, z_1Rz_2, ..., $z_{k-1}Ry$ випливає xRy. Якщо транзитивне відношення R є рефлексивним, то $E \subseteq R$, звідки $E \cdot R \subseteq R \cdot R$, отже, $R = R^2$.

Ациклічність. Відношення R називається ациклічним, якщо з xRz_1, $z_1Rz_2, \ldots,$ $z_{k-1}Ry$ випливає $x \neq y$. Не важко показати, що ациклічне відношення асиметричне; антирефлексивне транзитивне відношення є ациклічним. Якщо точки x і y у графі ациклічного відношення з'єднані шляхом, то у ньому немає дуги (y,x); якщо $z_1 \in R^-(x)$, $z_2 \in R^-(z_1)$, ..., $y \in R^-(z_{k-1})$, то $x \notin R^-(y)$ (аналогічні співвідношення виконуються для верхніх перерізів). Ациклічність і транзитивність відношень особливо важливі у теорії вибору та прийняття рішень, оскільки ці властивості виражають деякі природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт x у якомусь розумінні кращий за z, об'єкт z кращий за y, то природно вважати, що y не кращий за x (ациклічність), а в деяких випадках x буде кращим за y (транзитивність).

Негативна транзитивність. Відношення R називається негативно транзитивним, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

Сильна транзитивність. Відношення R називається сильно транзитивним, якщо воно одночасно транзитивне і негативно транзитивне. Структуру сильно транзитивних відношень визначає така теорема.

Теорема 1.2.1. Нехай (R,Ω) – сильно транзитивне відношення на Ω, $|\Omega| < \infty$. Тоді існує розбиття $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$ таке, що: xRy, $x \in \Omega_i$, $y \in \Omega_j$, $i < j$; звуження відношення R на будь-яке із Ω_i є або порожнім або повним на Ω_i.

Зв'язність. Відношення R називається зв'язним, якщо виконується $(xRy \vee yRx) \vee (xRy \wedge yRx)$, тобто між будь-якими вершинами x і y існують дуги (зокрема, петлі).

Використаємо розглянуті властивості для виділення відношень, важливих для теорії вибору та прийняття рішень.

Відношення еквівалентності (еквівалентність). Відношення R називається відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне (позначення "$\cong$"). Нехай задано розбиття $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$, при $i \neq j$. Введемо на Ω таке відношення R: xRy тоді і лише тоді, коли існує підмножина Ω_i, що містить x і y. Легко перевірити, що задання еквівалентності на деякій підмножині Ω рівносильне розбиттю на класи еквівалентних один одному елементів. Навпаки, будь-яке розбиття Ω визначає відповідну йому еквівалентність.

Відношення нестрогого порядку (нестрогий порядок). Відношення R називається відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне (позначення – "$\underline{\prec}$").

Відношення строгого порядку (строгий порядок). Відношення R називається відношенням строгого порядку, якщо воно антирефлексивне, асиметричне і транзитивне (позначення – "$\prec$"). Якщо $\underline{\prec}$ – нестрогий порядок на Ω, то йому можна зіставити строгий порядок $\prec$, що визначається так: $x \prec y \Leftrightarrow x \underline{\prec} y \wedge x \neq y$. Навпаки, якщо $\prec$ – строгий порядок на Ω, то йому можна зіставити нестрогий порядок $\underline{\prec}$ так: $x \underline{\prec} y \Leftrightarrow x \prec y \vee x = y$. Отже, нестрогому порядку однозначно відповідає строгий порядок (і навпаки). Тому за основу береться нестрогий порядок, який називається частковим порядком.

Відношення включення (підпорядкованості). Нехай на множині $B(\Omega)$ всіх підмножин фіксованої множини Ω задане відношення R так: $XRY \Leftrightarrow X \subseteq Y$. Таке відношення є частковим порядком, про що свідчить така теорема.

