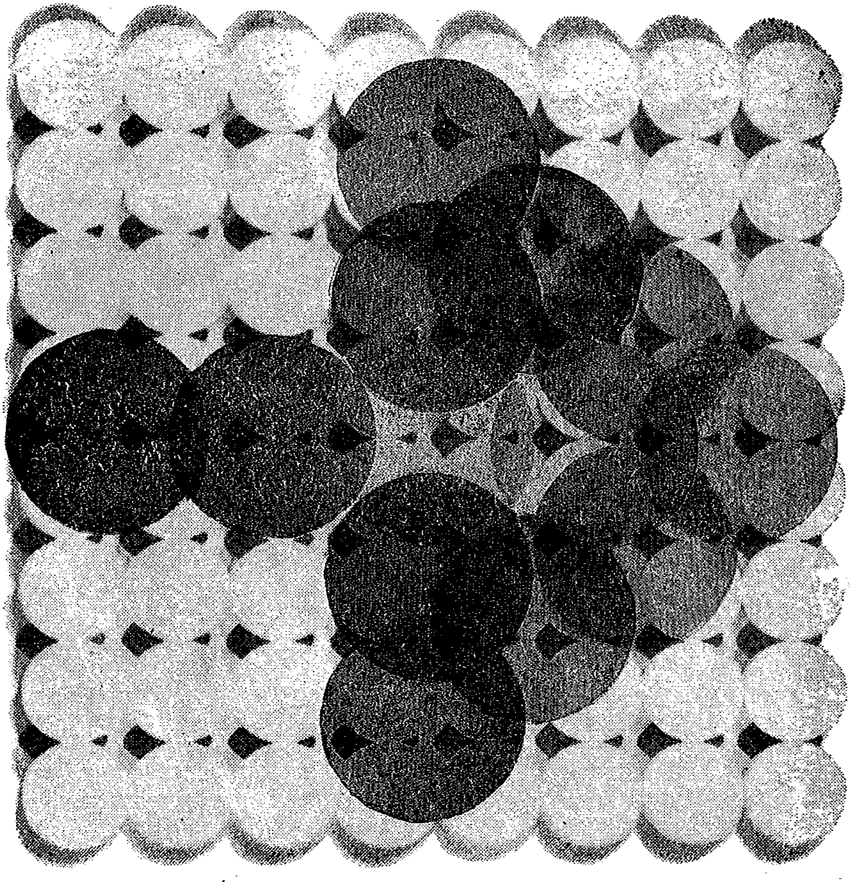
КИБЕРНЕТИКА



В. В. РОЗЕН

ЦЕЛЬ—ОПТИМАЛЬНОСТЬ—РЕШЕНИЕ

КИБЕРНЕТИКА

В. В. РОЗЕН

ЦЕЛЬ— ОПТИМАЛЬНОСТЬ— РЕШЕНИЕ

Математические модели принятия оптимальных решений

ББК 32.81
Р64
УДК 519.81(02)

Розен В. В.

Р64 Цель — оптимальность — решение (математические модели принятия оптимальных решений). — М.: Радио и связь, 1982. — 168 с., ил. (Кибернетика).
55 к.

В достаточно популярной форме рассказывается о математических моделях принятия оптимальных решений. Большое внимание уделено нетрадиционному способу формализации целей систем, состоящему в том, что вместо целевой функции задается отношение предпочтения на множестве состояний систем. При изучении сложных систем (социальных, биологических, экологических и др.) указанный способ формализации их целей позволяет в некоторых случаях построить более адекватную модель, чем при использовании целевых функций.

Книга рассчитана на широкий круг лиц, интересующихся кибернетикой, теорией принятия решений, а также алгеброй отношений и ее приложениями.

$Р\frac{2500000000-081}{046(01)-82}122-82$

ББК 32.81
6Ф0.1

Рецензенты: чл.-кор. АН СССР Н. Н. Моисеев, д-р философских наук Н. Т. Абрамова

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

Виктор Владимирович Розен

ЦЕЛЬ — ОПТИМАЛЬНОСТЬ — РЕШЕНИЕ

Редактор Н. Д. Иванушко
Художественный редактор Н. С. Шеин
Технический редактор Т. Н. Зыкина
Корректор Т. В. Покатова

ИБ № 540

Сдано в набор 27. 08. 81 г. Подписано в печать 23.04.82 г. Т-10007
Формат 60×84¹/₁₆ Бумага типографская № 2 Гарнитура литературная Печать высокая
Усл. п. л. 9,765 Усл. кр.-отт. 10,462 Уч.-изд. л. 10,83 Тираж 12 000 экз.
Изд. № 19490 Зак. № 1322 Цена 55 к.

Издательство «Радио и связь», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основной задачей предлагаемой книги является ознакомление широкого читателя с нетрадиционным способом формализации цели в задачах принятия решений — когда вместо целевой функции задается отношение предпочтения на множестве возможных результатов.

В любой ситуации принятия решения мы должны прежде всего ответить на вопрос: к чему мы стремимся? В чем состоит наша цель? Конечно, вряд ли можно дать однозначный ответ на этот вопрос, если иметь в виду «глобальную» цель существования отдельного человека или всего человечества, однако в рамках четко очерченной ситуации это не только возможно, но и необходимо. Необходимо, как только мы занимаемся анализом такой ситуации именно для принятия конкретного решения, и не просто какого-то решения, а решения оптимального, т. е. в определенном смысле наилучшего; в этом случае мы должны иметь не только четкое, но, по возможности, формальное описание цели. Обычный способ формализации цели в математических моделях принятия решений состоит во введении целевой функции, т. е. такой функции, которая для каждого возможного исхода численно оценивает его «полезность» для принимающего решение; при этом цель отождествляется с получением исхода, имеющего возможно большее (или возможно меньшее) значение целевой функции. Однако такую функцию можно ввести далеко не всегда: это видно хотя бы из того, что для любых двух чисел всегда одно больше, а другое меньше, но как часто бывают результаты, про которые нельзя сказать, что один лучше, а другой хуже! Конечно, числовое описание результатов очень удобно: удобно характеризовать работу целого предприятия одним числом, скажем, процентом выполнения плана, качество труда научного работника — числом опубликованных статей, эффективность работы учителя — процентом успеваемости его учеников. Удобно, но не всегда возможно и, главное, далеко не всегда имеет смысл: не все можно «свести» к числу или системе чисел. Здесь мы сталкиваемся с обстоятельством, которое в последние годы получило название «принципа несовместимости». Суть его можно выразить приблизительно так: чем сложнее система, тем меньше она допускает возможность точного количественного описания. А в реальных задачах принятия решений мы как раз имеем дело со сложными системами: техническими, экономическими, биологическими, социальными и т. д. Так как же быть в тех случаях, когда, с одной стороны, требуется дать точное, даже формальное описание цели, а с другой — такого описания может и не существовать вовсе? Выход все-таки есть и «спрятан» он в том, что понятия «формальное описание» и «количественное описание» не тождественны; точнее, всякое количественное описание является формальным, но не всякое формальное описание должно быть количественным. Вопреки довольно распространенному (среди нематематиков) мнению, сама математика сейчас рассматривается не как «наука о количестве», а, скорее, как наука о формальных (знаковых) моделях объективной действительности. Таким образом, можно построить математическую модель задачи принятия решения, дав формальное, но не обязательно количественное, описание ее компонент. Например, можно дать формальное описание цели, взяв за основу связанное с ней предпочтение. Для этого надо выделить множество всех тех пар результатов, для которых один соответствует цели больше, чем другой, т. е. надо задать в явном виде определяемое этой целью отношение предпочтения. Сделать это проще, чем задать целевую функцию, так как здесь требуется не численная оценка результатов, основанная на том, во сколько раз один результат лучше (или хуже) другого, а лишь указание того, какие результаты лучше, а какие хуже. Такой способ формального описания цели, являясь более общим по своей природе и более простым с логической точки зрения, чем задание ее с помощью целевой функции, вместе с тем позволяет построить достаточно содержательную, на наш взгляд, математическую теорию принятия решений, некоторые аспекты которой отражены в настоящей книге.

Отметим сразу, что задание цели с помощью соответствующего ей отношения предпочтения можно рассматривать не как окончательную ее формализацию, а как определенный этап в отображении цели; за этим этапом возможны и другие, способствующие уточнению цели, что в свою очередь ведет к уточнению принимаемого решения. Однако каждый новый этап формализации цели требует дополнительной информации о цели, а значит, усилий и времени для ее «добывания». При невозможности получения такой дополнительной информации или же при дефиците времени можно ограничиться простейшей характеристикой цели — связанным с ней отношением предпочтения.

Несколько замечаний, касающихся структуры книги. В гл. II рассказывается о математических моделях принятия решений, в которых цели заданы с помощью целевых функций; основное ее назначение — введение ряда принципиальных понятий, имеющих существенное значение для всего дальнейшего материала книги.

Автор старался придать всему изложению «замкнутый» характер, включив в книгу практически все используемые в ней математические результаты и определения. Это потребовало, в частности, рассмотрения некоторых вопросов, касающихся теории отношений и теории упорядоченных множеств (гл. III и V соответственно). Чтение (и понимание) основного материала книги не требует от читателя специальных математических знаний, но при одном обязательном условии — усвоении содержания гл. III и V, носящих «аппаратный характер[1]. Дополнительный материал (данный петитом) требует большей математической подготовки.

Приведенные в книге примеры носят в основном иллюстративный или даже схематический характер. Это связано с тем, что адекватные математические модели реальных задач принятия решений ввиду сложности последних весьма громоздки; нам же хотелось сосредоточить внимание на идейной стороне дела. Следует отметить, что общий подход к ряду разделов теории принятия решений (например, классификация задач принятия решений), а также терминология еще не устоялись, поэтому освещение некоторых затронутых в книге вопросов является выражением авторской точки зрения; особенно это касается последних двух глав книги, написанных автором на основе собственных исследований.

Любой текст математического характера можно оценить по двум критериям, один из которых — логическая строгость, а другой — понятность. Эти критерии (к сожалению) в значительной мере противоречат друг другу, поэтому необходим разумный компромисс между ними. Придавая в данной книге решающее значение второму критерию, автор стремился добиться большей понятности изложения иногда в ущерб его строгости и полноте.

Автор глубоко признателен Н. Н. Моисееву, высказавшему по рукописи книги ряд соображений принципиального характера, а также Н. Т. Абрамовой и Б. В. Бирюкову, сделавшим полезные замечания, касающиеся затронутых в книге философских вопросов.

Автор считает приятным долгом отметить, что своими теоретико-игровыми представлениями он обязан Н. Н. Воробьеву и его школе; В. В. Вагнер обратил внимание автора на важность теории отношений — как для нужд математики, так и для разнообразных ее приложений.

---

[1] Читателям, обладающим математической подготовкой, можно порекомендовать вышедшую в издательстве «Наука» (Ленинград, 1980) монографию: А. Я. Кирута, А. М. Рубинов, Е. Б. Яновская «Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах (вероятностный подход)», которая посвящена разработке вероятностной теории принятия решений для достаточно общих отношений предпочтения.

Глава I

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА СОДЕРЖАТЕЛЬНОМ УРОВНЕ

1. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

> Практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: *как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?*
>
> П. Л. Чебышев

В приведенном высказывании великого русского математика содержится лаконичная, но весьма точная характеристика задач, которые в современной терминологии принято называть задачами принятия (или выбора) решения. Разумеется, здесь не идет речь непременно о денежной выгоде или о денежных средствах. В других терминах указанную выше задачу можно было бы сформулировать, например, так: «Какое следует предпринять действие для получения возможно лучшего результата?»

Жизнь каждодневно ставит перед нами такие задачи[1]), требуя принятия конкретных решений. Люди всегда принимали решения, основываясь на своем опыте, интуиции и здравом смысле; принятие «хороших» решений было искусством, и лишь несколько десятилетий назад стало выясняться, что это искусство можно в значительной степени превратить в науку, причем науку точную, исполь-

---

[1]) У некоторых читателей слово «задача» ассоциируется с задачей математической. Возможно, с точки зрения языка, здесь более точным был бы оборот «проблема принятия решения», но дело, разумеется, не в терминах.

зующую математические методы исследования. Конечно, сразу же возникает вопрос о правомерности такого вторжения математики в область, относящуюся издревле к юрисдикции человека. Разумеется, в широчайшем диапазоне ситуаций, в которых человеку приходится принимать решения — от выбора прохладительного напитка и до выбора жизненного пути, невозможно заранее охарактеризовать те, в которых надо отдавать предпочтение формальным методам перед интуицией. Однако следует иметь в виду, что необходимость более широкого использования формальных методов вызвана прежде всего тем, что в современной жизни типичной является такая ситуация, когда последствия принимаемых решений касаются большого числа людей и связаны с огромными материальными затратами (скажем, выбор технологического проекта или маршрута железной дороги). Поэтому степень ответственности человека за последствия принимаемых решений многократно возросла. И решения, принятые «на глазок», могут обойтись слишком дорого, приводя подчас к необратимым результатам.

Выясним общую структуру задачи принятия решения, т. е. составляющие ее элементы. Во-первых, у принимающего решение должна быть определенная цель. Иногда эта цель не формулируется в явном виде, но в той или иной форме она должна обязательно присутствовать, иначе обсуждение правильности принимаемых решений лишается всякого смысла. Во-вторых, принимающий решение обладает средствами какого-то влияния на результат, в противном случае надобность принятия решения отпадает. Эти два признака являются основными, поэтому можно предложить такое определение: *задача принятия решения — это такая задача, которая может быть сформулирована в терминах цели, средств и результата.*

В реальных задачах принятия решений в качестве средств, оказывающих влияние на результат, могут выступать, например, некоторые конкретные действия, определенные способы действий, планы, программы и т. д. Можно считать, что принятие решения состоит *в выборе* какого-то варианта из имеющихся. Конечно, фактическое принятие решения — это процесс, но итогом этого процесса является именно выбор одной возможности из имеющихся.

Математическая модель задачи принятия решения представляет собой формальное описание составляющих ее элементов: цели, средств, результатов, а также связи между средствами и результатами. Отметим одно существенное обстоятельство: в математической модели принятия решения сразу указывается весь «наличный запас» действий, из которого производится выбор. Наглядно это можно представить себе таким образом, что должен быть составлен список всех возможных действий. Этот список может быть бесконечным, но он должен быть полным. Конечно, указанное обстоятельство представляет собой известное упрощение действительности, так как в реальных ситуациях принятия решений трудность подчас состоит не в том, чтобы *выбрать* какое-либо действие из «наличного списка», а в том, чтобы *догадаться* до какого-то оригинального, необычного, нестандартного действия. Вспомним многочисленные примеры блестящих военных операций, успех которых был обусловлен нешаблонным (а потому и неожиданным для противника) решением.

Иногда при анализе ситуации принятия решения того, кто производит выбор решения, называют лицом, принимающим решение. Надо иметь в виду, что выбор конкретного действия, произведенный принимающим решение, может не определять однозначно результата; можно сказать лишь, что этот выбор оказывает влияние на появление того или иного результата. При этом может случиться, что результат определяется совместными решениями нескольких лиц (или сторон), преследующих, вообще говоря, различные цели. В силу этого такие ситуации принятия решений являются конфликтными, а их математические модели принято называть теоретико-игровыми или, короче, играми (термин «игра» употребляется здесь ввиду явной аналогии таких ситуаций с обычными играми, где имеются участники, наделенные, согласно правилам игры, своими целями и возможностями действий).

Говоря о лице, принимающем решение, совсем не обязательно представлять себе наморщившего лоб индивидуума. Им может быть и отдельный человек, и группа людей, связанных едиными интересами и имеющих возможность обсуждения выбора действия, и живой организм или его часть, и техническое устройство — вообще это некоторая *система* в том понимании этого слова, которое сложилось в кибернетике и общей теории систем.

Приведем теперь системное описание ситуации принятия решения. Пусть имеется некоторая система, в которой выделена ее подсистема, называемая управляющей, и вся система погружена в среду. Рассматриваемая система может находиться в различных состояниях (выступающих здесь в качестве исходов), причем состояние системы определяется воздействием на нее как управляющей подсистемы (выступающей здесь в качестве принимающего решение), так и среды. Управление, которое осуществляет управляющая подсистема, проводится на основе принятых ею решений и в соответствии с ее целями. Если, в свою очередь, среду можно рассматривать как одну или несколько целенаправленных подсистем, то в итоге получаем комплекс целенаправленных управляющих подсистем, причем состояние системы определяется решениями, принятыми всеми входящими в этот комплекс управляющими подсистемами. В этом случае мы имеем теоретико-игровую ситуацию принятия решения.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО СВЯЗИ СРЕДСТВА И РЕЗУЛЬТАТА

Как мы выяснили в предыдущем параграфе, математическая модель задачи принятия решения представляет собой формальное описание цели, средств и результатов, а также способа связи средств с результатами. Для анализа и классификации задач принятия решений удобно выделить в них две компоненты: первая включает в себя описание средств и результатов, а также способа их связи, а вторая — описание цели. В этом параграфе мы рассмотрим первую компоненту задачи принятия решения. Требуемое для математической модели задачи принятия решения формальное описание средств и результатов можно произвести, задав два множества: множество X, элементы которого в дальнейшем будем называть **альтернативами**, и множество A, элементы которого будем называть **исходами**. Грубо говоря, альтернативы — это то, что мы выбираем, а исходы — то, к чему приходим. Отметим, что одна и та же ситуация принятия решения может иметь различные модельные описания; в частности, понимание того, что́ есть исход в данной ситуации принятия решения, зависит от принимающего решение; таким образом, понятие исхода является субъективным.

Рассмотрим теперь основные типы зависимости исходов от альтернатив в задачах принятия решений, что в содержательном плане интерпретируется как способ связи средств с результатами.

1. Простейший тип связи альтернатив с исходами — когда каждая альтернатива приводит к единственному исходу. В этом случае имеется функциональная зависимость исходов от альтернатив.

2. Более сложный тип связи состоит в том, что каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходов, каждый из которых имеет определенную вероятность появления. Здесь имеется стохастическая зависимость исходов от альтернатив.

3. Если каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходов, причем отсутствует даже стохастическая зависимость исходов от альтернатив, то имеем третий тип связи альтернатив и исходов.

Если принимающий решение информирован о типе связи, то говорят в первом случае, что принятие решения происходит *в условиях определенности*, во втором — *в условиях риска* (стохастических условиях) и в третьем — *в условиях неопределенности*. Разумеется, информированность принимающего решение о связи альтернатив с исходами может не совпадать с той, которая существует объективно. Например, если на самом деле зависимость исходов от альтернатив носит стохастический характер, но принимающий решение не знает вероятностей наступления исходов при выборе каждой конкретной альтернативы, то (по крайней мере на

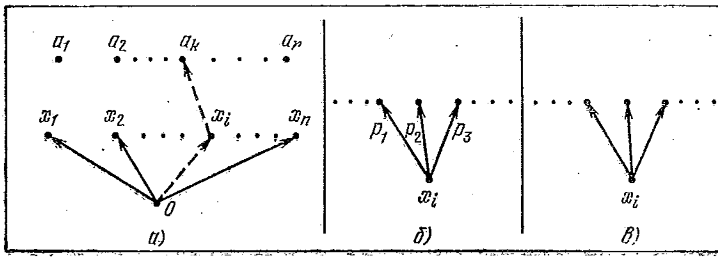


Рис. 1

этом этапе исследования) условия принятия решения надо квалифицировать как условия неопределенности. Таким образом, указанная выше классификация связана с субъектом, принимающим решение.

Наглядно связи между альтернативами и исходами можно представить с помощью графа следующего вида. Пусть $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество альтернатив, $A=\{a_1, \ldots, a_r\}$ — множество исходов. Изобразив альтернативы точками, расположенными на одном уровне, и исходы — точками на другом уровне, строим граф (рис. 1,*а*) так, что из некоторой точки O идут стрелки ко всем альтернативам. Из альтернативы x_i идет стрелка к исходу a_k в том и только том случае, когда исход a_k возможен при выборе альтернативы x_i ($i=1, \ldots, n$; $k=1, \ldots, r$). Далее, если принятие решения происходит в условиях риска, то для каждой стрелки, идущей от альтернативы к исходу, указывается вероятность наступления этого исхода при выборе данной альтернативы (рис. 1,*б*), причем сумма всех этих вероятностей должна быть равна единице. Построенный таким образом граф назовем графом связей альтернатив с исходами.

Принятие решения в условиях определенности характеризуется тем, что на графе связей альтернатив с исходами из каждой вершины x_i исходит точно одна стрелка (при этом допускается, что к одной вершине a_k стрелки могут сходиться,— это соответствует тому, что разные альтернативы приводят к одному и тому же исходу). Так как при принятии решения в условиях определенности каждой альтернативе соответствует только один исход, то в этом случае все равно, выбираем ли мы альтернативы или исходы.

При принятии решения в условиях риска каждой альтернативе соответствует вероятностная мера (распределение вероятностей) на множестве исходов; на графе связей альтернатив и исходов она задается указанием вероятности каждого исхода, возможного при выборе данной альтернативы.

Наконец, при принятии решения в условиях неопределенности каждой альтернативе соответствует определенное подмножество множества исходов: при выборе альтернативы x_i мы можем получить любой из исходов, к которому ведет стрелка из альтернативы x_i на графе связей альтернатив с исходами (рис. 1,*в*); при этом никакой дополнительной информацией о возможности появления того или иного исхода мы не располагаем.

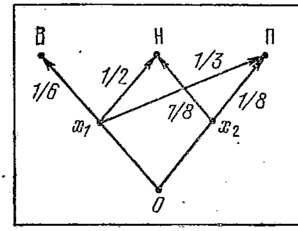


Рис. 2

Пример 1 (замена вратаря). На последней минуте хоккейного матча при ничейном счете тренер команды должен принять решение: заменять или нет вратаря команды полевым игроком? В шести предыдущих встречах с той же командой, в которых он проводил в аналогичной ситуации замену вратаря полевым игроком, одна встреча была его командой выиграна, две — проиграны и в трех сохранился ничейный счет. А в восьми встречах, в которых вратарь не был заменен, его команда один раз проиграла и семь раз встреча закончилась вничью.

Построим для этой задачи граф связей альтернатив и исходов. Здесь имеется две альтернативы: x_1 — заменить вратаря, x_2 — оставить вратаря и три исхода: выигрыш (В), ничья (Н), проигрыш (П). Так как можно за вероятность каждого из этих исходов принять частоту его появления, то получаем задачу принятия решения в условиях риска, причем при выборе x_1 вероятности выигрыша, ничьей и проигрыша равны соответственно $^1/_6$, $^1/_2$, $^1/_3$, а при выборе альтернативы x_2 — соответственно 0, $^7/_8$, $^1/_8$. Граф связей альтернатив с исходами изображен на рис. 2. Выбор решения можно сделать, если будет задана вторая компонента задачи принятия решения, отражающая ее целевую структуру, например численная оценка исходов (продолжение решения этой задачи см. в § 5, п. 1).