Теорема 1.2.2. Довільний частковий порядок на множині Ω ізоморфний звуженню відношення "включення" на деяку підмножину $B(\Omega)$, тобто існує таке відображення $\Theta: \ \Omega \to B(\Omega)$, що $x \underline{\prec} y \Leftrightarrow \Theta(x) \underline{\prec} \Theta(y)$.

Відношення лінійного порядку (лінійний порядок). Частковий порядок на Ω називається лінійним порядком, якщо він задовольняє умові зв'язності, тобто виконується одна з трьох умов: $x \prec y$, $x = y$, $x \succ y$.

Відношення домінування (домінування). Відношення R називається домінуванням, якщо воно антирефлексивне й асиметричне. Отже, строгий частковий порядок – це частинний випадок відношення домінування (з додатковою властивістю транзитивності).

Відношення подібності (толерантність). Відношення R називається відношенням подібності, якщо воно рефлексивне й симетричне (позначення – "$\approx$"). Отже, *еквівалентність* – частинний випадок подібності (з додатковою властивістю транзитивності).

Відношення нестрогої переваги (перевага). Відношення "$\geq$" називається перевагою, якщо воно задовольняє властивості рефлексивності.

Отже, відношення подібності, у свою чергу, є частинним випадком відношення переваги. Рефлексивність відношень нестрогої переваги відображає той природний факт, що будь-яка альтернатива є не гіршою за себе. У свою чергу, можна узагальнити відношення часткового порядку (строгого часткового порядку), відмовившись від властивості антисиметричності (асиметричності), отримавши відношення *квазіпорядку (строгого квазіпорядку)*. Відмітимо, що відношення строгого квазіпорядку і строгого часткового порядку співпадають, оскільки з антирефлексивності та транзитивності випливає асиметричність: якщо $xRy \wedge yRx$, то xRx (із транзитивності), що невірно (R – антирефлексивне). Отже, одне з відношень xRy або yRx не виконується, тобто R – асиметричне.

Введені відношення зведемо у табл. 1.2.1.

Таблиця 1.2.1

№	Властивість / Назва	Рефлексивність	Антирефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Антисиметричність	Транзитивність	Зв'язність
1	Перевага	*						
2	Подібність (толерантність)	*		*				
3	Еквівалентність	*		*			*	
4	Квазіпорядок	*					*	
5	Впорядкування	*					*	*
6	Частковий порядок	*				*	*	
7	Лінійний порядок	*				*	*	*
8	Строгий квазіпорядок		*				*	
9	Строгий порядок		*			*	*	
10	Домінування		*		*			
11	Строгий частковий порядок		*		*		*	
12	Строгий лінійний порядок		*		*		*	*

Якщо принципи оптимальності (Блок 4 у схемі ЗЗПР) задаються бінарним відношенням, то відповідним чином здійснюється структурування множини альтернатив (Блок 5):

✓ розбиття на класи (наприклад, використовуючи теореми 1.2.1, 1.2.2);

✓ упорядкування (за відповідними відношеннями порядку).

Вибір кращого (кращих) елементів множини здійснюється за допомогою поняття R-оптимальності.

Визначення R-максимуму (мінімуму). Елемент $x \in \Omega$ називається максимумом за відношенням R (R-максимумом), якщо xRy для $\forall\, y \in \Omega$. Аналогічно визначається R-мінімум x: yRx для $\forall\, y \in \Omega$. R-максимуми і R-мінімуми можуть як існувати, так і не існувати, у випадку існування можуть бути не єдиними. Так, для відношення "більше або рівне" на множині дійсних чисел не існує ні максимуму, ні мінімуму.

Визначення R-мажоранти (міноранти). Елемент $x \in \Omega$ називається мажорантою за відношенням R (R-мажорантою), якщо $y\bar{R}x$ для $\forall\, y \in \Omega$. Аналогічно визначається R-міноранта $x \in \Omega$: $x\bar{R}y$ для $\forall\, y \in \Omega$. Позначимо через $\Omega^+(R)$ множину R-максимумів, $\Omega_+(R)$ – R-мажорант, $\Omega^-(R)$ – R-мінімумів, $\Omega_-(R)$ – R-мінорант.