Рассмотрим теперь в общем виде задачу принятия решения, сформулированную в рамках системного описания; напомним, что в этом случае предполагается, что исход (состояние системы) определяется двумя факторами: выбором альтернативы, осуществляемым управляющей подсистемой, и состоянием среды. Пусть X — множество всех альтернатив, Y — множество всех состояний среды, A — множество возможных исходов. Каждый исход $a \in A$, в силу сказанного выше, есть функция двух аргументов: $a = F(x, y)$, где $x \in X$; $y \in Y$; будем называть F *функцией реализации*. Таким образом, функция реализации сопоставляет каждой паре вида (альтернатива, состояние среды) определяемый ею исход. Если множество альтернатив и множество состояний среды конечны: $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, то удобно представлять функцию реализации F таблицей типа табл. 1. Такую задачу принятия решения будем называть *задачей принятия решения в форме функции реализации*.

Пусть задача принятия решения задана в форме функции реализации, т. е. имеется таблица типа табл. 1. Могут представиться

Таблица 1

F	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	$F(x_1, y_1)$	...	$F(x_1, y_j)$	...	$F(x_1, y_m)$
⋮	⋮		⋮		⋮
x_i	$F(x_i, y_1)$	...	$F(x_i, y_j)$	...	$F(x_i, y_m)$
⋮	⋮		⋮		⋮
x_n	$F(x_n, y_1)$	...	$F(x_n, y_j)$	...	$F(x_n, y_m)$

следующие варианты информированности принимающего решение о возможностях появления тех или иных состояний среды.

а. *Принимающий решение знает состояние среды.* Тогда функция реализации зависит только от альтернативы, выбираемой принимающим решение, т. е. получаем задачу принятия решения в условиях определенности.

б. *Принимающий решение знает для каждого состояния среды вероятность его появления.* Обозначим через q_j вероятность появления состояния y_j $(j=1, \ldots, m)$. Должно выполняться $q_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{m} q_j=1$. Пусть выбрана альтернатива x_i. Тогда для каждого исхода $a \in A$ можно найти вероятность его наступления следующим образом: надо отметить в i-й строке табл. 1 все клетки, где стоит a, и просуммировать вероятности соответствующих столбцов, т. е. если обозначить через $p_i(a)$ вероятность наступления исхода a при выборе альтернативы x_i, то

$$p_i(a) = \sum_{F(x_i, y_j)=a} q_j. \qquad (1)$$

Таким образом, в этом случае каждой альтернативе соответствует вероятностная мера на множестве исходов; получаем, следовательно, задачу принятия решения в условиях риска.

в. *Принимающий решение не располагает никакой дополнительной информацией о появлении состояний среды* (т. е. он знает только табл. 1). Тогда при выборе альтернативы x_i он знает лишь, что наступит один из исходов, стоящих в i-й строке табл. 1; получаем задачу принятия решения в условиях неопределенности.

Итак, в этом параграфе мы ввели два способа представления задачи принятия решений: с помощью графа связей альтернатив с исходами и с помощью функции реализации. Оказывается, что *всякую задачу принятия решения в условиях определенности, риска и неопределенности можно представить в форме функции реализации соответственно в виде* а), б), в).

Для задачи принятия решения в условиях определенности сформулированное утверждение очевидно: надо ввести среду, имеющую только одно состояние. Тогда можно построить таблицу функции реализации (которая будет иметь только один столбец): в ее i-ю строку надо поместить исход, соответствующий альтернативе x_i.

Рассмотрим теперь задачу принятия решения в условиях риска. Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ альтернативы, а через $a_1, \ldots, a_r$ исходы. Пусть $p_i(a_k)$ — вероятность наступления исхода a_k при выборе альтернативы x_i. Построим для нашей задачи граф связей альтернатив с исходами. В качестве состояний среды возьмем множество всевозможных отображений y_j: $\{x_1, \ldots, x_n\} \to \{a_1, \ldots, a_r\}$, удовлетворяющих тому условию, что $y_j(x_i)$ есть исход, возможный при выборе альтернативы x_i. На графе связей альтернатив с исходами такое отображение y_j задается путем «отметки» для каждой вершины x_i ($i=1, \ldots, n$), одной из стрелок, исходящих из x_i. Выбор альтернативы x_i и «состояния среды» y_j однозначно определяет исход — им является $y_j(x_i)$, поэтому можно ввести функцию реализации F, определив ее условием $F(x_i, y_j) = y_j(x_i)$. Далее, каждому состоянию среды y_j припишем вероятность его наступления

$$q(y_j) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_j(x_i)).$$

Таким образом, для вычисления $q(y_j)$ нужно перемножить числа, стоящие около тех отмеченных стрелок на графе связей альтернатив с исходами, которые соответствуют отображению y_j.

Рассмотрим полученную задачу принятия решения, имеющую уже форму функции реализации, считая, что принимающему решение известны вероятности $q(y_j)$. Пользуясь соображениями элементарной теории вероятностей, легко показать, что для любого исхода a_k его вероятность при выборе альтернативы x_i, определяемая на основании таблицы функции реализации по формуле (1), совпадает с заданной вероятностью $p_i(a_k)$. Таким образом, мы получаем фактически первоначальную задачу принятия решения, но представленную в форме функции реализации.

Наконец, если мы имеем задачу принятия решения в условиях неопределенности, то приведение ее к форме функции реализации проводится аналогично, но, конечно, без нахождения вероятностей $q(y_j)$.

11044—2

Таблица 2

	y_1 (7/48)	y_2 (7/16)	y_3 (7/24)	y_4 (1/48)	y_5 (1/16)	y_6 (1/24)
x_1	В	Н	П	В	Н	П
x_2	Н	Н	Н	П	П	П

Пример. Приведем к форме функции реализации задачу принятия решения в условиях риска, заданную с помощью графа связей альтернатив и исходов рис. 2. Здесь имеется всего шесть отображений y_j, выступающих в качестве «состояний среды»:

$y_1: x_1 \to$ В, $x_2 \to$ Н; его вероятность $q(y_1) = {}^1/_6 \cdot {}^7/_8 = {}^7/_{48}$.
$y_2: x_1 \to$ Н, $x_2 \to$ Н; $q(y_2) = {}^1/_2 \cdot {}^7/_8 = {}^7/_{16}$.
$y_3: x_1 \to$ П, $x_2 \to$ Н; $q(y_3) = {}^1/_3 \cdot {}^7/_8 = {}^7/_{24}$.
$y_4: x_1 \to$ В, $x_2 \to$ П; $q(y_4) = {}^1/_6 \cdot {}^1/_8 = {}^1/_{48}$.
$y_5: x_1 \to$ Н, $x_2 \to$ П; $q(y_5) = {}^1/_2 \cdot {}^1/_8 = {}^1/_{16}$.
$y_6: x_1 \to$ П, $x_2 \to$ П; $q(y_6) = {}^1/_3 \cdot {}^1/_8 = {}^1/_{24}$.

Таблица функции реализации есть табл. 2; около каждого состояния среды указана вероятность его появления.

Установленная выше возможность представления всякой задачи принятия решения в форме функции реализации означает с содержательной стороны, что неопределенность, проявляющуюся в неоднозначной связи между средством и результатом, всегда можно интерпретировать как такую, которая вызвана существованием некоторой среды, оказывающей влияние на результат, причем условия определенности, риска и неопределенности при принятии решения будут определяться типом информированности принимающего решения о состоянии среды. Методологическое же значение этого факта состоит в том, что всякая задача принятия решения приводится к некоторой стандартной форме — форме функции реализации.

3. О СПОСОБАХ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЦЕЛИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В этом параграфе мы займемся более детальным изучением второй компоненты задачи принятия решения, которая связана со способом описания цели принимающего решение. Обсудим вначале вкратце такой вопрос: можно ли говорить о цели принимающего решение в том случае, когда им является не «лицо» (т. е. индивидуум, обладающий разумом и сознанием), а, скажем, функциональная система организма или некоторое техническое устройство. Возьмем для примера такую фразу: «Огонь стремился поглотить

1021—1

окружающие постройки». Конечно, никто из нас не считает, что огонь поставил себе сознательную цель и к ней стремится, но почему все-таки мы употребляем здесь (и в других аналогичных ситуациях) слово «стремился», характерное при наличии цели? Может быть, тут сказывается бедность нашего языка? Нам представляется, что дело здесь не в этом; напротив, в данном случае специально используется слово «стремился» для того, чтобы подчеркнуть некоторую *общность в поведении* «сознательных» и «бессознательных» систем, состоящую в том, что функционирование и тех, и других направлено к определенному результату.

Обобщенное понимание цели уже прочно вошло в биологию вместе с утверждением в ней представлений о внутренней активности биосистем (Н. А. Бернштейн, П. К. Анохин). В кибернетике общий подход к понятию цели и целенаправленности был развит в начале 40-х годов нашего столетия А. Розенблютом, Н. Винером и Д. Бигелоу. В статье «Поведение, целенаправленность и телеология» они отмечают[1]: «Активное поведение можно подразделить на два класса: нецеленаправленное (или случайное) и целенаправленное. Термин «целенаправленное» здесь означает, что действие или поведение *допускает истолкование* (выделено мной — *В. Р.*) как направленное на достижение некоторой цели, т. е. некоторого конечного состояния, при котором объект вступает в определенную связь в пространстве или во времени с некоторым другим объектом или событием. Нецеленаправленным поведением является такое, которое нельзя истолковать подобным образом».

Указанный подход к понятиям цели и целенаправленности связан с их объективацией и распространением на системы произвольной природы; следует особо подчеркнуть, что предложенное Винером кибернетическое понимание цели и целенаправленности системы основано на ее поведении и не связано необходимым образом с наличием у нее сознания[2]. Встав на эту точку зрения, мы можем понимать под целенаправленной такую систему, поведение которой обнаруживает направленность на определенный результат, т. е. целенаправленная система ведет себя так, «как будто» она преследует некоторую цель, а обусловлена ли на самом деле эта направленность сознательной целью системы или просто ее структурной организацией, это другой вопрос. Приписывание системе

---

[1] Цитируется по книге: Винер Н. Кибернетика. — М.: Сов. радио, 1968, с. 286.

[2] Философские вопросы объективации понятия цели, а также вопросы применения целевого подхода к любым самоуправляемым системам рассмотрены в работах: Б. С. Украинцев «Самоуправляемые системы и причинность» (М.: Мысль, 1972), Г. Паск «Значение кибернетики для наук о поведении (кибернетика поведения и познания; расширение понятия «цель»)». (В кн.: Кибернетические проблемы бионики. — М.: Мир, 1972), Н. Т. Абрамова «Целостность и управление» (М.: Наука, 1974).

некоторой цели (даже в том случае, когда система заведомо не может иметь сознательной цели) является удобным и важным с методологической точки зрения приемом для изучения ее поведения.

Рассмотрим теперь основные типы целей и способы их формализации, ориентируясь в основном на задачи принятия решений. Следует иметь в виду, что вопросы формального описания или хотя бы уточнения целей возникают не только при принятии решений. Эти вопросы являются составной частью методологии, известной под названием системного анализа.

Можно выделить следующие типы целей.

1. *Качественная цель* характеризуется тем, что всякий возможный исход либо полностью удовлетворяет этой цели, либо полностью не удовлетворяет, причем исходы, удовлетворяющие цели, неразличимы между собой по степени выполнения этой цели и точно так же неразличимы между собой исходы, не удовлетворяющие цели. При наличии качественной цели не имеют смысла утверждения типа «цель выполнена наполовину» или «цель выполнена на 99%»: качественная цель может быть или целиком выполнена или целиком не выполнена, т. е. качественная цель соответствует принципу «все или ничего». Качественную цель можно формализовать в виде некоторого подмножества B множества A всех возможных исходов, где всякий исход $a \in B$ удовлетворяет этой цели, а всякий исход $a \notin B$ не удовлетворяет; при этом B называется целевым подмножеством.

2. *Максимизация заданной функции.* Как правило, в математических моделях принятия решений цель отождествляется с максимизацией (или минимизацией) некоторой функции, заданной на множестве всех исходов и принимающей действительные значения; эта функция носит название **целевой функции** (очевидно, что минимизация функции f равносильна максимизации функции $-f$, поэтому в дальнейшем будем говорить лишь о максимизации целевой функции). Заметим, что всякую качественную цель формально можно свести к максимизации некоторой целевой функции f. Например, можно положить $f(a)=1$ для $a \in B$ и $f(a)=0$ для $a \notin B$, где B — целевое подмножество.

Иногда исходы характеризуются не *одним* числом, а *набором* n чисел, называемых **показателями** (или критериями) **эффективности**, причем цель состоит в максимизации (увеличении) всех этих показателей. Такую «многомерную» цель обычно стараются привести к «одномерной» с помощью агрегирования n показателей эффективности в один; этот прием называется **свертыванием векторного критерия в скалярный**.

Имея цель, заданную с помощью целевой функции f, можно определить связанное с этой целью предпочтение исходов: из двух исходов более предпочтительным будет тот, которому соответствует большее значение целевой функции (при равных значениях целевой функции говорят о безразличии исходов между собой). Назовем такое предпочтение **предпочтением, связанным с целевой функцией** f. Однако можно говорить о предпочтении и без наличия целевой функции, например, указывая множество всех тех пар исходов, для которых первый исход в паре предпочтительнее второго, т. е. указывая отношение предпочтения.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности представления предпочтения при помощи целевой функции. Другими словами, пусть на множестве исходов задано предпочтение в форме отношения. Когда его можно представить как предпочтение, связанное с некоторой целевой функцией? Во-первых, такое предпочтение должно обладать тем свойством, что для любых двух исходов один из них предпочтительнее другого или безразличен ему (линейность) — это следует из того, что для любых двух чисел одно из них больше другого или равно ему. Во-вторых, это предпочтение должно удовлетворять следующему условию: если первый исход предпочтительнее второго, а второй предпочтительнее третьего, то первый предпочтительнее третьего (транзитивность).

Реальные предпочтения людей могут не обладать свойствами линейности и транзитивности. Нарушение, например, свойства линейности объясняется тем, что существуют ситуации, которые для индивидуума являются в принципе несравнимыми, несопоставимыми (вспомним «детский» вопрос: «Кто лучше — мама или папа?»). Далее, нарушение свойства транзитивности для индивидуальных («субъективных») предпочтений было установлено на опытах [1] (правда, не в порядке правила, а, скорее, в порядке исключения). Более существенным доводом в этом плане является частое нарушение транзитивности при согласовании индивидуальных предпочтений, каждое из которых является транзитивным. Вообще, в решении вопроса построения на основе индивидуальных предпочтений единого согласованного предпочтения были обнаружены трудности принципиального характера, связанные с так называемым «парадоксом Эрроу» [2]. Вывод, который можно сделать из сказанного выше, состоит в том, что *понятие предпочтения является существенно более широким, чем понятие предпочтения, связанного с целевой функцией.* Приняв это положение, мы не должны при формализации цели или предпочтения стараться непременно представить их при помощи целевой функции. Конечно, если цель состоит в максимизации *заданной* функции (или функции, которая может быть построена естественным образом), то замена этой

[1] См., например, статью А. А. Гранберга (Проблема транзитивности индивидуальных и коллективных предпочтений при построении целевых функций.— В кн.: Количественные методы в социологии. — М.: Наука, 1966, с. 70—92).

[2] О парадоксе Эрроу можно прочитать в книге Б. Г. Миркина «Проблема группового выбора» (М.: Наука, 1974).

2—1322

функции связанным с ней предпочтением в общем случае не представляется состоятельной, так как при такой замене часть имеющейся информации о цели теряется и анализ задачи становится менее глубоким и полным. Но и наоборот, если первоначально заданной структурой, характеризующей цель, является связанное с ней предпочтение, то стремление во что бы то ни стало представить эту цель при помощи целевой функции подчас нельзя рассматривать иначе как «насилие» над имеющимися данными.

В гл. II настоящей книги рассматриваются задачи принятия решений, в которых цель задана посредством целевых функций, а гл. III—VI посвящены задачам принятия решений, в которых цель характеризуется отношениями предпочтения.

Глава II

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКЕ ИСХОДОВ

4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. **Некоторые примеры.** Рассмотрим вначале несколько примеров математических задач, подходя к ним как к задачам принятия решений.

Пример 2 (классический анализ). Чтобы попасть из пункта A в пункт B, экипаж должен проехать вначале по лугу, а затем по прямолинейному шоссе (рис. 3). Известно расстояние от A до шоссе и известны скорости экипажа по лугу и по шоссе. В каком месте экипажу надо выехать на шоссе, чтобы время переезда из A в B было минимальным?

Сформулированную задачу можно рассматривать как задачу принятия решения: множество альтернатив состоит из множества точек прямой OB (или из множества действительных чисел, если ввести ось x, как показано на рис. 3); каждой точке x соответствует исход — маршрут AxB. Таким образом, имеем задачу принятия решения в условиях определенности. Каждый исход (т. е. маршрут) оценивается числом — временем поездки по этому маршруту.

Пример 3 (линейное программирование). Имеется m пунктов $A_1, \ldots, A_m$ производства некоторого продукта и k пунктов $B_1, \ldots, B_k$ потребления этого продукта. Количество данного продукта в пункте A_i равно a_i, а потребность в нем в пункте B_j равна b_j ($i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, k$). Стоимость перевозки единицы продукта из A_i в B_j равна c_{ij}. Как следует спланировать перевозки, чтобы: а) вывезти весь продукт из пунктов производства, б) удовлетворить потребности пунктов потребления, и чтобы суммарная стоимость перевозок была наименьшей (стоимость перевозки продукта пропорциональна его количеству)?

Спланировать перевозки — это значит для каждого пункта производства A_i и каждого пункта потребления B_j указать, какое количество продукта должно быть перевезено из A_i в B_j; обозначим это количество через x_{ij}. Условия а) и б) означают тогда соответственно

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, k). \tag{3}$$

Кроме того, $x_{ij} \geqslant 0$. Общая стоимость перевозок равна $u = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{ij}$.

Данную задачу можно рассматривать как задачу принятия решения в условиях определенности, в которой в качестве альтернатив выступают неотрицательные $m \times k$-матрицы $\|x_{ij}\|$, удовлетворяющие условиям (2) и (3); каждой такой матрице соответствует исход — план перевозок, при котором из A_i в B_j перевозится x_{ij} единиц продукта. Целевая функция есть функция u.

Пример 4 (динамическое программирование). Рассмотрим граф (рис. 4), каждой дуге (x, y) которого приписано положительное число $c(x, y)$ (можно считать, например, что граф представляет собой схему дорог, а $c(x, y)$ — длина пути из x в y). Требуется найти путь из вершины a_0 в одну из окончательных вершин (т. е. a_8 или a_9), имеющий наименьшую общую длину.

Здесь, в отличие от предыдущих двух примеров, мы имеем многошаговую задачу принятия решения. Действительно, принять решение о выборе пути — значит вначале выбрать первый шаг (т. е. какую-либо дугу, исходящую из a_0); если, например, мы выбрали (a_0, a_2), то дальше надо производить выбор дуги, исходящей из a_2 и т. д. (разумеется, если из вершины исходит только одна дуга, то выбор тривиален). Иногда удобнее (как с теоретической, так и с практической точки зрения) представить решение не как последовательный выбор начиная с a_0, а таким образом, что в каждой вершине графа выбирается одна из исходящих из нее дуг (например, такое представление решения естественно, если мы не знаем заранее, из какой вершины нам предстоит начать движение). Тогда выбор альтернативы состоит практически в том, что в каждой вершине графа отмечается одна из исходящих из нее дуг. Каждой такой сложной альтернативе соответствует единственный путь из начальной вершины — путь по отмеченным дугам; таким образом, усложнив понятие альтернативы, мы снова приходим к задаче принятия решения в условиях определенности и с численной оценкой исходов.

При всем различии приведенных выше примеров в них прослеживается одна и та же схема: каждой альтернативе соответствует определенный исход, а «полезность» каждого исхода оценивается некоторым числом. Нас здесь интересуют именно численные оценки исходов, поэтому можно установить прямую связь: альтернатива — численное значение соответствующего ей исхода, минуя

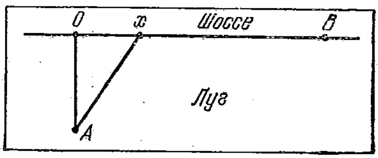


Рис. 3

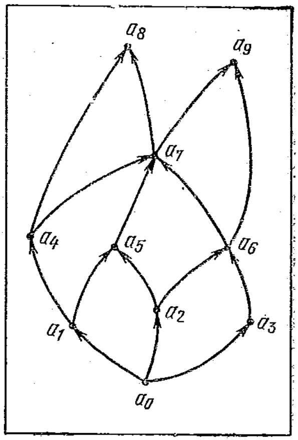


Рис. 4

сами исходы; в итоге получим целевую функцию f, которая определена теперь на множестве альтернатив. Так как цель состоит здесь в получении исхода, имеющего возможно большее (или возможно меньшее) численное значение, то под оптимальным решением естественно понимать ту альтернативу, которая доставляет целевой функции f наибольшее (или наименьшее) значение.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: *математической моделью задачи принятия решения в условиях определенности с численной оценкой исходов является действительная функция, заданная на множестве альтернатив. Нахождение оптимального решения для такой задачи равносильно нахождению экстремума этой функции.*

Посмотрим, как в этом случае обстоит дело с существованием оптимальных решений. Если множество альтернатив X конечно (как в примере 4), то целевая функция f принимает конечное число значений, среди которых будет наибольшее и наименьшее. Если же X бесконечно, то чаще всего в качестве X выступает подмножество n-мерного числового пространства R^n (в примере 2 $X=R$, в примере 3 $X \subset R^{mk}$). При этом функция f, как правило, является непрерывной, т. е. «близким» альтернативам соответствуют «близкие» значения функции f. Как устанавливается в классической теореме анализа[1], всякая непрерывная функция, определенная на замкнутой ограниченной области, достигает в этой области наибольшего и наименьшего значения. Сформулированная теорема является тем математическим фундаментом, на котором базируется реализуемость оптимальных решений для данного класса задач принятия решений.

2. Многокритериальные задачи принятия решений. Так как для задач принятия решений в условиях определенности с численной оценкой исходов цель адекватна максимизации (или минимизации) целевой функции, то для таких задач имеется фактически единственная концепция оптимальности решения: оптимальным будет решение, доставляющее целевой функции наибольшее (или наименьшее) значение. Предположим теперь, что мы имеем задачу принятия решения также в условиях определенности, но исходы в ней оцениваются по двум показателям, а цель состоит в увеличении (т. е. максимизации) обоих этих показателей. Пусть эти показатели представлены в виде функций $f(x)$ и $g(x)$. Только в исключительных случаях максимум двух независимых друг от друга функций достигается в одной точке. Достаточно типичный случай изображен на рис. 5: функция $f(x)$ достигает максимума в точке x_1, а функция $g(x)$ — в точке x_2. Из графиков функций вид-

[1] См., например, Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1973, т. 1, с. 97.

но, что с возрастанием одной функции, другая, как правило, убывает, т. е. увеличивая один показатель, мы уменьшаем другой. Какое решение будет здесь оптимальным?

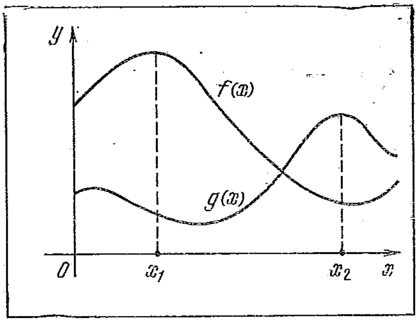


Рис. 5

Ответить на этот вопрос гораздо сложнее, чем это может показаться с первого взгляда. Подчеркнем, что в данном случае *речь идет не о том, как найти оптимальное решение, а о том, что следует понимать под оптимальным решением*, т. е. мы сталкиваемся здесь с трудностью не технического, а, как говорят, иногда, концептуального характера. Для обсуждения того, как эта трудность может быть преодолена, рассмотрим следующий пример.

Пример 5 (разработка модели автомобиля). Предположим, что при разработке модели автомобиля нас интересуют следующие два показателя: его срок службы (u) и его максимальная скорость (v), причем мы хотим максимизировать оба эти показателя. В наших возможностях варьирование некоторых технических характеристик автомобиля (мощность двигателя, форма кузова, вес отдельных агрегатов и т. п.) в некоторых заданных границах. При этом каждому фиксированному набору значений этих характеристик соответствует определенное значение u_0 срока службы автомобиля и значение v_0 его предельной скорости. Таким образом, взяв за альтернативы наборы значений варьируемых характеристик автомобиля, а в качестве исходов соответствующие им пары чисел (u_0, v_0), приходим к задаче выбора решения в условиях определенности. Изобразив все такие пары чисел (u_0, v_0) на плоскости переменных u и v, получим (рис. 6) некоторую область D, каждая точка которой представляет геометрически возможный исход. Так как при принятии решения в условиях определенности выбор альтернативы равнозначен выбору исхода, то принятие решения состоит здесь в выборе конкретной точки области D. Какую точку надо взять в качестве оптимальной?

Пусть мы выбрали, например, точку $M_0(u_0, v_0)$. Построим, как указано на рис. 6, криволинейный треугольник AM_0B. Для любой точки этого треугольника оба показателя — срок службы автомобиля и его предельная скорость — будут бо́льшими, чем для точки M_0, поэтому выбор любой точки этого треугольника будет более целесообразным, чем выбор точки M_0, а выбор точки M_0 в качестве оптимальной оказался неудачным. Аналогичное рассуждение применимо к любой точке области D, для которой возможно построение указанного на рис. 6 криволинейного треугольника.

Итак, при выборе исхода надо ограничиться теми точками области D, для которых построение такого криволинейного треугольника невозможно. В содержательных терминах это означает, что надо ограничиться теми исходами, для которых невозможно одновременное улучшение обоих показателей, такие исходы называются эффективными или оптимальными по Парето[1]. Формально условие эффективности точки $(u, v) \in D$ выражается так:

$$(u', v') \in D, \quad u' \geqslant u, \quad v' \geqslant v \Rightarrow u' = u, \quad v' = v. \qquad (4)$$

Множество всех эффективных точек (на рис. 6 оно указано жирной линией) представляет собой, образно говоря, северо-восточную границу области D. Таким образом, первый вывод, который можно сделать состоит в том, что *выбор исхода следует производить из множества эффективных точек.*

Однако какую именно эффективную точку следует признать в качестве оптимальной? Сравним две эффективные точки $M_1(u_1, v_1)$ и $M_2(u_2, v_2)$ (рис. 6). Для точки M_1 больше первый показатель (срок службы), а для точки M_2 — второй (максимальная скорость). Для эффективных точек такая ситуация является типичной: действительно, если для одной из точек области D оба показателя являются бо́льшими, чем для другой (по крайней мере один показатель строго больше), то эта другая не будет эффективной, как это сразу следует из условия (4). Итак, считая для двух точек области D лучшей ту, для которой все показатели лучше, получаем, что для любых двух эффективных точек ни одна не является лучше другой. Иными словами, эффективные точки являются несравнимыми между собой по предпочтению, а если мы все же хотим как-то сравнить, сопоставить две эффективные точки, то для этого требуется дополнительная информация, кроме той, которая заключена в сравнении исходов по каждому показателю в отдельности. Точнее, для сравнения эффективных точек необходима дополнительная информация следующего типа: *сколькими единицами выигрыша по одному показателю можно компенсировать проигрыш единицы по другому показателю?* Такую информацию будем в дальнейшем называть информацией о соотношении показателей эффективности. Рассмотрим два наиболее важных способа задания такой дополнительной информации и ее влияние на выбор оптимального исхода (применительно к нашему примеру).

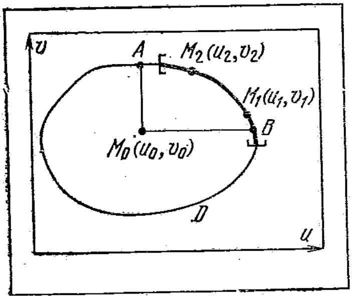


Рис. 6

1. *Упорядочение показателей по важности.* Пусть нам известно, что один показатель существенно важнее другого, например, что максимальная скорость автомобиля существенно важней его срока службы. В этом случае потерю единицы показателя v нельзя компенсировать никаким увеличением значения показателя u; значит,

[1] По имени известного итальянского инженера, математика и экономиста Вильфредо Парето.

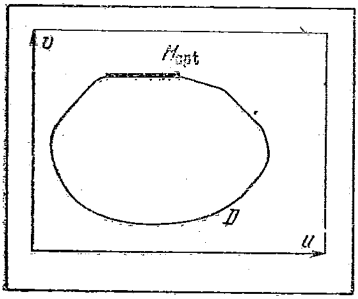


Рис. 7

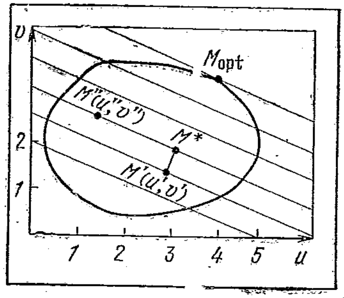


Рис. 8

мы должны производить выбор оптимального исхода среди тех исходов, для которых значение показателя v является максимальным среди возможных, т. е. должны ограничиться исходами, изображенными на рис. 7 жирной линией; у всех этих исходов значение показателя v одинаково, поэтому наилучшим среди них будет тот, который имеет наибольшее значение показателя u; этот исход и выступает в качестве оптимального исхода M_{opt}.

2. *Задание весов относительной важности.* Должно быть известно, что один показатель в определенное число раз важнее другого, скажем, максимальная скорость автомобиля для нас в 2,5 раза важней его срока службы. Другими словами, потеря пяти единиц времени службы автомобиля приравнивается к приращению двух единиц его скорости. Важно отметить, что данное предположение о соотношении показателей должно относиться ко всем возможным моделям автомобилей, т. е. ко всем точкам области D, поэтому на плоскости переменных u и v мы можем отождествить любые две точки $M_1(u_1, v_1)$ и $M_2(u_2, v_2)$ области D, для которых

$$\frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = \frac{2}{5}, \quad \text{т. е. } 2u_1 + 5v_1 = 2u_2 + 5v_2.$$

Геометрически это означает, что мы рассматриваем семейство прямых $2u+5v=\mathrm{const}$ и считаем равноценными любые два исхода, принадлежащие одной прямой этого семейства (рис. 8).

С другой стороны, пусть исходы $M'(u', v')$ и $M''(u'', v'')$ лежат на разных прямых этого семейства. Так как исход M^* строго лучше исхода M' (для M^* оба показателя лучше, чем для M') и, в свою очередь, исход M^* равноценен исходу M'', то исход M'' лучше, чем исход M'. Таким образом, для любых двух исходов лучшим следует признать тот, который расположен на более «высокой» прямой семейства, а оптимальным — исход, соответствующий той точке M_{opt} области D, которая лежит на самой «высокой» прямой семейства.

Какие эффективные точки здесь выступают в качестве оптимальных? Ясно, что положение оптимальной точки M_{opt} зависит от угла наклона прямых семейства, который, в свою очередь, определяется отношением весов относительной важности показателей u и v (в нашем случае это отношение равно 2 : 5). При изменении отношения весов относительной важности показателей будет меняться наклон прямых семейства, а значит, и точка M_{opt}. Более того, любая эффективная точка может превратиться в точку M_{opt} при подходящем отношении весов относительной важности — это достаточно ясно из наглядно-геометрических представлений (рис. 8).

Подводя итог обсуждения примера 5, можно сделать следующий общий вывод: *если для многокритериальной задачи принятия решения мы не располагаем никакой дополнительной информацией о предпочтениях исходов, кроме той, которая обусловлена их сравнением по каждому показателю в отдельности, то мы можем говорить лишь о множестве оптимальных решений, в качестве которого выступает множество всех эффективных точек. Выделение единственного оптимального решения в такой задаче можно произвести при наличии дополнительной информации о предпочтениях исходов в виде соотношения между показателями эффективности.*

Отметим, что для многокритериальной задачи, как правило, не существует исхода, наилучшего сразу по всем показателям, поэтому оптимальное решение чаще всего является компромиссным.

5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Критерий математического ожидания. Рассмотрим вначале два примера ситуаций принятия решения в условиях неопределенности.

Пример 6 (брать ли билет?). Некто, войдя в трамвай, решает, брать ли билет. Здесь исход определяется двумя обстоятельствами: его решением и фактом появления контролера. Таким образом, Некто выступает здесь в качестве принимающего решение, а факт появления контролера — в качестве среды. Имеются всего две альтернативы у принимающего решение и два состояния среды; ниже приведена таблица функции реализации (табл. 3).

Таблица 3

Альтернативы	Состояния среды	
	появится контролер	не появится контролер
Брать билет	Истрачены деньги на билет, но нет неприятностей	Истрачены деньги на билет
Не брать билета	Штраф	Бесплатный проезд

Как здесь численно оценить «полезности» исходов? Конечно, проще всего в качестве оценок взять денежные потери, однако является ли такая оценка адекватной для принимающего решение? Человек, подвергнутый штрафу, испытывает не только денежный, но и моральный ущерб, а взявший билет (возможно) — незначительное моральное удовлетворение при появлении контролера;

Таблица 4

Альтернативы	Состояния среды	
	появится контролер	не появится контролер
Брать билет	—2	—3
Не брать билета	—200	0

Таблица 5

Производить	Лето		
	дождливое	жаркое	умеренное
Зонтики	90	60	40
Шляпы	25	100	50
Плащи	70	50	60

кроме того, некоторые испытывают положительные эмоции не от экономии денег, а от самого факта бесплатного проезда... Все эти моральные факторы весьма трудно оценить количественно, однако так как рассматриваемые в этой главе модели принятия решения должны иметь численные выражения исходов, то такая оценка исходов должна быть непременно. Оценим их, с учетом вышеизложенных соображений, например, как указано в табл. 4.

Какое следует принять решение, если целью считать минимизацию потерь? Вот более серьезный пример [1].

Пример 7 (зонтики, шляпы, плащи). Небольшое предприятие легкой промышленности может выпускать продукцию одного из трех видов: зонтики, шляпы или плащи. Готовясь к летнему сезону, директор предприятия должен принять решение — какой из этих трех видов продукции выпускать. При этом исход (доход предприятия) зависит от того, каким будет летний сезон — дождливым, жарким или умеренным. В дождливое лето наибольший доход принесет производство зонтиков, меньший — производство плащей и совсем малый — производство шляп. В жаркое лето наибольший доход даст производство шляп, средний — производство зонтиков (которые можно использовать как от дождя, так и от солнца) и меньший — производство плащей. В умеренное лето наибольший доход от производства плащей, несколько меньший — от производства шляп и еще меньший — от производства зонтиков. Пусть соответствующие доходы предприятия определены табл. 5. Какое следует принять решение, если целью считать максимизацию дохода?

Приведенные два примера можно рассматривать как задачи принятия решений в условиях неопределенности, в которых исходы имеют численную оценку. Общая форма таких задач представляется таблицей вида табл. 6. В ней $x_1, \ldots, x_n$ — альтернативы принимающего решение, $y_1, \ldots, y_m$ — всевозможные состояния среды, a_{ij} — численная оценка («полезность») исхода, который получается, если принимающий решение выбирает альтернативу x_i, а среда принимает состояние y_j ($i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$). В подобных задачах принятия решения весьма существенным является вопрос

[1] Следует сразу оговорить, что логический анализ примеров не зависит от степени их серьезности. Часто на основе рассмотрения «несерьезных» примеров делаются весьма серьезные выводы.

Таблица 6

	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1m}
⋮	⋮		⋮	.	⋮
x_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{im}
⋮	⋮		⋮		⋮
x_n	a_{n1}	...	a_{nj}	...	a_{nn}

о том, можно ли каждому состоянию среды приписать вероятность его наступления. Если это возможно, то на этом этапе исследования получаем фактически задачу принятия решения в условиях риска (см. § 2). Скажем, в примере 6 эти вероятности могут быть найдены, если известно число вагонов (k) и число контролеров на линии (r). Если считать, что каждый вагон имеет одинаковые шансы «приобретения» контролера, то за вероятность появления контролера можно взять отношение r/k (предполагается, что $r \leqslant k$). В примере 7 принимающий решение может приписать вероятность каждому состоянию среды, если ему известна статистика дождливых, жарких и умеренных лет (время года) в этой местности.

Итак, предположим, что каждому возможному состоянию среды y_j приписана вероятность его появления q_j

$$\left(q_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1\right).$$

Тогда в качестве оценки «полезности» альтернативы x_i обычно берется сумма попарных произведений стоящих в строке x_i табл. 6 численных значений на соответствующие им вероятности (эта величина называется м а т е м а т и ч е с к и м   о ж и д а н и е м):

$$\text{„полезность“ альтернативы } x_i \text{ есть } \sum_{j=1}^{m} q_j \cdot a_{ij}.$$

Наилучшей (оптимальной) следует считать альтернативу, которой соответствует наибольшее значение математического ожидания.

В примере 6 обозначим через q вероятность появления контролера (тогда вероятность его непоявления равна $1-q$). «Полезность» первой альтернативы (брать билет) есть

$$q \cdot (-2) + (1-q) \cdot (-3) = q - 3,$$

а второй (не брать билета)

$$q \cdot (-200) + (1-q) \cdot 0 = -200q.$$

Надо предпочесть первую альтернативу второй, если
$q-3>-200q$, т. е. $q>3/201\approx 0{,}015$.

В примере 7 предположим, что вероятности дождливого, жаркого и умеренного лета равны соответственно 0,6; 0,1; 0,3. Тогда «полезности» трех имеющихся альтернатив таковы:

$$0{,}6\cdot 90+0{,}1\cdot 60+0{,}3\cdot 40=72,$$

$$0{,}6\cdot 25+0{,}1\cdot 100+0{,}3\cdot 50=40,$$

$$0{,}6\cdot 70+0{,}1\cdot 50+0{,}3\cdot 60=65.$$

В этом случае надо выбрать первую альтернативу.

Рассмотрим еще выбор решения для задачи замены вратаря (пример 1). Будем численно оценивать исходы приносимыми ими очками (выигрыш оценивается в 2 очка, ничья — в 1, проигрыш — 0). Тогда при выборе альтернативы x_1 (заменять вратаря) математическое ожидание равно

$$\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{5}{6},$$

а при выборе альтернативы x_2 (оставить вратаря)

$$\frac{7}{8}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 0=\frac{7}{8}.$$

Таким образом, руководствуясь критерием числа «ожидаемых очков», надо отдать предпочтение альтернативе x_2 — не заменять вратаря. Понятно, что указанный критерий (число очков) может быть неадекватен цели принимающего решение. Видоизменим этот критерий следующим образом: пусть проигрыш оценивается 0, ничья 1, а выигрыш k (k показывает, таким образом, во сколько раз выигрыш важнее ничьей). Тогда надо предпочесть альтернативу x_2 альтернативе x_1 только в том случае, когда

$$\frac{7}{8}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 0>\frac{1}{6}\cdot k+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0,$$

т. е. когда $k<2{,}25$. Например, оценивая выигрыш втрое больше ничьей, мы должны выбрать альтернативу x_1 — заменять вратаря. На этом простом примере видна одна особенность задач принятия решения с численной оценкой исходов: небольшие колебания числовых оценок могут привести к изменению оптимального решения.

Рассмотрим теперь следующий вопрос, имеющий принципиальный характер для задач принятия решения в условиях риска: насколько правомерна оценка «полезности» альтернативы по математическому ожиданию? Если принятие решения производится многократно и в неизменных условиях, то математическое ожидание можно рассматривать как средний доход, тогда выбор альтернативы, приносящей максимальный средний доход, вполне оправдан. Однако при однократном принятии решения мы можем не получить дохода, равного математическому ожиданию. Удобно проанализировать механизм принятия решения в условиях риска, воспользовавшись понятием лотереи. Будем понимать под лотереей набор чисел (интерпретируемых как выигрыши в этой лотерее) с указанием для каждого числа вероятности его появления. Ясно, что в задаче принятия решения в условиях риска, в которой исходы имеют численную оценку, сравнение альтернатив означает фактически сравнение соответствующих им лотерей. Рассмотрим теперь следующий пример.

Пусть проводятся две лотереи: в первой одна половина выигрышей по 2 руб., а другая — по 20 руб.; во второй 1/100 — выигрыши по 1000 руб., и 99/100 равны 0. Что выгодней: участвовать в первой лотерее или во второй?

Для первой лотереи математическое ожидание выигрыша равно

$0{,}5\cdot 2+0{,}5\cdot 20=11,$

а для второй

$0{,}01\cdot 1000+0{,}99\cdot 0=10.$

Итак, по критерию математического ожидания выгоднее участвовать в первой лотерее, но некоторые могут с этим не согласиться на том основании, что при участии во второй лотерее есть шанс получить крупный выигрыш. На это можно возразить, что в случае неудачи мы во второй лотерее не получим ничего, а в первой лотерее нам гарантирован выигрыш в 2 руб. Человек осторожный (перестраховщик) предпочтет, по-видимому, первую лотерею, а склонный к риску (максималист) — вторую. Таким образом, *нельзя дать однозначного ответа на вопрос: какая из этих двух лотерей действительно* (т. е. объективно) *выгоднее, так как предпочтение между ними зависит от психологических особенностей человека, точнее, от его отношения к риску.*

Сводя предпочтение лотерей к сравнению соответствующих им математических ожиданий, мы накладываем на это предпочтение определенные условия. Можно поставить обратный вопрос: каким условиям должно удовлетворять предпочтение, заданное на множестве лотерей, чтобы предпочтение между любыми двумя лотереями можно было свести к сравнению соответствующих им математических ожиданий? Эти условия (аксиомы) были найдены американскими математиками, основателями современной теории игр Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном. Приняв сформулированные ими условия, мы должны принять и их следствие, т. е. сравнение лотерей по их математическому ожиданию (аксиомы Неймана и Моргенштерна изложены в их основополагающей работе [9], см. также [6]).

2. Принцип максимина. Вернемся к задачам принятия решений, изложенным в примерах 6 и 7. Предположим теперь, что мы не располагаем информацией, дающей нам основание приписать каждому состоянию среды вероятность его появления. В этом случае основным методом принятия решения является введение гипотезы о поведении среды. Принятие такой гипотезы позволяет для каждой альтернативы численно оценить связанные с ней последствия, а, значит позволяет сравнить любые две альтернативы. Рассмотрим одну из важнейших гипотез такого типа, называемую **гипотезой антагонизма**. Она состоит в предположении, что среда ведет себя наихудшим (для принимающего решение) образом. При принятии этой гипотезы каждая альтернатива оценивается наименьшим из числовых значений исходов, возможных при выборе этой альтернативы. Если задача принятия решения представлена в форме табл. 6, то оценкой альтернативы x_i (показателем «полезности» альтернативы x_i) является $\min\limits_j a_{ij}$. При принятии гипотезы антагонизма наилучшей (оптимальной) надо признать ту альтернативу, которая максимизирует этот показатель, т. е. альтернативу с тем номером i, для которого $\min\limits_j a_{ij}$ будет наибольшим. Формально она характеризуется тем условием, что на ней достигается внешний экстремум в выражении

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

Такой принцип выбора решения называется **принципом максимина**, а альтернатива, на которой достигается внешний экстремум в (5), — **максиминной**. Значение принципа максимина как принципа выбора решения состоит не только (и даже не столько) в том, что поведение, при котором стороны преследуют противоположные цели и, следовательно, могут рассматриваться как антагонисты, является довольно распространенным. Дело еще в том, что число $\min\limits_j a_{ij}$ представляет собой важную характеристику альтернативы x_i — является ее гарантированным уровнем. Если будет выбрана альтернатива x_i, то, что бы ни произошло, результат не может быть хуже, чем $\min\limits_j a_{ij}$, поэтому $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ — это наибольший из гарантированных результатов. В силу этого принцип максимина называют также «принципом наибольшего гарантированного результата» (см. Ю. Б. Гермейер. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971). Максиминная оценка является единственной абсолютно надежной оценкой при принятии решения в условиях неопределенности.

Для примера 6 гипотеза антагонизма формулируется в виде следующего предположения: если Некто берет билет, то контролер не появляется; если Некто не берет билета, контролер появляется.

Показателем «полезности» первой альтернативы (брать билет) является ее гарантированный уровень — $\min(-2, -3) = -3$, второй альтернативы (не брать билета) — число $\min(-200, 0) = -200$. Наибольший из гарантированных результатов (максимин) равен здесь —3, а альтернатива «брать билет» является максиминной.

В примере 7 гарантированные уровни трех имеющихся альтернатив равны соответственно 40, 25 и 50, третья альтернатива является максиминной.

Укажем теперь на одну важную особенность принципа наибольшего гарантированного результата, проявляющуюся при выборе решения в условиях конфликта. Каждая сторона, участвующая в конфликте, может рассматривать себя как принимающую решение в условиях неопределенности, причем все остальные стороны выступают в качестве среды. Имеет место следующее обстоятельство: если конфликт интересов сторон не носит антагонистического характера (для теоретико-игровых моделей с численным выражением исходов антагонистический характер конфликта сводится к тому, что для любого исхода сумма его числовых оценок всеми участниками конфликта равна нулю), то появляется возможность повышения гарантированного уровня за счет обмена информацией между сторонами о принимаемых ими решениях. Проиллюстрируем это обстоятельство на примере.

Пример 8 (вывоз продукции). Предприятие для отправки своей продукции потребителю вывозит ее на перевалочный пункт, где продукция грузится на автомашины, принадлежащие транспортному управлению. Если не вся продукция может быть погружена, то ее остаток сдается на склад; в этом случае расходы за хранение продукции предприятие и транспортное управление несут поровну. Предприятие может отправить продукции в расчете на 5 или на 10 автомашин; транспортное управление может направить на перевозку продукции обычную автоколонну (4 автомашины), большую автоколонну (7), две обычных автоколонны (8) или обычную и большую автоколонну (11). От отправки одной автомашины продукции предприятие имеет доход a; стоимость хранения на складе продукции, перевозимой одной автомашиной, равна b, а затраты транспортного управления на посылку к перевалочному пункту одной автомашины — c. Тогда табл. 7 показывает при всех вариантах совместных решений, принятых предприя-

Таблица 7

П	Т: 4	7	8	11
5	$-4a-\frac{b}{2}$	$5a$	$5a$	$5a$
	$-4c-\frac{b}{2}$	$-7c$	$-8c$	$-11c$
10	$4a-3b$	$7a-\frac{3}{2}b$	$8a-b$	$10a$
	$-4c-3b$	$-7c-\frac{3}{2}b$	$-8c-b$	$-11c$

Таблица 8

П	Т: 4	7	8	11
5	37	50	50	50
	—11	—14	—16	—22
10	22	61	74	100
	—26	—23	—22	—22

тием и транспортным управлением (П — альтернативы предприятия, Т — альтернативы транспортного управления), доходы предприятия (в верхней части каждой клетки) и расходы транспортного управления (в нижней части). Пусть, например, $a=10$, $b=6$, $c=2$ (табл. 8). Какое бы Вы приняли решение, оказавшись на месте директора предприятия?