Теорема 1.2.3. $\Omega^+(R) = \Omega^-\left(R^{-1}\right)$, $\Omega^-(R) = \Omega^+\left(R^{-1}\right)$, $\Omega_+(R) = \Omega_-\left(R^{-1}\right)$, $\Omega_-(R) = \Omega_+\left(R^{-1}\right)$.

Доведення. Доведемо першу нерівність (інші – аналогічно). Нехай $x \in \Omega^+(R) \Leftrightarrow xRy,\ \forall\, y \in \Omega \Leftrightarrow yR^{-1}x,\ \forall\, y \in \Omega \Leftrightarrow x \in \Omega^-\left(R^{-1}\right)$.♦

Теорема 1.2.4. $\Omega^+(R) = \Omega_+\left(R^d\right)$, $\Omega^-(R) = \Omega_-\left(R^d\right)$.

Доведення. $x \in \Omega^+(R) \Leftrightarrow xRy,\ \forall\, y \in \Omega \Leftrightarrow yR^{-1}x,\ \forall\, y \in \Omega \Leftrightarrow y\left(\overline{R^{-1}}\right)x$, $\forall\, y \in \Omega \Leftrightarrow yR^dx \Rightarrow x \in \Omega_+\left(R^d\right)$. Співвідношення $\Omega^-(R) = \Omega_-\left(R^d\right)$ доводиться аналогічно.♦

Множина $\Omega_+(R)$ відіграє важливу роль у теорії вибору. У цій теорії вона називається також множиною недомінованих за R елементів; елементи, що входять у множину $\Omega_+(R)$, називаються також R-оптимальними. Множину R-оптимальних елементів позначатимемо через Ω^R, множину максимальних елементів – Ω_R.

Максимальним ланцюгом відносно до R, заданому на Ω, називається найкоротша послідовність $x_1,\dots,x_m$ така, що x_iRx_{i+1}, $i = \overline{1, m-1}$.

Теорема 1.2.5. Гомоморфізм ϕ відношення (R,Ω) у лінійний порядок існує для довільного ациклічного *R*; $\left|\phi(\Omega)\right| \geq m$, де m – довжина максимального ланцюга в Ω.

Доведення. Нехай Ω_1^R – множина недомінованих за *R* елементів Ω, тобто $\Omega_1^R = \Omega^R$. Покладемо $\Omega_2^R = \left(\Omega \setminus \Omega_2^R\right)^R$, $\Omega_3^R = \left(\Omega \setminus \left(\Omega_1^R \setminus \Omega_2^R\right)\right)^R$, …, $\Omega_s^R = \left(\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s-1} \Omega_i^R\right)^R$, $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} \Omega_i^R = \varnothing$. Гомоморфізм ϕ можна задати формулою $\phi(x) = s - i$, якщо $x \in \Omega_i^R$.♦

Контрольні завдання до § 2

1. Скільки існує різних відношень із множини *A* у множину *B*, якщо $|A| = n$, $|B| = m$ (будемо говорити: *n*-множина і *m*-множина)?

2. Скільки є таких відношень *R* із *n*-множини в *m*-множину, що
   а) $\forall x \ \exists y \ (xRy)$,
   б) $\forall y \ \exists x \ (xRy)$.

3. Яку особливість має граф відношення R з A в B, якщо:
   3.1. $xRy \wedge xRz \ \Rightarrow y = z$; 3.2. $xRy \wedge zRz \ \Rightarrow x = z$;
   3.3. $\forall x \ \exists y \ (xRy)$; 3.4. $\exists y \ \forall x \ (xRy)$; 3.5. $\forall y \ \exists x \ (xRy)$;
   3.6. $\exists x \ \forall y \ (xRy)$; 3.7. $\overline{\forall} x \ \exists y \ (xRy)$; 3.8. $\forall x \ \overline{\exists} y \ (xRy)$;
   3.9. $\overline{\forall} y \ \exists x \ (xRy)$; 3.10. $\forall y \ \overline{\exists} x \ (xRy)$; 3.11. $\overline{\exists} x \ \forall y \ (xRy)$;
   3.12. $\exists x \ \overline{\forall} y \ (xRy)$.

4. Які з наведених нижче відношень у множині цілих чисел є рефлексивними, транзитивними, симетричними й антисиметричними:
   4.1. $x < y$; 4.5. $|x| > y$; 4.9. $|x - y| = 1$;
   4.2. $x \leq y$; 4.6. $|x| \geq y$; 4. 10. $|x - y| \leq 1$;
   4.3. $|x| = |y|$; 4.7. $x = y$; 4.11. *x* ділиться на *y*;
   4.4. $x + y = 0$; 4.8. $x + 1 = y$; 4.12. *x* не ділиться на *y*.

5. Скільки існує різних рефлексивних, симетричних, антисиметричних відношень у *n*-елементній множині?

6. Довести, що максимум за частковим порядком не є єдиним.

7. Навести приклади відношень:
   7.1. Рефлексивного та симетричного, але не транзитивного;
   7.2. Рефлексивного і транзитивного, але не симетричного;
   7.3. Симетричного і транзитивного, але не рефлексивного.

8. Довести, що якщо R-відношення часткового порядку, то R^{-1} також є частковим порядком.
9. Довести, що для лінійно впорядкованої множини поняття мажоранти (міноранти) і максимума (мінімума) збігаються.
10. Довести, що серед будь-яких шести осіб знайдуться або три попарно знайомих, або три попарно незнайомих.

~~§ 3. Функції вибору~~

~~Нехай задано скінченну множину альтернатив $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ і ОПР, користуючись своїм особистим уявленням про кращі альтернативи, для кожної множини $X \subseteq \Omega$ вибирає підмножину кращих $C(X)$. Єдина вимога, яка накладається на вибір: $C(X) \subseteq X$ – кращі альтернативи можна обирати з того, що пропонують, зокрема, $C(\varnothing) = \varnothing$.~~

~~Уже на множині з двох альтернатив $\Omega = \{x_1, x_2\}$ можна зробити 16 виборів! Дійсно, коли пропонується одна альтернатива – виборів два (обирати її або не обирати), коли пропонується дві альтернативи – виборів чотири (не обирати жодної, обирати одну (2 вибори) і обирати обидві). Отже, усього виборів $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$. На множині з 7 альтернатив виборів більше за 10^{120} (це число має порядок кількості можливих шахових партій, що, у свою чергу, має порядок кількості атомів у "видимому всесвіті"!). Тобто описувати явно вибір, задаючи вибір кращих альтернатив $C(X)$ на кожній підмножині X "універсальної" множини Ω, неможливо вже у найпростіших випадках! Що ж робити? Як здійснювати "розумний", "логічний" вибір? Один із шляхів цього – у блоці 4 загальної схеми задавати "принципи логічності" і вивчати результуючий вибір (множини альтернатив, що задовольняють цим принципам). Наприклад, нехай Ω – групи факультету кібернетики третього курсу. "Логічно" вважати, що краща група на курсі повинна бути кращою на своїй спеціальності. Формально ця умова (умова "спадковості" – див. нижче) записується так: $Y \subseteq X$, $x \in Y \cap C(X) \Rightarrow x \in C(Y)$. Конкурс на кращу групу, у якому краща група курсу виявиться не кращою групою на своїй спеціальності, навряд чи можна вважати об'єктивним, незалежно від того, за якими показниками підводяться його підсумки.~~

~~Будемо називати *функцією вибору С*, задану на Ω, відображення, що зіставляє кожній підмножині $X \subseteq \Omega$ її підмножину $C(X)$, тобто $C: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$, $C(X) \subseteq X$ для $\forall X \subseteq \Omega$.~~