Руководствуясь принципом максимина, директор предприятия должен выбрать первую альтернативу (посылка продукции в расчете на 5 автомашин), так как эта альтернатива гарантирует доход, равный 37, а вторая — только 22. Однако, если директор предприятия выберет вторую альтернативу (посылка продукции в расчете на 10 автомашин) и сообщит начальнику транспортного управления о своем выборе, то последний, *руководствуясь своими интересами*, должен будет предпочесть альтернативы 8 и 11 остальным, так как они приводят к наименьшим потерям для транспортного управления (—22). В этом случае доход предприятия будет не менее 74 единиц; гарантированный уровень возрастает вдвое по сравнению с максимином в чистом виде. (Если директор предприятия выберет первую альтернативу и сообщит о своем выборе начальнику транспортного управления, то тогда наилучшей альтернативой последнего будет посылка 4 автомашин; в этом случае доход предприятия равен 37, т. е. максимину в чистом виде.)

Исследования, связанные с систематическим применением принципа максимина в условиях обмена информацией между принимающими решения сторонами, были начаты советским математиком Ю. Б. Гермейером и продолжаются его учениками (популярное изложение некоторых результатов этого направления содержится в [2]). Принцип максимина для задач принятия решений, в которых предпочтения заданы при помощи отношений, будет рассмотрен в § 17.

6. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ. ОПТИМАЛЬНОСТЬ В ФОРМЕ РАВНОВЕСИЯ

1. Принцип равновесия по Нэшу. Напомним, что теоретико-игровая модель (короче, игра) является моделью принятия решения в условиях конфликта. Этот конфликт обусловлен тем, что исход определяется совместными действиями нескольких сторон, преследующих различные цели. Такая обстановка при принятии решения является настолько типичной (подчеркнем, что в свете сказанного в § 3 стороны, оказывающие влияние на исход, не нужно понимать непременно как обладающие сознанием), что практически любую достаточно сложную ситуацию принятия решения можно представить как теоретико-игровую; поэтому не случайно теоретико-игровые подходы занимают важнейшее место в современных исследованиях по принятию оптимальных решений.

В теоретико-игровых моделях принято стороны, принимающие решения, называть **и г р о к а м и**, а выбираемые ими действия — **с т р а т е г и я м и**. Если число игроков равно двум и исходы оцениваются численно (каждый игрок дает свою оценку исходу), то получается так называемая биматричная игра; ее удобно задавать

Таблица 9

	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	(a_{11}, b_{11})	...	(a_{1j}, b_{1j})	...	(a_{1m}, b_{1m})
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	(a_{i1}, b_{i1})	...	(a_{ij}, b_{ij})	...	(a_{im}, b_{im})
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_n	(a_{n1}, b_{n1})	...	(a_{nj}, b_{nj})	...	(a_{nm}, b_{nm})

таблицей вида табл. 9, в первый столбец которой выписаны стратегии игрока 1, а в первую строку — стратегии игрока 2. Каждый игрок независимо от другого производит выбор своей стратегии (можно считать, например, что игроки производят выбор стратегий одновременно); если игрок 1 выбрал стратегию x_i, а игрок 2 — стратегию y_j, то получающийся при этом исход оценивается первым игроком числом a_{ij}, а вторым — числом b_{ij}; эти числа, называемые соответственно **выигрышем** игрока 1 и игрока 2, записаны в табл. 9 на пересечении i-й строки и j-го столбца. Всякую пару стратегий (x_i, y_j) принято называть **ситуацией** в игре. В этом параграфе мы будем вести анализ игр «на языке ситуаций».

Пример 9 (два барана). Всем памятна печальная история, приключившаяся с двумя баранами, которые, сойдясь на узком мостике через речку, не сумели найти разумного решения и, столкнувшись лбами, оба свалились в воду. Сходная картина наблюдается подчас и в жизни в самых разнообразных вариантах; мы проанализируем ее применительно к уличному движению. Итак, к нерегулируемому перекрестку едут на высокой скорости под прямым углом друг к другу два автомобиля (рис. 9). У каждого водителя есть две стратегии: 1) снизить скорость до безопасной (безопасная стратегия) и 2) ехать на высокой скорости (рискованная стратегия).

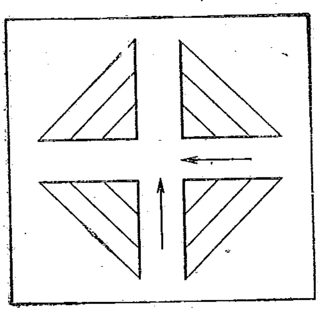


Рис. 9

Ситуация, в которой оба водителя выбирают безопасные стратегии, приводит к благополучному исходу, оцениваемому для каждого водителя в 1; если оба водителя выбирают рискованную стратегию, то происходит столкновение, последствия которого оцениваются для каждого из них отрицательным числом —9. Если один из них уступит, снизив скорость, в то время как другой продолжает ехать на высокой скорости, то такой исход оценивается числом 0 для снизившего скорость (за «потерю престижа»), а для другого водителя — числом 3 (за «повышение престижа»). Получаем в итоге биматричную игру размерности 2×2, в которой водители выступают в качестве игроков, Б и Р — безопасная и рискованная стратегии игроков (табл. 10).

Таблица 10

	Б	Р
Б	(1,1)	(0,3)
Р	(3,0)	(—9, —9)

Проанализируем ситуации этой игры с точки зрения их устойчивости. Ситуация (Б, Б) является неустойчивой, так как в этой ситуации, например, игрок 1 может получить лучший для себя исход, изменив стратегию Б на стратегию Р, — он получит выигрыш 3 вместо 1. То же самое справедливо в ситуации (Б, Б) и для игрока 2. Точно так же неустойчивой является и ситуация (Р, Р). Итак, *неустойчивость какой-либо ситуации проявляется в том, что в случае ее возникновения ей грозит распад, который обусловлен возможностями одного из игроков получить лучший для себя исход путем одностороннего изменения своей стратегии.*

Ситуации (Б, Р) и (Р, Б), напротив, обе являются устойчивыми: если они возникли, то ни у одного из игроков нет оснований отходить от них, односторонне изменив свою стратегию. Устойчивость, например, ситуации (Б, Р) проявляется в «физическом» отношении в том, что каждый из водителей, узнав о стратегии другого, будет придерживаться выбранной им стратегии: первый будет продолжать ехать на низкой скорости, а второй — на высокой.

Описанные в примере 9 устойчивые ситуации называются в теории игр **ситуациями равновесия** (или равновесными в смысле Нэша — по имени американского математика Джона Нэша). В общем случае для биматричной игры, заданной в виде табл. 9, равновесность ситуации (x_{i_0}, y_{j_0}) означает, что для всех $i=1, \ldots, n, j=1, \ldots, m$

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0}, \quad b_{i_0j} \leqslant b_{i_0j_0}. \tag{6}$$

Равновесные ситуации можно рассматривать как оптимальные совместные решения, причем оптимальность равновесной ситуации проявляется в отношении ее устойчивости.

Возникает, однако, вопрос: а насколько хороши равновесные ситуации в других отношениях, прежде всего в отношении выигрышей игроков? Ведь каждый игрок может рассматривать выбор своей стратегии как принятие решения в условиях неопределенности (при этом другой игрок выступает в качестве среды) и может выбрать, например, свою максиминную стратегию, гарантирующую ему независимо от действий другого игрока максимин. Не получит ли он в таком случае больший выигрыш, чем в ситуации равновесия? Оказывается, что нет, и в этом очень легко убедиться. Действительно, пусть (x_{i_0}, y_{j_0}) — ситуация равновесия биматричной игры, представленной табл. 9, и x_{i_1} — максиминная стратегия игрока 1. Тогда $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i_1 j}$, откуда, используя определение ситуации равновесия, получаем

$$a_{i_0 j_0} \geqslant a_{i_1 j_0} \geqslant \min_j a_{i_1 j} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Аналогично $b_{i_0 j_0} \geqslant \max_j \min_i b_{ij}$.

Таким образом, *в ситуации равновесия каждый из игроков имеет выигрыш, не меньший, чем «свой» максимин.* Казалось бы, что все в порядке, но тут нас подстерегает довольно серьезная неприятность, состоящая в том, что *компоненты ситуаций равновесия могут не составить снова ситуации равновесия.* Вначале это утверждение кажется парадоксальным: если (x_{i_0}, y_{j_0}) — ситуация равновесия, то ее компоненты x_{i_0} и y_{j_0}; составляя их, получаем ту же ситуацию (x_{i_0}, y_{j_0}). Но все дело в том, что ситуаций равновесия в игре может быть несколько. В рассмотренном выше примере 9 было две ситуации равновесия (Р, Б) и (Б, Р); взяв от первой ситуации первую компоненту, а от второй — вторую, получим неравновесную ситуацию (Р, Р), приводящую к тому же к наихудшему для обоих игроков исходу (именно так поступили два барана, хотя неизвестно, руководствовались ли они концепцией равновесия).

Указанное выше обстоятельство можно пояснить геометрически следующим образом. Представим стратегии игрока 1 точками горизонтального отрезка, а стратегии игрока 2 — точками вертикального отрезка (см. рис. 10), тогда все ситуации представляются точками прямоугольника. Множество всех ситуаций равновесия игры образует некоторую область D внутри этого прямоугольника (которая может быть и пустой). Очевидно, что требование, чтобы всякая ситуация, составленная из компонент ситуаций равновесия, снова была ситуацией равновесия, означает с геометрической точки зрения, что область D имеет вид прямоугольника (рис. 10,*б*); такое множество ситуаций равновесия называется поэтому п р я м о у г о л ь н ы м (заметим, что множество, состоящее из единственной ситуации равновесия, является прямоугольным). Если же множество ситуаций равновесия не является прямоугольным, то выбор игроком 1 стратегии, являющейся первой компонентой некоторой ситуации равновесия, не гарантирует образования равновесной

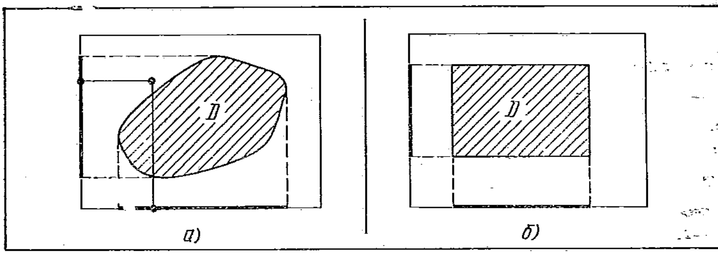


Рис. 10

ситуации, даже если игрок 2 также выберет стратегию, являющуюся второй компонентой некоторой ситуации равновесия (рис. 10,*а*). Так как в общем случае множество ситуаций равновесия биматричной игры не является прямоугольным (см. пример 9), то можно сделать вывод, что *оптимальность в форме равновесия относится именно к ситуациям, а не к их компонентам — стратегиям игроков.*

Рассмотрим один важный класс игр, для которых компоненты ситуаций равновесия являются в определенном смысле оптимальными решениями. Биматричная игра называется п о ч т и а н т а г о н и с т и ч е с к о й, если при переходе от одной ситуации к другой увеличение выигрыша одного из игроков сопровождается уменьшением выигрыша другого:

$$a_{ij} \geqslant a_{i'j'} \Longleftrightarrow b_{ij} \leqslant b_{i'j'}. \qquad (7)$$

Множество ситуаций равновесия почти антагонистической игры обладает следующим важным свойством: во-первых, оно является прямоугольным и, во-вторых, для каждого из игроков его выигрыш в любой ситуации равновесия один и тот же. Действительно, пусть (x_{i_1}, y_{j_1}) и (x_{i_2}, y_{j_2}) — две ситуации равновесия почти антагонистической игры. Рассмотрим часть таблицы игры, образованную строками i_1, i_2 и столбцами j_1, j_2 (табл. 11). Так как (x_{i_1}, y_{j_1})—ситуация равновесия, то согласно (6) $b_{i_1j_2} \leqslant b_{i_1j_1}$, значит, по условию почти антагонистичности $a_{i_1j_2} \geqslant a_{i_1j_1}$. Далее, так как (x_{i_2}, y_{j_2}) — ситуация равновесия, то $a_{i_1j_2} \leqslant a_{i_2j_2}$. Получаем $a_{i_1j_1} \leqslant a_{i_1j_2} \leqslant a_{i_2j_2}$, откуда $a_{i_1j_1} \leqslant a_{i_2j_2}$. Но ввиду равноправия ситуаций (x_{i_1}, y_{j_1}) и (x_{i_2}, y_{j_2}) выполняется и обратное неравенство $a_{i_2j_2} \leqslant a_{i_1j_1}$, поэтому $a_{i_1j_1} = a_{i_1j_2} = a_{i_2j_2}$. Аналогично $b_{i_1j_1} = b_{i_1j_2} = b_{i_2j_2}$. Получаем, что (x_{i_1}, y_{j_2}) — ситуация равновесия, причем выигрыши игроков в этой ситуации те же, что и в ситуации равновесия (x_{i_1}, y_{j_1}). Таким образом, сформулированное выше свойство ситуаций равновесия почти антагонистической игры доказано.

Предположим теперь, что игрок 1 использует стратегию x_{i_1} (являющуюся первой компонентой ситуации равновесия). Тогда для любого $j = 1, \ldots, m$ выполняется $b_{i_1j} \leqslant b_{i_1j_1}$ и по условию (7) $a_{i_1j} \geqslant a_{i_1j_1}$. Но, как мы знаем, выигрыш игрока в ситуации равновесия не меньше, чем его максимин, поэтому, обозначая $m_1=$

Таблица 11

	y_{j_1}	...	y_{j_2}
x_{i_1}	$(a_{i_1j_1}, b_{i_1j_1})$	...	$(a_{i_1j_2}, b_{i_1j_2})$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_{i_2}	$(a_{i_2j_1}, b_{i_2j_1})$	...	$(a_{i_2j_2}, b_{i_2j_2})$

$=\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, получаем $a_{i_1j} \geqslant m_1$. Полученное неравенство означает, что *в почти антагонистической игре применение игроком стратегии, являющейся компонентной ситуации равновесия, гарантирует ему по крайней мере его максимин.*

2. Некоторые особенности принципа равновесия. При анализе теоретико-игровой модели предполагается, что каждый игрок производит выбор своей стратегии независимо от других, не взаимодействуя с ними, и в частности, не имея никакой информации о принятых ими решениях. На первый взгляд может показаться, что это предположение сильно суживает возможности применения теоретико-игровых моделей, ибо в реальных конфликтах принимающие решения стороны имеют, как правило, некоторую информацию о решениях других сторон (даже на войне о планах противника доносит разведка). Однако область использования теоретико-игровых моделей можно расширить, введя искусственные стратегии, построенные с учетом возможностей обмена информацией между сторонами о принятых ими решениях.

Проиллюстрируем это положение на таком примере. В задаче о вывозе продукции (пример 8) мы ввели следующий способ обмена информацией между принимающими решения сторонами: директор предприятия выбирает решение и сообщает о своем выборе начальнику транспортного управления, а последний производит свой выбор, зная решение, принятое директором предприятия. Однако в приведенной схеме принятия решения ничего по существу не изменится, если считать, что начальник транспортного управления, не зная решения, принятого директором предприятия, принимает условное решение типа: «если директор предприятия выберет такой-то вариант, то я выберу такой-то». Если обозначить через X первоначальное множество стратегий директора предприятия, а через Y первоначальное множество стратегий начальника транспортного управления, то принятие таких условных решений означает, с формальной точки зрения, что в качестве стратегий начальника транспортного управления выступают не элементы множества Y, а отображения множества X в множество Y (множество всех таких отображений принято обозначать через Y^X). В итоге получаем игру, в которой множествами стратегий игроков являются X и Y^X и выбор своих стратегий производится игроками уже независимо друг от друга. Сходный прием можно применить и при более сложных способах обмена информацией между принимающими решения сторонами; требуется лишь, чтобы схема обмена информацией была фиксирована.

Еще одну особенность принципа оптимальности в форме равновесия, также связанную с возможностью обмена информацией между игроками, мы обсудим на следующем примере.

Пример 10 (дилемма бандита; другое название — «дилемма заключенного», см. [6]). Полиция подозревает двух бандитов, находящихся в предварительном заключении, в совместном совершении преступления, но их вина не доказана. Каждый из бандитов имеет две стратегии: признаться в совершении преступления или не признаться. Если ни один из них не признается, то их вина не может быть доказана, и тогда им будет предъявлено обвинение в совершении менее серьезного преступления и они оба получат незначительное наказание — потери каждого оцениваются в этом случае отрицательным числом —1; если оба признаются, то оба получат серьезное наказание — потери каждого оцениваются —7; наконец, если один признается, а другой нет, то признавшийся получает свободу (потери равны нулю), а его сообщник — максимальное наказание (потери оцениваются —10). Получаем в итоге биматричную игру, представленную табл. 12 (П — признание, Н — непризнание).

В этой игре имеется единственная ситуация равновесия (П, П) — признание обоих, однако выбор ситуации (П, П) вызывает очевидное возражение, так как обоим выгоднее ситуация (Н, Н), в которой ни один не признается, тогда потери каждого равны —1 вместо —7. Но для такого выбора бандитам необходимо договориться друг с другом (что заведомо невозможно, если они не могут обмениваться информацией, например, заключены в разные камеры), в противном случае каждый из них будет опасаться выбора стратегии непризнания: если другой выберет стратегию признания, тогда он «спасет» себя и «погубит» избравшего стратегию непризнания. Таким образом, при невозможности обмена информацией выбор ситуации (П, П) все же следует признать обоснованным.

Рассмотрим теперь вариант, при котором обмен информацией разрешен. Предположим, что бандиты совместно обсуждают свой выбор, тогда, скорее всего, они отбросят ситуацию (П, П) (поскольку эта ситуация может быть улучшена сразу для обоих) и сосредоточат свое внимание на неулучшаемых (сразу для обоих) ситуациях (Н, Н), (Н, П), (П, Н), т. е. именно эти ситуации естественно рассматривать как «предмет договора». Какая из этих трех ситуаций будет выбрана, это зависит от «соотношения сил» между договаривающимися сторонами: при равенстве сил будет, по-видимому, выбрана ситуация (Н, Н), при явном превосходстве первого — ситуация (П, Н), а при явном превосходстве второго—ситуация (Н, П). Подчеркнем еще раз, что эти ситуации характеризуются тем, что они не могут быть улучшены сразу для обоих, но так как ни одна из них не является равновесной по

Таблица 12

	Н	П
Н	(—1, —1)	(—10, 0)
П	(0, —10)	(—7, —7)

Нэшу, то договор о выборе любой из этих ситуаций будет неустойчивым: по крайней мере одной стороне выгодно одностороннее отклонение от него.

Ситуации, которые являются неулучшаемыми сразу для всех игроков, называются оптимальными по Парето. Анализ «дилеммы бандита» показывает, что между оптимальностью по Нэшу и оптимальностью по Парето имеется определенное противоречие: ситуация (П, П) оптимальна по Нэшу, но не оптимальна по Парето, а остальные три ситуации оптимальны по Парето, но не оптимальны по Нэшу. Всякая Парето-оптимальная ситуация, будучи неулучшаемой для всех игроков сразу, является, таким образом, максимально выгодной для коалиции, содержащей всех игроков, однако она может оказаться невыгодной для одного (или нескольких) из этих игроков. Поэтому выбор игроками Парето-оптимальной ситуации предполагает их взаимодействие (в частности, обмен информацией между ними о принимаемых решениях), в результате которого «коллективный» интерес коалиции всех игроков ставится выше интересов отдельного игрока. Если же выбор своих стратегий игроками производится без взаимодействия, то игроки руководствуются только «личными» интересами; в этом случае можно рассчитывать лишь на выбор ими ситуации, оптимальной по Нэшу. Переведем теперь эти рассуждения на «язык систем».

Будем считать систему *децентрализованной*, если информационные связи между ее подсистемами настолько слабы, что ими можно пренебречь в плане их влияния на выбор совместного решения этих подсистем. Для децентрализованной системы наиболее естественным принципом оптимальности является оптимальность в форме равновесия по Нэшу. На другом «полюсе» находятся *централизованные* системы, т. е. такие системы, подсистемы которых имеют неограниченные возможности обмена информацией о принимаемых решениях. Для централизованной системы кроме оптимальности в форме равновесия имеет смысл еще один тип оптимальности — оптимальность по Парето.

Вспомним, что мы уже встречались с понятием оптимальности по Парето при рассмотрении многокритериальных задач принятия решений (см. § 4, п. 2). Вообще, стóит отметить, что задача оптимизации централизованной системы, состоящей из преследующих свои цели подсистем, с содержательной точки зрения аналогична многокритериальной задаче принятия решения. Это положение можно проиллюстрировать таким примером. Предположим, что на совещании «за круглым столом» происходит обсуждение, какую модель автомобиля принять к производству. Если каждый участник совещания заинтересован в улучшении только одного показателя (один — в увеличении срока службы автомобиля, другой — в повышении его надежности, третий — в увеличении его максимальной скорости, четвертый — в улучшении внешнего вида и т. д.), то мы имеем задачу оптимизации системы, состоящей из целенаправленных подсистем. С другой стороны, эту ситуацию можно представить таким образом, что Некто (например, директор предприятия, выпускающего автомобили) имеет целью улучшение сразу всех этих показателей; получаем тогда многокритериальную задачу принятия решения.

Для систем, состоящих из целенаправленных подсистем, указанное выше противоречие между оптимальностью по Нэшу и оптимальностью по Парето проявляется в том, что состояния системы, оптимальные по одному принципу, могут быть неоптимальными по другому. Скажем, у системы, находящейся в Парето-оптимальном состоянии, т. е. в состоянии, переход из которого в любое другое состояние не может улучшить показатели «полезности» *сразу всех* ее подсистем, может оказаться такая подсистема, для которой переход в некоторое новое состояние улучшает показатель «полезности» *этой* подсистемы. При этом, как следует из условия Парето-оптимальности, такой переход будет сопровождаться ухудшением показателя «полезности» хотя бы одной другой подсистемы.

В существовании противоречия между оптимальностью по Парето и оптимальностью по Нэшу нет никакого парадокса, так как эти типы оптимальности имеют разные «идейные основания»: основой оптимальности по Парето является *выгодность для системы в целом*, понимаемая как выгодность сразу для всех ее подсистем, а основой оптимальности по Нэшу является *устойчивость системы*, обусловленная интересами и возможностями отдельных ее подсистем. Короче, противоречие между оптимальностью по Парето и оптимальностью по Нэшу есть противоречие между выгодностью и устойчивостью.

Таким образом, для систем, состоящих из целенаправленных подсистем, нет единого понятия оптимальности, поэтому оптимизации таких систем должен предшествовать выбор принципа оптимальности.

В заключение данного параграфа отметим еще одну важную особенность принципа оптимальности в форме равновесия. До сих пор мы не затрагивали вопроса *существования* ситуаций равновесия в произвольной биматричной игре; между тем, как видно из простейших примеров, ситуаций равновесия может и не быть. Выход из этого положения был найден довольно неожиданный: вводится новый способ выбора стратегий, состоящий в том, что стратегии выбираются не путем их явного указания, а случайным образом, но так, чтобы каждая стратегия имела определенную вероятность быть выбранной. Пусть, например, множество, из которого производится выбор, состоит из трех элементов: $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, при этом вероятность выбора x_1 равна $1/2$, вероятность выбора x_2 равна $1/3$ и вероятность выбора x_3 равна $1/6$. Рассмотрим физический механизм, представляющий собой свобод-

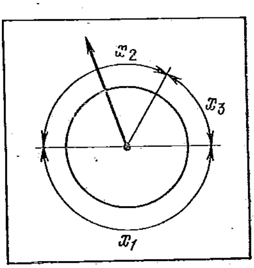


Рис. 11

но вращающуюся вокруг неподвижной оси стрелку, а окружность разбита на три дуги x_1, x_2, x_3, длины которых пропорциональны числам 1/2, 1/3, 1/6 (рис. 11). Если придать стрелке вращение, то вероятность того, что она остановится в секторе x_1, x_2, x_3, равна соответственно 1/2, 1/3, 1/6. Таким образом, данный механизм реализует случайный выбор элементов x_1, x_2, x_3 с вероятностями соответственно 1/2, 1/3, 1/6.

Рассмотрим теперь биматричную игру, в которой $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество стратегий игрока 1, $Y=\{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество стратегий игрока 2, f_k — функция выигрыша игрока $k=1, 2$. Пусть игрок 1 производит выбор своей стратегии случайно, причем вероятность выбора стратегии x_i равна p_i $\left(p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$. Тогда можно считать, что он производит выбор (но уже неслучайно!) системы неотрицательных чисел $p_1, \ldots, p_n$ $\left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$; такая система чисел носит название **смешанной стратегии**.

Таким образом, допущение случайного выбора игроками своих стратегий означает фактически замену первоначальных множеств стратегий игроков множествами смешанных стратегий. Пусть игрок 1 выбрал смешанную стратегию $p=(p_1, \ldots, p_n)$, а игрок 2 — смешанную стратегию $q=(q_1, \ldots, q_m)$. Если игроки производят свой выбор независимо друг от друга, тогда вероятность того, что одновременно игрок 1 выберет стратегию x_i, а игрок 2 — стратегию y_j (т. е. вероятность ситуации (x_i, y_j)), равна произведению $p_i \cdot q_j$, причем в этой ситуации игрок 1 получает выигрыш $f_1(x_i, y_j)$, а игрок 2 — выигрыш $f_2(x_i, y_j)$. В качестве выигрышей игроков при выборе ими смешанных стратегий p и q берутся математические ожидания:

для игрока 1

$$M(p, q) = \sum_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, m}} p_i \cdot q_j \cdot f_1(x_i, y_j),$$

для игрока 2

$$M(p, q) = \sum_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, m}} p_i \cdot q_j \cdot f_2(x_i, y_j).$$

В итоге мы получаем новую игру, в которой стратегиями игроков являются их смешанные стратегии, M и N — функции выигрыша. Такая игра носит название **смешанного расширения** первоначальной игры. Одним из основных результатов теории игр является доказанная в 1951 г. американским математиком Дж. Нэшем теорема, согласно которой *для всякой биматричной игры существует ситуация равновесия в ее смешанном расширении.*

Глава III

АППАРАТ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ

Дальнейшее содержание книги относится к задачам принятия решений, в которых цели формализуются посредством задания связанных с ними отношений предпочтения. В настоящей главе вводятся необходимые для дальнейшего понятия и результаты теории отношений; изложение этого материала проведено независимо от предыдущих глав.

7. СОДЕРЖАТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ОТНОШЕНИЙ

1. **Способы задания отношений.** Свойства предметов окружающего мира мы можем разделить на два типа: свойства первого типа могут быть отнесены к отдельным предметам, например «быть высоким» (о человеке), «быть четным» (о числе), «быть сделанным из железа», «быть красным». Свойства второго типа могут быть отнесены лишь к наборам предметов, например, свойство «быть родственником» относится к парам людей, свойство «быть больше» — к парам чисел, «находиться между» — к тройкам предметов и т. д. Свойства второго типа принято называть о т н о ш е н и я м и. При этом свойства, относимые к парам предметов, называются б и н а р н ы м и о т н о ш е н и я м и, к тройкам предметов — т е р н а р н ы м и о т н о ш е н и я м и, вообще, свойства, относимые к наборам, состоящим из n предметов, называются n-а р н ы м и о т н о ш е н и я м и; n может быть любым натуральным числом. В дальнейшем для нас наибольший интерес будут представлять бинарные отношения (ради краткости будем называть их иногда «отношениями»).

В соответствии с принятым в логике принципом, по которому можно проводить изучение понятия по его объему, будем в дальнейшем отождествлять отношение с его объемом. Например, отношение «быть родственником» отождествляется с множеством пар людей, которые являются друг другу родственниками, отношение «быть больше» — с множеством пар чисел, для которых первая компонента пары больше второй. Таким образом, *бинарное отношение можно определить как множество, состоящее из пар элементов.*

Пара, состоящая из элементов a и b, записывается в виде (a, b), причем a называется первой, а b — второй компонентой этой пары. Отметим, что порядок компонент в паре существенен, т. е. при $a \neq b$ пары (a, b) и (b, a) считаются различными; это обстоятельство подчеркивают иногда словесно, говоря об упорядоченной паре. Обычно бинарные отношения обозначают греческими буквами ρ, σ, τ и др. Запись $(a, b) \in \rho$ кроме прямого способа чтения — «пара (a, b) принадлежит отношению ρ» — читают также и так: a находится с b в отношении ρ. (Иногда знак отношения помещают между элементами, т. е. пишут $a\rho b$ вместо $(a, b) \in \rho$).

Если все элементы, являющиеся первыми компонентами упорядоченных пар, входящих в отношение ρ, принадлежат некоторому множеству A, а элементы, являющиеся вторыми компонентами, — некоторому множеству B, то в этом случае говорят, что ρ

является отношением между элементами множеств A и B; если при этом $A=B$,— то отношением на множестве A. Будем в дальнейшем обозначать через $A\times B$ множество, состоящее из всех упорядоченных пар вида (a, b), где $a\in A$ и $b\in B$. Тогда всякое бинарное отношение между элементами множеств A и B является подмножеством множества $A\times B$ и обратно, если $\rho\subset A\times B$, то ρ есть бинарное отношение между элементами множеств A и B. Конечно, всякое бинарное отношение ρ можно «превратить» в бинарное отношение между элементами некоторых множеств[1] A и B: проще всего в качестве A взять множество всех первых компонент, а в качестве B — множество всех вторых компонент упорядоченных пар, принадлежащих отношению ρ. Далее, полагая $C=A\cup B$, получаем, что $\rho\subset C\times C$, т. е. *всякое отношение можно считать отношением на некотором множестве.*

Бинарное отношение можно задать, перечисляя все входящие в него пары (если отношение состоит из конечного числа пар) или указывая общее свойство пар, принадлежащих этому отношению, например

$\rho_1=\{(p, r), (s, q), (r, p), (p, p), (s, r), (p, s)\}$;

$\rho_2=\{(n, m)\in N\times N \mid n$ является делителем m, где N — множество натуральных чисел$\}$.

Для бинарных отношений на конечных множествах используются еще два следующих способа задания.

1. *С помощью графа.* Пусть ρ — бинарное отношение на множестве A. Изобразим элементы множества A в виде точек на плоскости. Для двух точек a, b проводим стрелку $\rightarrow$ из a в b тогда и только тогда, когда $(a, b)\in\rho$. При этом, если одновременно $(a, b)\in\rho$ и $(b, a)\in\rho$, то точки a и b соединяются стрелкой $\longleftrightarrow$, а если $(a, a)\in\rho$, то в точке a изображается петля. На рис. 12 нарисован граф заданного выше отношения ρ_1. При представлении отношения с помощью графа принято точки, изображающие элементы множества A, называть вершинами графа, а стрелки — его дугами; пары (a, b), принадлежащие отношению ρ, иногда называют дугами отношения ρ. Граф отношения ρ, заданного на множестве A, будем записывать в виде пары (A, ρ).

2. *С помощью булевых матриц.* Пусть $\rho\subset A\times B$, где $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$; $B=\{b_1, \ldots, b_m\}$. Рассмотрим $n\times m$-матрицу (таблицу), в начальный столбец которой выписаны элементы множества A, а в начальную строку — элементы множества B. На пересе-

[1] Следует обратить внимание на то, что между понятиями «бинарное отношение» и «бинарное отношение между элементами данных множеств» имеется определенная разница, приблизительно такая же, как между понятиями «множество» и «подмножество данного множества».

чении строки элемента a_i и столбца b_j записывается 1, если $(a_i, b_j) \in \rho$, и 0 в противном случае. Такая таблица называется **булевой матрицей отношения**; булева матрица отношения ρ_1, заданного на стр. 42, дается табл. 13.

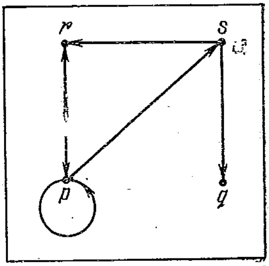


Рис. 12

Пусть ρ — произвольное бинарное отношение между элементами множеств A и B, $a \in A$. Множество тех элементов, с которыми элемент a находится в отношении ρ, называется **срезом** (или сечением) отношения ρ через элемент a и обозначается через $\rho(a)$. Если бинарное отношение ρ представлено с помощью графа, то $\rho(a)$ состоит из тех вершин, в которые из вершины a идет стрелка. Подчеркнем, что срез отношения через элемент — это некоторое множество, которое может содержать несколько элементов, один элемент и ни одного (пустое).

2. **Операции над отношениями.** Так как бинарные отношения являются множествами, то к ним применимы все понятия, которые вводятся для множеств: понятия равенства, включения, а также операции пересечения, объединения и дополнения. В частности, для двух бинарных отношений ρ и σ включение $\rho \subset \sigma$ понимается таким образом, что всякая упорядоченная пара элементов, принадлежащая отношению ρ, принадлежит и отношению σ; равенство $\rho = \sigma$ означает, что отношения ρ и σ состоят из одних и тех же упорядоченных пар. Пересечения $\rho \cap \sigma$ отношений ρ и σ есть новое отношение, состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих обоим отношениям одновременно; объединение $\rho \cup \sigma$ отношений ρ и σ состоит из упорядоченных пар, принадлежащих хотя бы одному из этих отношений; разность отношений ρ и σ, обозначаемая через $\rho \setminus \sigma$, есть множество упорядоченных пар, принадлежащих отношению ρ и не принадлежащих отношению σ. Если ρ — бинарное отношение между элементами множеств A и B, то его дополнением (относительно $A \times B$) называется разность $A \times B \setminus \rho$.

Вводятся также операции объединения и пересечения произвольных семейств отношений. Если $(\rho_i)_{i \in I}$ — семейство отношений, то объединение этого семейства есть отношение $\bigcup_{i \in I} \rho_i$, состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих хотя бы одному из отношений ρ_i, а пересечение этого семейства — отношение $\bigcap_{i \in I} \rho_i$, состоящее из упорядоченных пар, принадлежащих всем отношениям ρ_i.

Отметим, что приведенные выше определения являются просто перефразировками соответствующих определений для обычных множеств и все свойства теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения, имеющие место для произвольных множеств, выполняются и для отношений. Кроме теоретико-множестввенных операций для отношений вводятся некоторые дополнительные операции, которые связаны с их специфической структурой (проявляющейся в том, что все элементы отношений суть упорядоченные пары). Мы рассмотрим две таких операции.

1. *Обращение отношений.* Если в каждой упорядоченной паре, принадлежащей отношению ρ, поменять местами первую и вторую компоненту, то получим новое отношение, которое называется обратным для отношения ρ и обозначается через ρ^{-1}. Например, для отношения ρ_1, введённого на стр. 42, имеем

$$\rho_1^{-1}=\{(r,\ p),\ (q,\ s),\ (p,\ r),\ (p,\ p),\ (r,\ s),\ (s,\ p)\}.$$

Ясно, что граф отношения ρ^{-1} получается из графа отношения ρ переориентацией всех стрелок; если отношение ρ задано с помощью булевой матрицы, то, поменяв в ней ролями строки и столбцы, получим булеву матрицу отношения ρ^{-1}.

2. *Умножение отношений.* Назовем две упорядоченные пары вида $(a,\ b)$, $(b,\ c)$ примыкающими (т. е. одна упорядоченная пара примыкает к другой, если первая компонента второй упорядоченной пары совпадает со второй компонентой первой упорядоченной пары). Для двух примыкающих упорядоченных пар $(a,\ b)$ и $(b,\ c)$ их произведением считается упорядоченная пара $(a,\ c)$. Говоря образно, результат произведения примыкающих пар получается «выбрасыванием» элемента, по которому происходит примыкание, и «смыканием» оставшихся компонент этих пар.

Пусть теперь ρ и σ — два бинарных отношения. Произведением отношения ρ на отношение σ называется новое отношение, состоящее из результатов произведений всех таких примыкающих пар, первая из которых принадлежит отношению ρ, а вторая — отношению σ. Произведение отношения ρ на отношение σ обозначается через $\rho\cdot\sigma$. Таким образом, условие $(a,\ c)\in\rho\cdot\sigma$ означает, что для некоторого элемента b выполняется $(a,\ b)\in\rho$ и $(b,\ c)\in\sigma$. Произведение отношений вообще не коммутативно (т. е. зависит от порядка сомножителей), но ассоциативно (см., например, [14]): для любых трех отношений ρ, σ, τ выполняется $(\rho\cdot\sigma)\cdot\tau=\rho\cdot(\sigma\cdot\tau)$. Ввиду ассоциативности произведения отношений единственным образом определено n-кратное произведение отношения ρ самого на себя, обозначаемое через ρ^n. Если отношешения ρ и σ заданы с помощью графов, то принадлежность пары $(a,\ c)$ к произведению $\rho\cdot\sigma$ означает, что из вершины a в вершину c можно попасть за два шага, причем первый делается по дуге отношения ρ, а второй — по дуге отношения σ. Для выражения матрицы произведения двух отношений, заданных булевыми матрицами, введем понятие «булево сложение» $\oplus$, определив его так:

$$0\oplus 0=0 \qquad 1\oplus 0=1$$

$$0\oplus 1=1 \qquad 1\oplus 1=1.$$

Пусть теперь отношение ρ представлено булевой матрицей $U=\|u_{ij}\|$, а отношение σ — булевой матрицей $V=\|v_{jk}\|$ $(i, j, k=1, \ldots, n)$. Построим матрицу $W=\|w_{ik}\|$, где

$$w_{ik}=u_{i1}\cdot v_{1k}\oplus u_{i2}\cdot v_{2k}\oplus\ldots\oplus u_{in}\cdot v_{nk}.$$

Матрица W называется булевым произведением[1] матрицы U на матрицу V. Легко проверить, что W является булевой матрицей произведения $\rho\cdot\sigma$.

8. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ

Рефлексивность. Отношение ρ на множестве A называется рефлексивным, если каждый элемент множества A находится в отношении ρ сам с собой:

$(a, a)\in\rho$ для любого $a\in A$.

Если отношение представлено с помощью графа, то рефлексивность этого отношения означает, что в каждой вершине графа обязательно имеется петля; для отношения, заданного с помощью булевой матрицы, его рефлексивность равносильна тому, что по главной диагонали этой матрицы (идущей из ее левого верхнего угла в правый нижний) стоят только символы 1.

Абсолютно противоположным для рефлексивности является свойство антирефлексивности, которое определяется так: отношение ρ, заданное на множестве A, называется антирефлексивным, если ни один элемент из множества A не находится в отношении ρ с самим собой: $(a, a)\notin\rho$ для каждого $a\in A$. Конечно, отношение, не являющееся рефлексивным, не обязано быть антирефлексивным. Ясно, что если отношение рефлексивно на A, то, «выбросив» из него все пары вида (a, a), где $a\in A$, получим антирефлексивное отношение на A; обратно, если отношение антирефлексивно на A, то, «добавив» к нему все пары вида (a, a), получим рефексивное отношение. Таким способом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между рефлексивными и антирефлексивными отношениями на данном множестве, поэтому рассмотрение одних можно свести к рассмотрению других. Например,

---

[1] Видно, что булево произведение матриц отличается от произведения матриц, рассматриваемого в линейной алгебре, лишь заменой обычного сложения булевым.

отношение $\geqslant$ между действительными числами рефлексивно; соответствующим ему антирефлексивным отношением является отношение $>$.

Отметим, что свойства рефлексивности и антирефлексивности отношений относятся не только к рассматриваемому отношению, но и к множеству, на котором это отношение задано: одно и то же отношение может быть рефлексивным или нет в зависимости от того, на каком множестве это отношение рассматривается. Однако можно определить «внутренние» свойства рефлексивности и антирефлексивности так, чтобы они зависели только от самого отношения; это делается следующим образом. Назовем отношение ρ в н у т р е н н е р е ф л е к с и в н ы м, если

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow (a, a) \in \rho, \ (b, b) \in \rho,$$

и в н у т р е н н е а н т и р е ф л е к с и в н ы м, если

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow (a, a) \notin \rho, \ (b, b) \notin \rho.$$

Легко видеть, что, если в качестве множества A взять $\mathrm{pr}_1\rho \cup \mathrm{pr}_2\rho$ (т. е. множество тех элементов, которые «участвуют» в этом отношении в качестве первых или вторых компонент), то свойства рефлексивности и антирефлексивности отношения ρ на этом множестве A совпадут с соответствующими «внутренними» свойствами.

Симметричность. Отношение ρ называется с и м м е т р и ч н ы м, если вместе с каждой упорядоченной парой оно содержит и упорядоченную пару с переставленными компонентами:

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho.$$

В графе симметричного отношения все стрелки двойные (поэтому вместо стрелок можно рисовать просто отрезки прямых); матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали. С помощью операции обращения отношений условие симметричности отношения ρ можно записать в виде $\rho^{-1} = \rho$. Легко проверить

Предложение 1. *Объединение и пересечение любого семейства симметричных отношений снова является симметричным отношением.*

В определенном смысле противоположным для симметричности является свойство асимметричности. Отношение ρ называется а с и м м е т р и ч н ы м, если для всякой упорядоченной пары принадлежащей этому отношению, упорядоченная пара с переставленными компонентами не принадлежит этому отношению:

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \notin \rho.$$

С помощью операций над отношениями это условие можно записать так: $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$.

Более слабым требованием, чем асимметричность, является то, что допускается принадлежность к отношению ρ пар вида (a, b) и (b, a) лишь в случае $a = b$, т. е.

$$(a, b) \in \rho, \ (b, a) \in \rho \Rightarrow a = b.$$

Отношение ρ, удовлетворяющее этому условию, называется антисимметричным.

Пусть ρ — произвольное бинарное отношение. Отношение $\rho^s = \rho \cap \rho^{-1}$ называется симметричной частью отношения ρ, а отношение $\rho^* = \rho \setminus \rho^s$ — асимметричной частью отношения ρ. Граф отношения ρ^s получается из графа отношения ρ «сохранением» только двойных стрелок; напротив, граф отношения ρ^* получается из графа отношения ρ «выбрасыванием» двойных стрелок. Поэтому отношение ρ^s является всегда симметричным, а отношение ρ^* — асимметричным. Если отношение ρ само симметрично, то его симметричная часть совпадает с ним самим; аналогичное утверждение верно и для асимметричного отношения.

Транзитивность. Отношение ρ называется транзитивным, если вместе с двумя примыкающими парами оно содержит их произведение:

$$(a, b) \in \rho, \ (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho.$$

С помощью операций над отношениями условие транзитивности отношения ρ может быть записано в виде $\rho^2 \subset \rho$.

Для интерпретации условия транзитивности отношения, заданного с помощью графа, введем следующее понятие. Пусть (A, ρ) — произвольный граф. Последовательность (конечная или бесконечная) его вершин

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{8}$$

называется путем в графе (A, ρ), если каждая вершина этой последовательности состоит с следующей за ней вершиной в отношении ρ, т. е. если $(a_k, a_{k+1}) \in \rho$ для $k=0, 1, \ldots$; при этом a_0 называется начальной вершиной пути, а если последовательность (8) обрывается на элементе a_n, то a_n называется конечной вершиной пути и в этом случае говорят, что путь идет из вершины a_0 в вершину a_n. В графе, имеющем конечное число вершин, могут быть бесконечные пути, например в графе, изображенном на рис. 12, есть бесконечный путь $p, s, r, p, s, r \ldots$ Путь из a_0 в a_n иногда будем записывать в виде

$$a_0 \xrightarrow{\rho} a_1 \xrightarrow{\rho} \ldots \xrightarrow{\rho} a_n. \tag{9}$$

При этом для пути (9) число n называется длиной пути. Таким образом, длина пути равна числу стрелок в нем или, говоря образно, числу «шагов».

Говорят, что вершина b достижима из вершины a, если в графе (A, ρ) существует путь из a в b, т. е. путь вида

$$a = a_0 \xrightarrow{\rho} a_1 \xrightarrow{\rho} \ldots \xrightarrow{\rho} a_n = b.$$

Таблица 13

ρ	p	q	r	s
p	1	0	1	1
q	0	0	0	0
r	1	0	0	0
s	0	1	1	0

В дальнейшем будем через $\hat{\rho}$ обозначать отношение достижимости: $(a, b)\in\hat{\rho}$ тогда и только тогда, когда вершина b достижима из вершины a. Срез $\hat{\rho}(a)$ есть множество вершин, достижимых из вершины a. Отметим, что всегда $a\in\hat{\rho}(a)$, т. е. каждая вершина достижима из самое себя: соответствующий путь есть просто a (длина этого пути равна нулю).

Сформулируем теперь условие транзитивности отношения в терминах представляющего его графа. Для транзитивного отношения ρ, если в графе (A, ρ) существует путь из одной вершины в другую, то должен существовать путь между этими вершинами длиной 1. Другими словами, если из одной вершины графа в другую можно попасть за какое-то (конечное) число шагов, то можно попасть из начальной вершины в конечную и за один шаг. Действительно, первые два шага можно по условию транзитивности свести к одному, уменьшив тем самым общее число шагов на единицу; повторяя эту процедуру достаточное число раз, получаем, что из начальной вершины в конечную можно попасть за один шаг. Таким образом, в терминах достижимости условие транзитивности отношения ρ можно выразить следующим образом: *отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда для любых двух различных вершин a, $b\in A$ из того, что вершина b достижима из вершины a в графе (A, ρ), следует что вершина b достижима из a за один шаг, т. е. что $(a, b)\in\rho$.*

Отметим некоторые свойства транзитивных отношений.

Свойство 1. *Обращение транзитивного отношения транзитивно.* Действительно, пусть отношение ρ транзитивно и $(a, b)\in\rho^{-1}$, $(b, c)\in\rho^{-1}$. Тогда выполняется $(b, a)\in\rho$, $(c, b)\in\rho$; ввиду транзитивности отношения ρ получаем $(c, a)\in\rho$, т. е. $(a, c)\in\rho^{-1}$.

Свойство 2. *Пересечение любого семейства транзитивных отношений транзитивно.*

Доказательство. Возьмем семейство $(\rho_i)_{i\in I}$ транзитивных отношений и положим $\rho=\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i$. Пусть $(a, b)\in\rho$, $(b, c)\in\rho$. Это означает, что при любом индексе $i\in I$ имеет место $(a, b)\in\rho_i$ и $(b, c)\in\in\rho_i$; так как отношение ρ_i транзитивно, то $(a, c)\in\rho_i$. Эта принадлежность выполняется при любом $i\in I$, значит, $(a,c)\in\bigcap\limits_{i\in I}\rho_i=\rho$.

Для операции объединения аналогичный результат вообще неверен, вот простейший пример. Пусть $\rho_1=\{(a, b)\}$, $\rho_2=\{(b, c)\}$.

Отношения ρ_1 и ρ_2 транзитивны (так как не содержат примыкающих пар), но их объединение $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(a, b), (b, c)\}$ нетранзитивно. Введем следующий тип связи между двумя отношениями: отношение ρ назовем **транзитивным относительно отношения** σ, если

из $(a, b) \in \rho$, $(b, c) \in \sigma$ следует $(a, c) \in \rho$;

из $(a, b) \in \sigma$, $(b, c) \in \rho$ следует $(a, c) \in \rho$.

(Ясно, что транзитивность отношения ρ относительно самого себя есть обычная транзитивность отношения ρ.) Свойство транзитивности одного отношения относительно другого «навеяно» привычной связью строгого и нестрогого неравенства:

из $x > y$, $y \geqslant z$ следует $x > z$;

из $x \geqslant y$, $y > z$ следует $x > z$.

Легко проверить следующие два свойства.

Свойство 3. *Если два отношения транзитивны и одно из них транзитивно относительно другого, то объединение этих отношений транзитивно.*

Свойство 4. *Пусть ρ — транзитивное отношение. Тогда*

а) его симметричная часть ρ^s транзитивна;

б) его асимметричная часть ρ^* транзитивна;

в) ρ^* транзитивно относительно ρ^s.

Линейность. Отношение ρ на множестве A называется линейным, если для любых двух элементов $a, b \in A$ один из них находится в отношении ρ с другим: $(a, b) \in \rho$ или $(b, a) \in \rho$. На языке операций над отношениями свойство линейности отношения означает, что $\rho \cup \rho^{-1} = A \times A$

Хорошим примером линейного отношения является отношение $\geqslant$ на множестве действительных чисел: для любых двух действительных чисел x, y выполняется $x \geqslant y$ или $y \geqslant x$.

Отметим, что если отношение ρ на множестве A линейно, то оно рефлексивно: для любого элемента $a \in A$ должно выполняться $(a, a) \in \rho$ или $(a, a) \in \rho$, т. е. $(a, a) \in \rho$.

Дальнейшее выделение важных классов отношений производится с помощью комбинирования введенных выше свойств. Рассмотрим некоторые из таких классов отношений.

Отношения толерантности. Так называются отношения, которые одновременно рефлексивны и симметричны. Примером отношения толерантности между реальными объектами является так называемое отношение неразличимости, возникающее при измерении объектов: два объекта неразличимы (по некоторому признаку), если разница значений этого признака у объектов не превосходит погрешности измерения.

Отношения квазипорядка и порядка. Отношения, которые рефлексивны и транзитивны, называются **отношениями квазипорядка**. Пусть A — множество объектов, для каждого из которых определено m количественных признаков p_j $(j=1, \ldots, m)$ (значением каждого признака является число). Определим на множестве A отношение ρ: $(a, b) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $p_j(a) \geqslant p_j(b)$ для всех $j=1, \ldots, m$.

Из свойств рефлексивности и транзитивности отношения $\geqslant$ для действительных чисел сразу следует, что отношение ρ рефлексивно и транзитивно, т. е. является отношением квазипорядка. Если каждый признак p_j имеет не менее двух значений (а только такие признаки и имеет смысл рассматривать), то отношение ρ будет линейным тогда и только тогда, когда $m=1$, т. е. когда рассматривается единственный признак. Именно это обстоятельство предопределяет принципиальные трудности анализа принятия решений при наличии векторного критерия.

Если отношение квазипорядка удовлетворяет условию антисимметричности, то оно называется *отношением порядка* (или просто порядком). Определенное выше отношение квазипорядка ρ будет отношением порядка тогда и только тогда, когда у любых двух различных объектов из A хотя бы один признак имеет разные значения.

Отношения эквивалентности (короче, эквивалентности). Так называются бинарные отношения, которые обладают сразу тремя свойствами: рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью. Существует тесная связь между отношениями эквивалентности на множестве и разбиениями этого множества на попарно непересекающиеся классы (семейство $(C_i)_{i \in I}$ непустых подмножеств множества A называется *разбиением* множества A, если каждый элемент из A принадлежит точно одному подмножеству C_i. При этом подмножества C_i называются *классами разбиения*).

1. Пусть $(C_i)_{i \in I}$ — разбиение множества A. Тогда отношение ε, определенное на A следующим образом: $(a, b) \in \varepsilon$ тогда и только тогда, когда a и b находятся в одном классе разбиения, является отношением эквивалентности на множестве A.

2. Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на A. Поставим в соответствие каждому элементу $a \in A$ подмножество множества A, состоящее из тех элементов, которые находятся с элементом a в отношении ε (указанное подмножество есть не что иное, как срез (см. § 7, п. 1) $\varepsilon(a)$ отношения ε через элемент a). Тогда семейство подмножеств $(\varepsilon(a))_{a \in A}$ является разбиением множества A.

3. Построенное соответствие между разбиениями множества A и отношениями эквивалентности на A является взаимно-однозначным.

Когда говорят об отношении эквивалентности, соответствующем разбиению, или о разбиении, соответствующем отношению эквивалентности, то имеют в виду именно соответствие, определенное выше. При этом классы разбиения, соответствующего отношению эквивалентности ε, называют также классами отношения эквивалентности ε, а множество всех классов отношения эквивалентности ε называется **фактор-множеством** и обозначается через A/ε. В дальнейшем мы часто будем использовать следующий факт: если ε — отношение эквивалентности на A, то два элемента $a, a' \in A$ находятся в отношении ε тогда и только тогда, когда соответствующие им классы эквивалентности ε совпадают:

$$a, a') \in \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon(a) = \varepsilon(a').$$

Распространенным способом введения отношения эквивалентности на произвольном множестве A является следующий. Пусть задано отображение f множества A в некоторое множество B; положим $(a, a') \in \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $f(a) = f(a')$. Ясно, что ε — эквивалентность на A; будем называть ее **эквивалентностью по отображению** f.

Для произвольного отношения эквивалентности ε иногда пишут $a \overset{\varepsilon}{\equiv} a'$ вместо $(a, a') \in \varepsilon$ (или просто $a \equiv a'$, если ясно, о каком отношении эквивалентности идет речь).

9. ФАКТОРИЗАЦИЯ ОТНОШЕНИЙ

1. Понятие факторизации. Перенос свойств отношений на фактор-отношения. В этом параграфе мы рассмотрим общий метод переноса структуры отношения с одного множества на другое. Этот метод, называемый **методом факторизации отношений**, состоит в следующем. Пусть на множестве A задано отношение ρ. Возьмем какое-нибудь отношение эквивалентности ε на A (или, что фактически то же самое, разбиение множества A на попарно непересекающиеся классы, см. § 8). Определим на фактор-множестве A/ε бинарное отношение ρ/ε следующим образом:

$$(C_1, C_2) \in \rho/_\varepsilon \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \rho \text{ для некоторых } a_1 \in C_1,\ a_2 \in C_2$$
$$(C_1, C_2 \in A/_\varepsilon).$$

Таким образом, пара классов эквивалентности ε состоит в отношении $\rho/_\varepsilon$ тогда и только тогда, когда найдутся „представители" этих классов, состоящие в отношении ρ. Про отношение $\rho/_\varepsilon$ говорят, что оно получено в результате факторизации отношения ρ по эквивалентности ε; коротко $\rho/_\varepsilon$ называется **фактор-отношением**. Для пояснения смысла факторизации рассмотрим отношение ρ, представленное с помощью графа на рис. 13,*а*. Вершины, обведенные замкнутой линией, составляют классы эквивалентности ε; граф фактор-отношения изображен на рис. 13,*б*.

4*

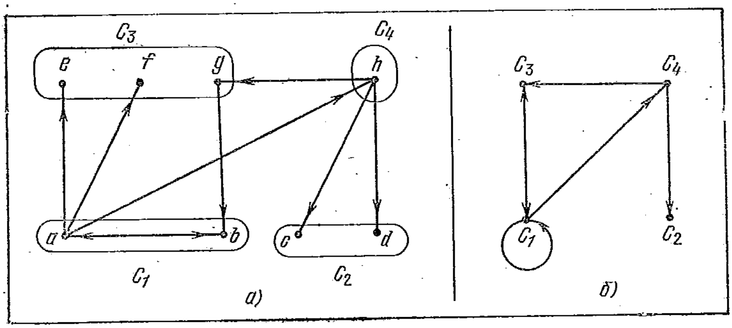


Рис. 13

Отметим следующее простое правило построения графа фактор-отношения: в графе фактор-отношения проводится стрелка из класса C_i в класс C_j тогда и только тогда, когда в графе исходного отношения можно попасть из класса C_i в класс C_j, т. е. когда имеется стрелка, идущая от какого-нибудь «представителя» класса C_i к какому-то «представителю» класса C_j (таким образом, здесь все «представители» уравнены в правах).

Рассмотрим теперь вопрос о переходе специальных свойств отношений на фактор-отношения. Будем говорить, что **свойство сохраняется при факторизации**, если из того, что этим свойством обладает отношение ρ, следует что им будет обладать и фактор-отношение $\rho/_\varepsilon$ при любой эквивалентности ε.

Предложение 2. *Свойство рефлексивности сохраняется при факторизации.*

Действительно, пусть ρ — рефлексивное отношение на множестве A, ε — отношение эквивалентности на A и C — класс эквивалентности ε. Так как $C \neq \varnothing$, то найдется элемент $a \in C$. Ввиду рефлексивности отношения ρ выполняется $(a, a) \in \rho$, значит, по определению фактор-отношения $(C, C) \in \rho/_\varepsilon$.

Аналогичным образом легко убедиться, что свойство симметричности сохраняется при факторизации. Однако свойство транзитивности вообще не сохраняется при факторизации, как показывает пример отношения, представленного с помощью графа на рис. 14,*а*. Видно, что отношение ρ транзитивно (так как в ρ не содержится примыкающих пар); фактор-отношение $\rho/_\varepsilon$, граф которого представлен на рис. 14,*б*, нетранзитивно, так как $(C_1, C_2) \in \rho/_\varepsilon$,

$(C_2, C_3) \in \rho/_\varepsilon$, но $(C_1, C_3) \notin \rho/_\varepsilon$.

Докажем одно простое, но важное условие, достаточное для транзитивности фактор-отношения.

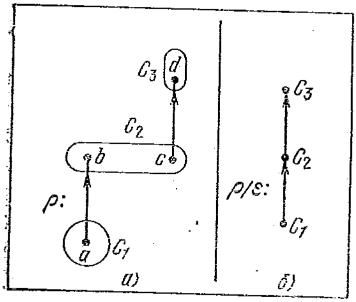


Рис. 14

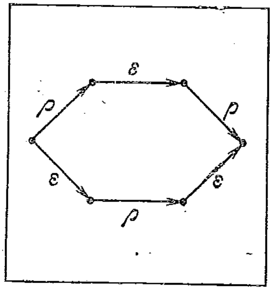


Рис. 15

Предложение 3. *Факторизация транзитивного отношения по содержащейся в нем эквивалентности дает транзитивное отношение.*

Доказательство. Пусть ρ—транзитивное отношение на множестве A, ε — отношение эквивалентности на A и $\varepsilon \subseteq \rho$. Возьмем три таких класса C_1, C_2, $C_3 \in A/_\varepsilon$, что $(C_1, C_2) \in \rho/_\varepsilon$ и $(C_2, C_3) \in \rho/_\varepsilon$, тогда для некоторых элементов $a_1 \in C_1$, a_2, $a'_2 \in C_2$, $a_3 \in C_3$ выполняется $(a_1, a_2) \in \rho$ и $(a'_2, a_3) \in \rho$. Так как элементы a_2 и a'_2 попадают в один класс эквивалентности ε, то они находятся в отношении ε: $(a_2, a'_2) \in \varepsilon$, и учитывая, что $\varepsilon \subset \rho$, получаем $(a_2, a'_2) \in \rho$. Итак, $(a_1, a_2) \in \rho$, $(a_2, a'_2) \in \rho$, $(a'_2, a_3) \in \rho$, откуда в силу транзитивности отношения ρ получаем $(a_1, a_3) \in \rho$; по определению фактор-отношения выполняется $(C_1, C_3) \in \rho/_\varepsilon$.

Условие, сформулированное в предложении 3, не является необходимым для транзитивности фактор-отношения $\rho/_\varepsilon$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы для произвольного отношения ρ на множестве A фактор-отношение $\rho/_\varepsilon$ было транзитивным, является выполнение включения:

$$\rho \cdot \varepsilon \cdot \rho \subseteq \varepsilon \cdot \rho \cdot \varepsilon. \tag{10}$$

Условие (10) в терминах путей означает следующее: для всякого пути длиной 3, в котором первый шаг делается по дуге отношения ρ, второй — по дуге отношения ε, третий — снова по дуге отношения ρ, должен найтись путь с той же начальной и конечной вершиной, в котором первый шаг идет по дуге отношения ε, второй — по дуге отношения ρ, третий — по дуге отношения ε. Это условие наглядно представлено на рис. 15: для всякого пути по верхней половине шестиугольника должен существовать путь по нижней половине шестиугольника.

В частности, если отношение ρ транзитивно (т. е. $\rho^2 \subset \rho$) и $\varepsilon \subset \rho$, то

$$\rho \cdot \varepsilon \cdot \rho \subset \rho \cdot \rho \cdot \rho = \rho^2 \cdot \rho \subset \rho \cdot \rho = \rho^2 \subset \rho;$$

ввиду рефлексивности отношения ε выполняется $\rho \subseteq \varepsilon \cdot \rho \cdot \varepsilon$, поэтому получаем $\rho \cdot \varepsilon \cdot \rho \subseteq \varepsilon \cdot \rho \cdot \varepsilon$, т. е. условие (10). Таким образом, в этом случае получается утверждение предложения 3.

Отметим также легко проверяемое

Предложение 4. *Свойство линейности сохраняется при факторизации.*

2. Факторизация отношений квазипорядка. Докажем вначале следующее важное свойство отношений квазипорядка: *симметричная часть отношения квазипорядка является отношением эквивалентности.*

Действительно, пусть ρ — отношение квазипорядка на множестве A. Так как ρ рефлексивно, то всякая пара вида (a, a) принадлежит отношению ρ, а значит, и обратному отношению ρ^{-1}; получаем, что $\rho\cap\rho^{-1}$ рефлексивно. Далее, $\rho\cap\rho^{-1}$ симметрично как симметричная часть любого отношения. Наконец, симметричная часть транзитивного отношения транзитивна (свойство 4 транзитивных отношений).

Предложение 5. *Факторизация отношения квазипорядка по его симметричной части дает отношение порядка на фактор-множестве.*

Доказательство. Пусть ρ — отношение квазипорядка на множестве A, $\varepsilon=\rho\cap\rho^{-1}$ — его симметричная часть. По доказанному выше ε — отношение эквивалентности на A. Фактор-отношение $\rho/_\varepsilon$ является рефлексивным (предложение 2). Далее, так как $\varepsilon\subset\rho$, то фактор-отношение $\rho/_\varepsilon$ в этом случае транзитивно (предложение 3). Осталось проверить, что $\rho/_\varepsilon$ антисимметрично. Заметим вначале, что из транзитивности отношения ρ и условия $\varepsilon\subset\rho$ следует, что отношение ρ транзитивно относительно ε:

$$(a, b)\in\rho,\ (b, c)\in\varepsilon \Rightarrow (a, c)\in\rho;$$

$$(a, b)\in\varepsilon,\ (b, c)\in\rho \Rightarrow (a, c)\in\rho.$$

Таким образом, для любой пары ее принадлежность к отношению ρ не меняется при замене каждой компоненты этой пары элементом, эквивалентным относительно ε; поэтому для определения принадлежности пары классов (C_1, C_2) эквивалентности ε к фактор-отношению $\rho/_\varepsilon$ можно выбрать любые элементы из этих классов; в частности, так как всегда $a\in\varepsilon(a)$, $b\in\varepsilon(b)$, то получаем равносильность

$$(\varepsilon(a),\ \varepsilon(b))\in\rho/_\varepsilon \Leftrightarrow (a, b)\in\rho. \tag{11}$$

Из (11) сразу следует, что фактор-отношение $\rho/_\varepsilon$ антисимметрично: если $(\varepsilon(a), \varepsilon(b))\in\rho/_\varepsilon$ и $(\varepsilon(b), \varepsilon(a))\in\rho/_\varepsilon$, то согласно (11) выполняется $(a, b)\in\rho$ и $(b, a)\in\rho$, значит, $(a, b)\in\rho\cap\rho^{-1}=\varepsilon$, т. е. $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)$.

При построении факторизации отношения квазипорядка ρ по его симетричной части ε удобнее использовать формулу (11), чем прямое определение фактор-отношения. Из (11), в частности, следует, что линейность фактор-отношения $\rho/_\varepsilon$ равносильна линейности отношения ρ.

3. **Отношение достижимости и взаимной достижимости.** При рассмотрении условия транзитивности мы определили для каждого отношения ρ его отношение достижимости $\widehat{\rho}$ следующим образом: $(a, b) \in \widehat{\rho}$ тогда и только тогда, когда в графе (A, ρ) существует путь из a в b. Введем теперь о т н о ш е н и е   в з а и м н о й   д о с т и ж и м о с т и, обозначаемое через $\overset{\triangle}{\rho}$: $(a, b) \in \overset{\triangle}{\rho}$ тогда и только тогда, когда вершина b достижима из вершины a и вершина a достижима из вершины b.

Предложение 6. *Для всякого бинарного отношения ρ его отношение достижимости $\widehat{\rho}$ является отношением квазипорядка, а отношение взаимной достижимости $\overset{\triangle}{\rho}$ — отношением эквивалентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как каждая вершина достижима из самой себя, то отношение достижимости рефлексивно. Далее, если вершина c достижима из вершины b, а вершина b — из вершины a, то вершина c достижима из вершины a: соответствующий путь получается «составлением» путей из a в b и из b в c; таким образом, отношение достижимости транзитивно. (Иногда отношение $\widehat{\rho}$ называют также транзитивным замыканием отношения ρ [1].) Показали, что отношение достижимости является отношением квазипорядка; остается заметить, что отношение взаимной достижимости $\overset{\triangle}{\rho}$ есть не что иное, как симметричная часть отношения $\widehat{\rho}$, и по доказанному выше (см. п. 2) получаем, что $\overset{\triangle}{\rho}$ — отношение эквивалентности.

Выясним, что представляют собой классы эквивалентности $\overset{\triangle}{\rho}$. Для этого введем следующее понятие. Путь в графе (A, ρ), в котором начальная и конечная вершина совпадают, т. е. путь вида

$$a_0 \xrightarrow{\rho} a_1 \xrightarrow{\rho} \ldots \xrightarrow{\rho} a_n \xrightarrow{\rho} a_0,$$

называется к о н т у р о м; при этом будем требовать, чтобы в последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ было по крайней мере два различных элемента [2]. В терминах контуров можно дать следующее описание классов эквивалентности $\overset{\triangle}{\rho}$: *две* (различные) *вершины графа* (A, ρ) *находятся в одном классе эквивалентности* $\overset{\triangle}{\rho}$ *тогда и только*

[1] Нетрудно проверить, что $\widehat{\rho}$ — наименьшее из отношений квазипорядка, содержащих отношение ρ; если ρ рефлексивно, то $\widehat{\rho}$ есть также наименьшее из транзитивных отношений, содержащих отношение ρ.

[2] Этим требованием петли исключаются из числа контуров. Отметим, что некоторые авторы включают петли в число контуров.

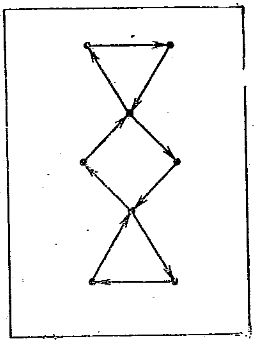


Рис. 16

тогда, когда существует контур, проходящий через эти вершины.

Следует иметь в виду, что для каждого контура графа (A, ρ) все лежащие на нем вершины, конечно, находятся в одном классе эквивалентности ρ, но они могут и не исчерпать этот класс, так как контуры могут «зацепляться» друг за друга. Назовем контур п р о с т ы м, если в нем все вершины различны, за исключением начальной и конечной. Граф, изображенный на рис. 16, имеет три простых контура, причем средний «зацепляется» за нижний и за верхний; при этом имеется единственный контур, содержащий все вершины.

Будем говорить, что отношение ρ удовлетворяет у с л о в и ю о т с у т с т в и я к о н т у р о в (такие отношения называются иногда ацикличными), если граф этого отношения не содержит контуров, т. е. если для любой последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ его вершин выполняется

$$(a_0, a_1) \in \rho,\ (a_1, a_2) \in \rho,\ \ldots,\ (a_{n-1}, a_n) \in \rho,\ (a_n, a_0) \in \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n. \tag{12}$$

Из приведенного выше описания классов эквивалентности $\overset{\triangle}{\rho}$ следует, что отношение ρ удовлетворяет условию отсутствия контуров тогда и только тогда, когда его отношение взаимной достижимости $\overset{\triangle}{\rho}$ является тождественным отношением на множестве A. Так как отношение $\overset{\triangle}{\rho}$ представляет собой симметричную часть отношения достижимости $\hat{\rho}$, то получаем

Предложение 7. *Отношение ρ удовлетворяет условию отсутствия контуров тогда и только тогда, когда его отношение достижимости $\hat{\rho}$ антисимметрично, т. е. когда $\hat{\rho}$ является отношением порядка.*

Для всякого отношения ρ из выполнения условия отсутствия контуров следует условие антисимметричности, так как если $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$, то согласно (12) получаем $a = b$. Обратное вообще неверно, но если отношение ρ транзитивно, то обратное утверждение также справедливо. Действительно, в этом случае, если выполняется посылка условия (12), то для любого $k = 1, \ldots, n$ ввиду транзитивности отношения ρ имеем $(a_0, a_k) \in \rho$ и $(a_k, a_0) \in \rho$, откуда по условию антисимметричности $a_k = a_0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

В частности, граф отношения порядка не имеет контуров. Отметим

Предложение 8. *Если линейное отношение удовлетворяет условию отсутствия контуров, то оно транзитивно.*

В самом деле, пусть отношение ρ на множестве A удовлетворяет сформулированным выше условиям и $(a, b) \in \rho$, $(b, c) \in \rho$. Предположим, что $(a, c) \notin \rho$, тогда по условию линейности должно быть $(c, a) \in \rho$. Получаем $(a, b) \in \rho$, $(b, c) \in \rho$, $(c, a) \in \rho$, а так как отношение ρ удовлетворяет условию отсутствия контуров, то $a=b=c$. Но линейное отношение рефлексивно, поэтому будет выполняться $(a, c) \in \rho$, что противоречит предположению.

4. Алгоритм выделения контуров графа. Для простых по структуре графов, содержащих небольшое число вершин, нахождение их контуров можно осуществить непосредственно, основываясь на «картинке», однако для сравнительно сложных графов такой визуальный метод решения задачи является весьма громоздким. Далее формулируется удобный алгоритм выделения контуров графа (см. А. А. Зыков. Теория конечных графов. Наука СО АН СССР, 1969, с. 96); этот алгоритм основан на некоторых простых свойствах отношения достижимости, проверка которых предоставляется читателю.

Свойство 1. Для графа, содержащего n вершин, свойства «достижимость» и «достижимость не более чем за n шагов» равносильны.

Свойство 2. Если отношение ρ рефлексивно, то в графе (A, ρ) свойства «достижимость за k шагов» и «достижимость не более чем за k шагов» равносильны.

Свойство 3 (непосредственно следует из свойств 1 и 2). Пусть ρ — рефлексивное отношение на множестве A, содержащем n элементов, $a, c \in A$. Для того чтобы вершина c была достижима в графе (A, ρ) из вершины a, необходимо и достаточно, чтобы c была достижима из a точно за n шагов.

Свойство 4. Две вершины $a, b \in A$ находятся в отношении взаимной достижимости ρ тогда и только тогда, когда для любой вершины графа ее достижимость из a равносильна ее достижимости из b, т. е.

$$(a, b) \in \overset{\vartriangle}{\rho} \Longleftrightarrow \widehat{\rho}(a) = \widehat{\rho}(b).$$

Пусть ρ — произвольное отношение на множестве A, содержащем n элементов. Обозначим через ρ_0 отношение, полученное из отношения ρ добавлением петель во всех вершинах, где петли отсутствовали. Ясно, что эта процедура не меняет отношения достижимости и взаимной достижимости: $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}$, $\overset{\vartriangle}{\rho}_0 = \overset{\vartriangle}{\rho}$. По свойству 4 $(a, b) \in \overset{\vartriangle}{\rho}_0 \Longleftrightarrow \widehat{\rho_0}(a) = \widehat{\rho_0}(b)$, но поскольку отношение ρ_0 рефлексивно, то по свойству 3 выполняется $\hat{\rho_0}=\rho^n{}_0$. Получаем окончательно

$$(a, b)\in\overset{\triangle}{\rho}\Longleftrightarrow\rho^n{}_0(a)=\rho^n{}_0(b). \qquad (13)$$

Так как контуры графа определяются классами эквивалентности $\overset{\triangle}{\rho}$, то равносильность (13) приводит к следующему алгоритму выделения контуров.

Задаем отношение ρ_0 (полученное из отношения ρ добавлением отсутствующих в нем петель) с помощью булевой матрицы M. Напомним (см. § 7, п. 2), что произведению отношений соответствует булево произведение матриц, поэтому отношение $\rho^n{}_0$ представляется матрицей M^n (n-я степень матрицы M). Заметим, что равенство срезов $\rho^n{}_0(a)=\rho^n{}_0(b)$ означает просто совпадение строк элементов a и b в матрице M^n, поэтому получаем в итоге, что *каждый класс эквивалентности* $\overset{\triangle}{\rho}$ *состоит из элементов, которым соответствуют одинаковые строки матрицы* M^n; *любые два элемента класса эквивалентности* $\overset{\triangle}{\rho}$ *лежат на одном контуре графа* (A, ρ). Прежде чем проиллюстрировать применение изложенного выше алгоритма, сделаем следующее полезное

Замечание. Предположим, что для некоторого $k<n$ выполнено $M^{k+1}=M^k$; умножая это равенство на M, получаем $M^{k+2}=M^k$; повторяя эту процедуру достаточное число раз, в итоге будем иметь $M^n=M^k$. Поэтому для нахождения матрицы M^n можно находить последовательно степени матрицы M: M, M^2, M^3, ... и т. д. Как только две последовательных степени совпали $M^{k+1}=M^k$, заключаем, что $M^n=M^k$.

Пример 11. Выделим контуры графа (A, ρ), изображенного на рис. 17. Вначале составляем матрицу M отношения ρ_0 (табл. 14): она получается из матрицы отношения ρ, в которой по главной диагонали записываем 1. Находим

$$M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix};$$

$$M^3=M^2\cdot M=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Видим, что $M^3=M^2$, значит, с учетом сделанного выше замечания $M^5=M^2$. Отношение $\rho^5{}_0$ задается матрицей (табл. 15). В ней строки элементов a, c, d совпадают, значит, эти элементы составляют контур; другой контур образуют элементы b и e.

Таблица 14

ρ_0	a	b	c	d	e
a	1	0	1	1	0
b	1	1	1	1	1
c	1	0	1	0	0
d	1	0	1	1	0
e	0	1	1	0	1

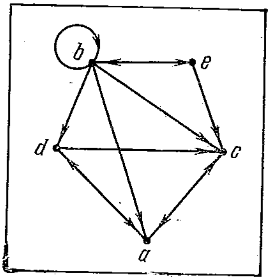


Рис. 17

Таблица 15

ρ^5_0	a	b	c	d	e
a	1	0	1	1	0
b	1	1	1	1	1
c	1	0	1	1	0
d	1	0	1	1	0
e	1	1	1	1	1

5. Факторизация по отношению взаимной достижимости („стягивание контуров"). Пусть ρ — бинарное отношение на множестве A, ε — отношение эквивалентности на A. Сравним следующие два отношения: $\widehat{\rho}/_{\varepsilon}$ и $\widehat{\rho/_{\varepsilon}}$ (разница между ними в том, что первое есть факторизация по ε отношения достижимости $\widehat{\rho}$, а второе—отношение достижимости, построенное для фактор — отношения $\rho/_{\varepsilon}$).

Всегда выполняется включение $\widehat{\rho}/_{\varepsilon} \subset \widehat{\rho/_{\varepsilon}}$. Действительно, пусть $(C, C') \in \widehat{\rho}/_{\varepsilon}$, т. е. имеется пара $(a, a') \in \widehat{\rho}$, где $a \in C$, $a' \in C'$ $(C, C' \in A/_{\varepsilon})$. По определению отношения достижимости $\widehat{\rho}$ существует цепочка $a = a_1 \xrightarrow{\rho} a_2 \xrightarrow{\rho} \ldots \xrightarrow{\rho} a_n = a'$. Для соответствующих классов эквивалентности ε имеем

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(a_1) \xrightarrow{\rho/_{\varepsilon}} \varepsilon(a_2) \xrightarrow{\rho/_{\varepsilon}} \ldots \xrightarrow{\rho/_{\varepsilon}} \varepsilon(a_n) = \varepsilon(a').$$

Получаем, что в графе $(A/_{\varepsilon}, \rho/_{\varepsilon})$ существует путь из класса $\varepsilon(a)$ в класс $\varepsilon(a')$, т. е. что $(\varepsilon(a), \varepsilon(a')) \in \widehat{\rho/_{\varepsilon}}$, а так как $a \in C$, $a' \in C'$, то $\varepsilon(a) = C$, $\varepsilon(a') = C'$, поэтому $(C, C') \in \widehat{\rho/_{\varepsilon}}$ и требуемое включение установлено.

Обратное включение может не выполняться, и легко понять почему. Как мы знаем (см. § 9, п. I), факторизация транзитивного отношения $\hat{\rho}$ может не дать транзитивного отношения, а отношение $\widehat{\rho/_{\varepsilon}}$ обязательно транзитивно. Однако, если отношение $\hat{\rho}/_{\varepsilon}$ оказалось транзитивным, то выполняется и обратное включение $\widehat{\rho/_{\varepsilon}} \subset \hat{\rho}/_{\varepsilon}$. В самом деле, так как $\rho \subset \hat{\rho}$, то и $\rho/_{\varepsilon} \subset \hat{\rho}/_{\varepsilon}$; если отношение $\hat{\rho}/_{\varepsilon}$ транзитивно, то из последнего включения получаем $\widehat{\rho/_{\varepsilon}} \subset \hat{\rho}/_{\varepsilon}$.

Пусть теперь в качестве эквивалентности, по которой производится факторизация отношения ρ, взято отношение его взаимной достижимости, т. е. $\varepsilon = \overset{\Delta}{\rho}$. Тогда выполняется включение $\varepsilon \subset \hat{\rho}$, а, как мы показали выше, (предложение 3), факторизация транзитивного отношения по содержащейся в нем эквивалентности всегда дает транзитивное отношение, значит, отношение $\hat{\rho}/_{\varepsilon}$ получается в этом случае транзитивным и выполняется равенство $\hat{\rho}/_{\varepsilon} = \widehat{\rho/_{\varepsilon}}$. Но $\hat{\rho}/_{\varepsilon}$ есть не что иное, как результат факторизации отношения квазипорядка $\hat{\rho}$ по его симметричной части, поэтому (см. предложение 5) оно является отношением порядка и, в частности, антисимметрично. Получаем, что отношение $\widehat{\rho/_{\varepsilon}}$ антисимметрично, что согласно предложению 7 равносильно отсутствию контуров в графе $(A/_{\varepsilon}, \rho/_{\varepsilon})$. Мы доказали.

Предложение 9. *Факторизация любого отношения* ρ *по отношению его взаимной достижимости приводит к фактор-отношению, удовлетворяющему условию отсутствия контуров*[1].

---

[1] Нетрудно показать, что $\overset{\Delta}{\rho}$ является наименьшим из таких отношений эквивалентности ε на A, для которых фактор-отношение ρ/ε удовлетворяет условию отсутствия контуров.

Полученный результат содержательно довольно прозрачен: всякая факторизация означает фактически отождествление эквивалентных элементов, но для эквивалентности $\varepsilon \overset{\Delta}{=} \rho$ эквивалентными являются вершины, лежащие на одном контуре; приняв контуры за «точки», мы получим в итоге граф без контуров. Факторизация отношения ρ по отношению $\overset{\Delta}{\rho}$ его взаимной достижимости образно называется иногда «стягиванием контуров».

В заключение параграфа докажем одно простое, но важное утверждение, являющееся следствием предложения 9.

Предложение 10. *Если* ρ — *линейное отношение на множестве* A, *то его факторизация по отношению его взаимной достижимости* $\varepsilon \overset{\Delta}{=} \rho$ *представляет собой линейное отношение порядка на фактормножестве* $A/_{\varepsilon}$.

Действительно, по предложению 9 фактор-отношение $\rho/_{\varepsilon}$ удовлетворяет условию отсутствия контуров, но так как фактор-отношение $\rho/_{\varepsilon}$ линейно (см. предложение 4), то согласно предложению 8 оно будет транзитивным. Далее, как мы отмечали в п. 3, условие отсутствия контуров влечет условие антисимметричности. Наконец, ввиду линейности отношение $\rho/_{\varepsilon}$ будет и рефлексивным.

10. ОПИСАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ ОТНОШЕНИЙ

1. Структура «доминирование — безразличие». При изучении отношения предпочтения между реальными объектами в нем можно выделить две стороны: одна отражает превосходство (равнозначные по смыслу термины — преобладание, доминирование) одного объекта над другим, а другая — сходство (равнозначные термины — безразличие, индифферентность) объектов. Другими словами, можно выделить два отношения между объектами, которые в дальнейшем будем называть о т н о ш е н и е м д о м и н и р о в а н и я и о т н о ш е н и е м б е з р а з л и ч и я. Вот несколько примеров (число которых можно увеличивать неограниченно).

1. *Турнир, где результатом встречи двух участников является выигрыш одного из них или ничья.* На множестве участников турнира следующим образом определяются отношения доминирования и безразличия: a доминирует b означает, что a выиграл у b; a и b безразличны означает, что a и b сыграли вничью.

2. *Голосование, проведенное для группы кандидатов.* На множестве кандидатов возникают отношения доминирования и безразличия: a доминирует b, если за a подано больше голосов, чем за b; a и b безразличны, если за них подано одинаковое число голосов.

3. *Отношение превосходства по возрасту.* Для двух людей a и b считаем, что a доминирует b, если a старше b; a и b безразличны, если они одного возраста.

4. Для целей психологического анализа больше подходит такое определение отношений доминирования и безразличия людей по возрасту, при котором доминирование означает существенное превосходство, а безразличие — близость возрастов. Например, для двух людей a и b считаем, что a доминирует b, если a старше b не менее чем на 5 лет; a и b безразличны, если разница их возрастов не превышает двух лет.

5. *Отношение подчинения между членами организации.* Два члена организации находятся в отношении безразличия тогда и только тогда, когда они тождественны. Для двух различных членов организации один доминирует другого, если первый является начальником второго.

При всем разнообразии ситуаций, в которых рассматриваются отношения доминирования и безразличия, у этих отношений наблюдается ряд общих свойств. Обозначим через α отношение доминирования ($(a, b)\in\alpha$ означает, что a доминирует b); и через β отношение безразличия ($(a, b)\in\beta$ означает, что a и b безразличны).

Во-первых, *отношение доминирования асимметрично*: не может быть такого, чтобы, скажем, в турнире a победил b и b победил a; чтобы кандидат a собрал голосов больше, чем кандидат b, а b — больше, чем a (при одном голосовании), и т. д. Таким образом, $\alpha\cap\alpha^{-1}=\varnothing$.

Во-вторых, *отношение безразличия симметрично*: например, если a сыграл вничью с b, то и b сыграл вничью с a; если возраст a близок к возрасту b, то и возраст b близок к возрасту a, и т. д. Получаем $\beta^{-1}=\beta$.

В-третьих, *ни одна пара объектов не принадлежит одновременно и отношению доминирования, и отношению безразличия*, т. е. $\alpha\cap\beta=\varnothing$.

Наконец, наложим еще одно условие на отношение β: будем считать, что *каждый объект безразличен по отношению к самому себе* (т. е. что отношение безразличия рефлексивно). Это условие носит скорее характер соглашения, так как в ситуациях, аналогичных приведенным выше примерам, объект сам с собой не сравнивается, но принятие этого условия вполне согласуется со смыслом, который обычно вкладывается в понятие безразличия.

По-видимому, приведенными четырьмя условиями исчерпываются все общие свойства отношений такого типа. Зафиксируем это обстоятельство в следующем формальном определении.

Будем говорить, что пара отношений (α, β), заданных на множестве A, определяет на этом множестве структуру «доминирование — безразличие» и называть α отношением доминирования, а β — отношением безразличия, если α асимметрично, β симметрично и рефлексивно (т. е. отношение толерантности), $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Легко проверить, что если (α, β) — структура «доминирование — безразличие» на A, то пара отношений (α^{-1}, β) также образует структуру «доминирование — безразличие» на A; α^{-1} будем называть отношением доминируемости. Для целей логического анализа в принципе безразлично, что принять за доминирование, а что за доминируемость.

Важным является такое свойство структуры «доминирование — безразличие», когда любые два объекта из рассматриваемого множества или безразличны, или один из них доминирует другой (как в примерах 2 и 3); такую структуру «доминирование — безразличие» будем называть линейной. Отметим, что для примера 1 структура «доминирование — безразличие» будет линейной, если турнир проведен по круговой системе (каждый сыграл с каждым); для примера 5 — если из любых двух членов организации один является начальником другого, для примера 4 свойство линейности в общем случае не имеет места. Удобно выразить свойство линейности структуры «доминирование—безразличие», введя понятие сравнимости объектов. Объекты a и b называются сравнимыми, если они или безразличны, или один из них доминирует другой; в противном случае объекты a и b называются несравнимыми.

Множество пар сравнимых объектов образует отношение сравнимости, а множество пар несравнимых объектов — отношение несравнимости. Структура «доминирование — безразличие» на A будет линейной тогда и только тогда, когда любая пара объектов сравнима, т. е. когда отношение сравнимости есть $A \times A$. Вообще, для любых двух объектов a и b, произвольно взятых из множества, на котором задана структура «доминирование — безразличие», выполняется точно одно из следующих четырех условий:

1) a доминирует b; 2) b доминирует a; 3) a и b безразличны; 4) a и b несравнимы.

В случае линейной структуры выполняется точно одно из первых трех условий.

Структуру «доминирование — безразличие» удобно представить с помощью таблицы следующего типа (матрицы доминирований — безразличий): в клетке, соответствующей строке элемента a и столбцу элемента b, ставится 1, если a доминирует b; 0, если b доминирует a; 1/2, если a и b безразличны, т. е. матрица доминирований — безразличий строится по тому же принципу, что и таблицы спортивных турниров. Отметим, что структура «доминирование — безразличие» будет линейной тогда и только тогда, когда в представляющей ее матрице нет пустых клеток.

2. Задание структуры «доминирование — безразличие» с помощью одного отношения. Пусть (α, β) — структура «доминирование — безразличие» на множестве A. Положим $\rho = \alpha \cup \beta$. Найдем симметричную и асимметричную часть отношения ρ. Имеем

$$\rho^s = \rho \cap \rho^{-1} = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta)^{-1} = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha^{-1} \cup \beta^{-1}) =$$

$$= (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha^{-1} \cup \beta) = (\alpha \cap \alpha^{-1}) \cup (\alpha \cap \beta) \cup (\beta \cap \alpha^{-1}) \cup (\beta \cap \beta) =$$

$$= \beta \cap \beta = \beta$$

(Мы использовали здесь, что $\alpha \cap \alpha^{-1} = \alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha^{-1} = \varnothing$.) Далее

$$\rho^* = \rho \setminus \rho^s = (\alpha \cup \beta) \setminus \beta = \alpha.$$

(В последнем переходе следует учесть, что $\alpha \cap \beta = \varnothing$; в этом (и только в этом) случае операции объединения и разности множеств нейтрализуют друг друга.) Получаем, что *исходные отношения α и β могут быть «восстановлены», если известно их объединение: α есть асимметричная, а β — симметричная часть отношения $\alpha \cup \beta$*. Таким образом, *всякая структура «доминирование — безразличие» может быть задана с помощью одного бинарного отношения — объединения отношений доминирования и безразличия.*

В дальнейшем объединение отношений доминирования и безразличия будем называть о т н о ш е н и е м п р е д п о ч т е н и я. Из сказанного выше следует, что *отношение предпочтения не только определяется структурой «доминирование — безразличие», но и полностью определяет ее.*

Возникает естественный вопрос: какими свойствами характеризуется отношение предпочтения? Другими словами, если ρ — произвольное отношение на множестве A, то каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы для некоторой структуры «доминирование — безразличие» (α, β), определенной на A, выполнялось $\rho = \alpha \cup \beta$? Конечно, необходимо, чтобы отношение ρ было рефлексивным (поскольку β рефлексивно). Оказывается, что больше никаких условий на отношение ρ накладывать не надо, а именно, всякое рефлексивное отношение ρ является отношением предпочтения для некоторой структуры «доминирование — безразличие». Действительно, пусть ρ^* — асимметричная часть, ρ^s — симметричная часть рефлексивного отношения ρ. Тогда отношение ρ^* асимметрично, ρ^s симметрично и рефлексивно и $\rho^* \cap \rho^s = \varnothing$; получаем, что пара отношений (ρ^*, ρ^s) образует на множестве A структуру «доминирование — безразличие»; соответствующее ей отношение предпочтения есть первоначально заданное отношение ρ: $\rho^* \cup \rho^s = \rho$.

Таким образом, *в принципе всякое отношение можно рассматривать как отношение предпочтения; надо только вначале превратить его в рефлексивное, добавив отсутствующие петли, и взять в качестве доминирования асимметричную часть, а в качестве без-*

различия — симметричную часть полученного отношения. При этом линейность этого отношения равносильна линейности соответствующей ему структуры «доминирование — безразличие».

3. Транзитивность структуры «доминирование — безразличие». Как видно из примеров, приведенных в п. 1, отношения доминирования и безразличия могут быть нетранзитивными. Поэтому естественно выделить такие структуры «доминирование—безразличие», в которых эти отношения транзитивны, т. е.

если a доминирует b, b доминирует c, то a доминирует c;

если a безразлично b, b безразлично c, то a безразлично c.

Кроме того, наложим еще одно требование: для всякой пары объектов, принадлежащей отношению доминирования, замена одного из объектов безразличным ему сохраняет доминирование, т. е.

$$(a, b)\in\alpha,\ (b, c)\in\beta \Rightarrow (a, c)\in\alpha,$$

$$(a, b)\in\beta,\ (b, c)\in\alpha \Rightarrow (a, c)\in\alpha.$$

(Приведенные условия выражают транзитивность отношения α относительно отношения β, см. § 8.)

Будем называть структуру «доминирование — безразличие» транзитивной, если отношения доминирования и безразличия транзитивны и отношение доминирования транзитивно относительно отношения безразличия. Выясним, что представляют собой отношения предпочтения для транзитивных структур «доминирование — безразличие». Если α и β транзитивны и α транзитивно относительно β, то $\alpha\cup\beta$ будет транзитивным отношением (свойство 3 транзитивных отношений); кроме того, отношение $\alpha\cup\beta$ рефлексивно как всякое отношение предпочтения, таким образом, $\alpha\cup\beta$ — отношение квазипорядка. Обратно, пусть ρ — произвольное отношение квазипорядка на множестве A. Как мы отмечали (см. свойство 4 транзитивных отношений), асимметричная часть ρ^* и симметричная часть ρ^s транзитивного отношения ρ будут транзитивными и ρ^* транзитивно относительно ρ^s; получаем, что структура «доминирование — безразличие» (ρ^*, ρ^s), соответствующая отношению ρ, является транзитивной. Вывод: *соответствие* $(\alpha, \beta)\longrightarrow\alpha\cup\beta$ *является взаимно-однозначным соответствием между транзитивными структурами «доминирование — безразличие» на множестве A и отношениями квазипорядка на A; задание транзитивной структуры «доминирование — безразличие» равносильно заданию одного отношения квазипорядка.* Если при этом отношение безразличия тождественно (т. е. каждый объект безразличен только сам с собой), то соответствующее отношение квазипорядка является отношением порядка.

4. Отношения порядка. В этом пункте мы займемся более детальным рассмотрением отношений порядка, т. е. таких отношений, которые одновременно рефлексивны, транзитивны и антисимметричны. Множество A, на котором задано отношение порядка ω, называется упорядоченным и записывается в виде пары (A, ω). Важнейшими примерами упорядоченных множеств являются следующие:

1) множество действительных чисел, упорядоченное естественным порядком:

$(x, y) \in \omega \Leftrightarrow x \geqslant y$;

2) множество натуральных чисел, упорядоченное отношением делимости:

$(n, m) \in \omega \Leftrightarrow n$ делится на m;

3) множество подмножеств фиксированного множества, упорядоченное отношением включения:

$(X, Y) \in \omega \Leftrightarrow$ подмножество X содержит (включает) подмножество Y.

Так как для всякого отношения порядка ω его симметричная часть ω^s является тождественным отношением, то его асимметричная часть ω^* (строгий порядок) определяется условием

$(a, b) \in \omega^* \Leftrightarrow (a, b) \in \omega,\ a \neq b.$

Учитывая, что важнейшим и наиболее привычным примером отношения порядка является естественный порядок между действительными числами, будем иногда и для произвольного порядка ω писать $a \overset{\omega}{\geqslant} b$ вместо $(a, b) \in \omega$ и $a \overset{\omega}{>} b$ вместо $(a, b) \in \omega^*$ (или просто $a \geqslant b$ и $a > b$, если ясно, о каком отношении порядка идет речь).

Для отношений порядка имеется более простое геометрическое представление, чем представление с помощью графов; оно состоит в следующем. Говорят, что элемент a *покрывает* элемент b (или что элемент b покрывается элементом a), и пишут $a \succ b$, если, во-первых, $a > b$ и, во-вторых, между ними нет никакого другого элемента, т. е. не существует такого c, что $a > c > b$. Таким образом, «покрывание» — это новое отношение, которое строится на базе отношения порядка $\geqslant$. Так, для естественного отношения порядка на множестве целых чисел одно целое число покрывает другое, если первое больше второго на единицу; если отношение порядка — делимость, то $n \succ m$ означает, что n/m — простое число; если отношение порядка — включение множеств, то $X \succ Y$ означает, что множество X получено из множества Y добавлением одного элемента.

Для отношения порядка, заданного на конечном множестве, имеет место следующее утверждение: условие $a > b$ выполняется тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность элементов множества A, которая начинается с элемента a, кончается элементом b и в которой каждый член покрывает последующий:

$$a > b \Leftrightarrow \text{существует цепочка } a = a_0 \succ a_1 \succ \ldots \succ a_n = b. \qquad (14)$$

Диаграмма отношения порядка $\geqslant$ (или, что то же самое, диаграмма упорядоченного множества $(A, \geqslant)$) строится следующим образом. Элементы множества A изображаются точками на плоскости и всякие две точки x, $y \in A$, для которых выполняется $x \succ y$, соединяются наклонным отрезком, идущим вниз от x к y.

Из (14) вытекает следующее простое правило: *условие $a > b$ выполняется тогда и только тогда, когда на диаграмме упорядоченного множества можно попасть из a в b, двигаясь по отрезкам прямых только вниз.* Так, для упорядоченного множества, диаграмма которого изображена на рис. 18, имеем: $u > r$, $v > p$, $w > p$ и т. д. Условие $w > q$, однако, не выполняется (хотя геометрически w выше, чем q): требуемого пути из w в q нет.

В дальнейшем мы будем использовать следующее обстоятельство: если ω — отношение порядка, то обратное отношение ω^{-1} также будет отношением порядка; его диаграмма получается из диаграммы первоначального отношения порядка переворачиванием ее «вверх ногами».

Рассмотрим произвольное упорядоченное множество $(A, \geqslant)$. Элемент множества A называется **максимальным**, если не существует строго большего его элемента, т. е. элемент a максимален, когда условие $a' > a$ не выполняется ни для какого $a' \in A$. Элемент a называется **наибольшим** элементом упорядоченного множества $(A, \geqslant)$, если он больше любого другого элемента, т. е. если для всякого $x \in A$ выполняется $a \geqslant x$. Для упорядоченного множества, представленного диаграммой на рис. 18, имеется три максимальных элемента u, v, w, а наибольший элемент отсутствует; таким образом, понятия «максимальный» и «наибольший», которые в обыденной практике считаются равнозначными, в теории упорядоченных множеств оказываются различными. Между понятиями «максимальный» и «наибольший» элемент имеется следующая простая связь.

Предложение 11. *Если в упорядоченном множестве имеется наибольший элемент, то он является единственным максимальным элементом. Обратно, если в конечном упорядоченном множестве имеется единственный максимальный элемент, то он будет и наибольшим элементом* (оговорка «в конечном» существенна: в бесконечном упорядоченном множестве, представленном диаграммой на рис. 19, элемент a является единственным максимальным элементом, но он не будет наибольшим).

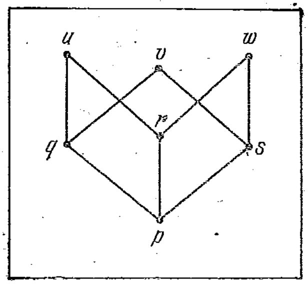


Рис. 18

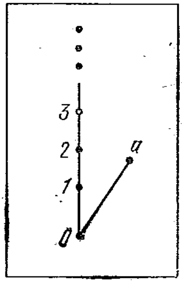


Рис. 19

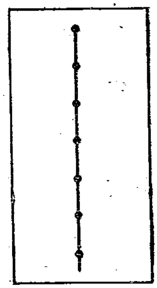


Рис. 20

Если отношение порядка $\geqslant$ линейно, то упорядоченное множество $(A, \geqslant)$ называется **линейно упорядоченным** или **цепью**. Таким образом, в цепи каждые два элемента сравнимы: для любых $a, b \in A$ выполняется $a \geqslant b$ или $b \geqslant a$. Как выглядит диаграмма линейно упорядоченного множества? Заметим, что в любом упорядоченном множестве, если два элемента покрывают один и тот же элемент, то они несравнимы. (Действительно, пусть $a_1 \succ b$, $a_2 \succ b$; предположим, что $a_1 > a_2$. Тогда $a_1 > a_2 > b$, что противоречит условию $a_1 \succ b$.) Таким образом, в линейно упорядоченном множестве ни один элемент не может покрываться двумя элементами. С другой стороны, если множество A конечно, то для всякого элемента, отличного от максимального, имеется элемент, который его покрывает. Поэтому диаграмма конечного линейно упорядоченного множества имеет вид, представленный на рис. 20, т. е. диаграмма может быть вытянута в линию, что и дает объяснение названию таких упорядоченных множеств.

Отметим еще следующее легко проверяемое свойство: в линейно упорядоченных множествах понятия «максимальный» и «наибольший» элемент равнозначны.

Индуктивные упорядоченные множества и лемма Цорна. Рассмотрим произвольное упорядоченное множество $(A, \geqslant)$. Элемент $a \in A$ называется **мажорантой подмножества** $X \subset A$, если a является мажорантой любого элемента из X, т. е. если выполняется $a \geqslant x$ для любого $x \in X$. Упорядоченное множество называется **индуктивным**, если в нем каждое подмножество X, являющееся цепью, имеет мажоранту. Индуктивные упорядоченные множества обладают следующим важным свойством.

Лемма Цорна. *В индуктивном упорядоченном множестве каждый элемент мажорируется некоторым максимальным элементом.*

Глава IV

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ЗАДАНИИ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В ФОРМЕ ОТНОШЕНИЙ

Одной из характеристик цели (смотри гл. I) является связанное с ней предпочтение на множестве возможных исходов. Если мы ясно осознаем цель, то в принципе можем указать, что для нас лучше, а что хуже по отношению к этой цели, т. е. можем построить отношение предпочтения. Обратно, если на множестве исходов задано некоторое предпочтение, то его можно рассматривать как предпочтение, связанное с целью,— получение возможно более предпочтительного (относительно данного предпочтения) исхода. В дальнейшем мы будем в качестве целевой структуры, заданной на множестве исходов, рассматривать отношения предпочтения на этом множестве, возможно, не упоминая дополнительно о самой цели.

11. ВЫЯВЛЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Обычно, когда говорят о предпочтении некоторого индивидуума, то предполагают, что имеется определенное множество объектов, состояний, ситуаций, исходов и т. п., среди которых это предпочтение возникает; для упрощения терминологии мы будем далее говорить о предпочтении на множестве объектов.

Выявить предпочтение на множестве объектов A — значит указать множество всех тех пар объектов (a, b), для которых объект a предпочтительнее объекта b, т. е. задать отношение предпочтения в явном виде. В соответствии со сказанным в § 10, п. 2, мы будем понимать предпочтение как нестрогое, т. е. считать, что отношение предпочтения содержит как все пары (a, b), где объект a доминирует объект b и где объекты a и b безразличны между собой. Удобно поэтому обозначать отношение предпочтения знаком $\succcurlyeq$, считая, что $\succ$ есть отношение доминирования, а $\sim$ — отношение безразличия; при этом отношение $\succ$ представляет собой асимметричную часть, а $\sim$ — симметричную часть отношения $\succcurlyeq$. При выявлении предпочтений может быть два подхода к отношению безразличия. Можно считать

1) что любые два объекта, для которых не установлено доминирования (ни в том, ни в другом порядке) безразличны;

2) что безразличными являются лишь некоторые пары объектов, для которых не установлено доминирования.

Разница между первым и вторым подходом в том, что при первом подходе безразличие рассматривается просто как логическая противоположность доминирования и структура «доминирование —

Таблица 16

	Чай	Кофе	Компот	Лимонад
Чай	1/2		1	
Кофе		1/2	1	1
Компот	0	0	1/2	1/2
Лимонад		0	1/2	1/2

безразличие» получается автоматически линейной; при втором подходе безразличие рассматривается как самостоятельное отношение и возникает отношение несравнимости объектов. Таким образом, при втором подходе проводится более тонкая дифференциация объектов.

Основной вопрос, который мы рассмотрим в этом параграфе, — это методы выявления предпочтений. Предположим, что мы выявляем предпочтение индивидуума на множестве объектов A. В некоторых случаях индивидуум может провести попарное сравнение всех объектов этого множества, указав для каждой пары (a, b) наличие или отсутствие предпочтения между a и b. Скажем, пусть выявляется предпочтение индивидуума среди четырех напитков: чай, кофе, компот, лимонад. Индивидуум указал, что для него чай лучше, чем компот, кофе лучше, чем компот и лимонад, а компот и лимонад безразличны. Тогда выявленное предпочтение индивидуума можно задать с помощью следующей матрицы доминирований — безразличий (табл. 16), причем наличие в этой таблице пустых клеток свидетельствует о том, что некоторые объекты из рассматриваемого множества для индивидуума несравнимы между собой (структура «доминирование — безразличие» нелинейна).

Однако метод попарных сравнений как метод выявления предпочтений может быть использован далеко не всегда, а лишь в тех случаях, когда основой для выявления предпочтений индивидуума является его субъективное представление об исследуемых объектах без анализа каких-либо доводов или причин наличия (отсутствия) предпочтений между конкретными объектами. Скажем, в приведенном выше примере индивидуум предпочитает чай компоту не потому, что в первом больше тонизирующих веществ или еще по каким-либо рациональным соображениям, а просто потому, что «чай ему больше нравится». Но лишь в особых случаях можно полагаться на субъективные представления, не подкрепленные никакими логическими доводами. Следует иметь в виду, что часто тот индивидуум, предпочтения которого выявляются, выступает не как «личность», а как «носитель интересов» определенной организации (скажем, при выявлении предпочтений директора предприятия мы интересуемся не его личными предпочтениями, а предпочтениями того предприятия, которое он представляет). Поэтому в этих случаях выявление предпочтений должно базироваться на логической, а не на психологической основе.

Сложность объектов, среди которых приходится устанавливать предпочтение, делает подчас практически невозможным их непосредственное сопоставление, сравнение одного с другим. В этих случаях у рассматриваемых объектов стараются выделить существенные — с точки зрения имеющейся цели — показатели и сравнение объектов проводят на основании сравнения значений этих показателей. При этом объект рассматривается просто как набор соответствующих ему значений показателей, а не как единое целое, что имеет место при попарных сравнениях. Например, при установлении предпочтения среди кандидатов на должность существенными будут такие показатели, как уровень профессиональной подготовки, организаторские способности, возраст; при выборе места работы — обстановка в коллективе, наличие творческих элементов в работе, зарплата, время поездки на работу; при сравнении проектов изделия — его технические характеристики (в том числе и те, которые определяются требованиями технической эстетики), стоимость, надежность и т. д. При сравнении объектов по значениям показателей первичная информация может быть задана таблицей значений показателей (табл. 17), где $a_1, \ldots, a_n$ — данные объекты, $p_1, \ldots, p_m$ — рассматриваемые для них показатели. В клетке, соответствующей объекту a_i и показателю p_j, записывается значение показателя p_j для объекта a_i. В этом случае вся информация об объекте заключена в векторе соответствующих ему значений показателей и сравнение объектов производится с помощью сравнения этих векторов, т. е. строк таблицы показателей.

Важно отметить, что *задание информации об объектах в виде таблицы показателей еще не определяет предпочтения между объектами.* Для выявления этого предпочтения необходима некоторая совокупность правил, которая позволила бы для любых двух объ-

Таблица 17

	p_1	...	p_j	...	p_m
a_1	$p_1(a_1)$	...	$p_j(a_1)$	...	$p_m(a_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	$p_1(a_i)$	...	$p_j(a_i)$	...	$p_m(a_i)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_n	$p_1(a_n)$	...	$p_j(a_n)$	...	$p_m(a_n)$

ектов a_{i_1} и a_{i_2} установить, предпочитается ли объект a_{i_1} объекту a_{i_2} или нет. Такую совокупность правил будем называть системой решающих правил.

Рассмотрим несколько типов решающих правил для выявления предпочтения на примере задачи выбора места работы; в качестве существенных показателей возьмем следующие: зарплата, продолжительность отпуска, время поездки на работу.

Пример 12. Требуется установить предпочтение среди трех мест работы A, B, C; таблица показателей есть табл. 18.

В качестве решающего правила возьмем здесь такое: считаем, что вариант x предпочтительнее (в нестрогом смысле) варианта y, если для варианта x зарплата и отпуск не меньше, а время поездки не больше, чем для варианта y. При таком решающем правиле получаем, что отношение предпочтения ρ состоит из следующих пар: $\rho=\{(A, C), (A, A), (B, B), (C, C)\}$. Соответствующее этому предпочтению отношение доминирования α содержит единственную пару: $\alpha=\{(A, C)\}$, а отношение безразличия β есть тождественное отношение: $\beta=\{(A, A), (B, B), (C, C)\}$.

Указанное решающее правило легко перенести на общий случай. Пусть интересующие нас объекты оцениваются по m числовым показателям; $p_j(a_i)$ — значение j-го показателя для объекта a_i. Будем считать, что для каждого показателя предпочтение по нему связано с увеличением значения этого показателя. Предпочтение, полученное по следующему решающему правилу: *объект a_{i_1} считается предпочтительнее объекта a_{i_2} тогда и только тогда, когда для всех рассматриваемых показателей $p_1, \ldots, p_m$ выполняется* $p_j(a_{i_1}) \geqslant p_j(a_{i_2})$, будем называть абсолютным предпочтением для векторного критерия. Это название оправдано тем, что при таком решающем правиле один объект считается предпочтительнее другого только в том случае, когда для первого все показатели лучше, т. е. когда можно признать первый объект «абсолютно лучше» второго. К сожалению, решающее правило по абсолютному предпочтению является достаточно «слабым», т. е. число (различных) объектов, среди которых оно устанавливает предпочтение, невелико; так, в приведенном выше примере в абсолютном предпочтении находится только одна пара различных объектов. Вообще, можно заметить, что чем более «бесспорные» требования мы вводим при установлении предпочтения, тем реже эти требования выполняются и, следовательно, тем «слабее» будет определяемое этими требованиями предпочтение.

Таблица 18

	Зарплата, руб.	Отпуск, дн	Время поездки, мин
A	200	48	30
B	175	30	10
C	190	24	50

Важной стороной абсолютного предпочтения является то, что оно всегда транзитивно. Оказывается, верно и обратное утверждение: всякое транзитивное предпочтение можно «свести» к абсолютному предпочтению по векторному критерию — формальное доказательство этого факта будет дано в § 15, п. 2.

Таблица 19

	Зарплата, руб.	Отпуск, дн-	Время поездки, мин
A	200	24	30
B	190	48	50
C	175	30	10

Теперь несколько видоизменим решающее правило, приведенное в предыдущем примере: будем считать, что вариант x доминирует вариант y, если для варианта x зарплата и отпуск больше, а время поездки меньше, чем для варианта y; если для двух вариантов ни один из них не доминирует другого, то такие два варианта считаются безразличными. При таком решающем правиле получим, что вариант A доминирует вариант C, а остальные пары вариантов безразличны между собой. Отметим, что здесь отношение безразличия нетранзитивно: A и B безразличны, B и C безразличны, но A доминирует C.

Пример 13. Рассмотрим теперь сравнение трех мест работы по таблице показателей, приведенной в табл. 19. Здесь применение в качестве решающего правила абсолютного предпочтения ничего не дает, так как ни один из вариантов не доминирует другого (отношение доминирования оказывается пустым). Для получения непустого отношения доминирования надо взять решающее правило, более сильное, чем абсолютное предпочтение. Довольно естественным представляется произвести такое усиление на следующем пути. Раз ни один из объектов не превосходит другого сразу по всем показателям, то будем считать, что для установления предпочтения одного объекта над другим достаточно превосходства по большинству из рассматриваемых показателей — соответствующее предпочтение будем называть *предпочтением по правилу большинства*. В данном примере предпочтение по правилу большинства выглядит так: вариант x доминирует вариант y тогда и только тогда, когда x лучше, чем y, по большинству показателей, причем по первым двум показателям «лучше» понимается как «больше», а по третьему как «меньше». Тогда

A доминирует B (так как A лучше B по зарплате и времени поездки);
B доминирует C (так как B лучше C по зарплате и отпуску);
C доминирует A (так как C лучше A по отпуску и времени поездки).

Таким образом, A доминирует B, B доминирует C, а C доминирует A. Отношение доминирования оказывается здесь нетранзитивным [1].

Теперь обратим внимание на то обстоятельство, что в предыдущих примерах применение решающих правил фактически требует знания не численных значений показателей, а лишь соотношения их по величине, т. е. их упорядоченности. Поэтому наш анализ не изменится, если мы для каждого показателя укажем не его число-

[1] Такое нарушение транзитивности называется иногда парадоксом голосования при применении правила большинства.

вое значение, а *степень проявления*, выраженную в условных единицах, т. е. перейдем к балльным оценкам. При этом для каждого показателя надо установить определенное число градаций (уровней различия). В качестве низшего балла возьмем 1, а при переходе к следующему уровню балл увеличиваем на единицу. Таблица показателей, значения которых выражены в баллах, называется **таблицей балльных оценок**. Отметим, что таблицу балльных оценок можно трактовать как результат не только оценки объектов одним индивидуумом по различным показателям, но и суммарной оценки этих объектов *разными* индивидуумами (экспертами): число, стоящее в i-й строке и j-м столбце, можно рассматривать как балл, которым j-й эксперт оценивает в совокупности i-й объект. При такой трактовке выявление предпочтения можно понимать как определенное согласование мнений экспертов.

Рассмотрим пример выявления предпочтения при задании информации об объектах в виде таблицы балльных оценок.

Пример 14. Выявляется предпочтение индивидуума (покупателя) среди семи моделей телевизоров, обозначаемых буквами a, b, c, d, e, f, g. Эти модели оцениваются по следующим четырем показателям: p_1 — цена, p_2 — помехоустойчивость, p_3 — размер экрана, p_4 — внешнее оформление. По цене и помехоустойчивости имеется 4 градации, по размеру экрана — 3, по внешнему оформлению — 5 градаций. Пусть табл. 20 является таблицей балльных оценок. Введем здесь следующую систему решающих правил: считаем, что объект x доминирует объект y, если

1) число показателей, по которым объект x строго лучше объекта y, больше, чем число показателей, по которым объект y строго лучше объекта x,

2) для объекта x ни один из показателей не принимает наименьшего из возможных значений (т. е. значения 1).

Из 1) следует, что те показатели, по которым объект x не хуже объекта y, составляют большинство среди всех рассматриваемых показателей. Однако при выполнении этого условия может оказаться, что по тем показателям, по которым

Таблица 20

	p_1	p_2	p_3	p_4
a	3	4	1	3
b	3	2	2	4
c	2	2	3	2
d	4	3	2	2
e	2	4	2	4
f	2	3	1	5
g	3	1	3	3

Таблица 21

α	a	b	c	d	e	f	g
a	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	1
c	0	0	0	0	0	0	0
d	0	1	1	0	0	1	0
e	1	0	1	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

объект x хуже объекта y, разница (которая будет не в пользу объекта x) значительна; чтобы уменьшить число таких случаев при отдаче предпочтения в пользу x, вводится условие 2). При указанной системе решающих правил отношение α, выражающее доминирование, определяется матрицей табл. 21. Заметим, что условие 1) влечет асимметричность отношения α, ввиду чего его можно рассматривать как отношение доминирования.

Рассмотрим еще один способ введения предпочтения. Пусть для объектов множества A задана таблица показателей, которая каждому $a \in A$ сопоставляет m количественных показателей $p_j(a)$ ($j = 1, \ldots, m$). Если бы мы смогли каждому показателю p_j приписать некоторый «вес» λ_j, выражающий значимость этого показателя, то взвешенную сумму $F(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j(a)$ можно было бы рассматривать как суммарную оценку объекта a. Тогда можно ввести решающее правило: a предпочтительнее b, если $F(a) \geqslant F(b)$. Это правило является предельно сильным, так как оно приводит к линейному квазиупорядочению множества A. Такое решающее правило используют, например, при установлении предпочтения среди абитуриентов, суммируя баллы по всем сданным экзаменам, т. е. полагая все $\lambda_j = 1$. Заметим, что сформулированное решающее правило основано фактически на «свертывании» векторного критерия в скалярный с весовыми коэффициентами (см. § 4, п. 2), только здесь мы рассматриваем дискретный случай. «Свертывая» векторный критерий в скалярный, мы постулируем возможность компенсации потери по одному показателю ростом другого показателя, т. е. их соизмеримость, сводимость одного к другому.

В практических ситуациях, когда показатели характеризуют объект с *разных* сторон, сведéние одного из них к другому представляет значительные трудности, имеющие отнюдь не технический характер. Как, например, при выборе места работы соизмерить степень творческой удовлетворенности с временем поездки на работу? Как соизмерить технические характеристики объекта с показателями, оценивающими его внешний вид? Причем соизмерить требуется так, чтобы один показатель оказался в определенное число раз «важнее» другого. В ситуациях, аналогичных приведенным выше, вряд ли это возможно, а в тех случаях, когда такое сведéние показателей одного к другому и возможно, требуется дополнительная информация, не представленная в таблице показателей. Поэтому метод выявления предпочтения с помощью введения весовых коэффициентов имеет весьма ограниченное значение.

Подведем некоторые итоги рассмотрения круга проблем, связанных с основным вопросом настоящего параграфа — способами выявления предпочтений на множестве объектов, когда исходная информация об объектах задана с помощью таблицы значений показателей в виде абсолютных или балльных оценок.

Для нахождения предпочтения в форме отношения необходимо задание некоторого решающего правила. Единого, универсального решающего правила не существует; имеется, однако, много конкретных типов решающих правил. В каждом случае выбор решающего правила производится на основе содержательных соображений. Процедура выбора решающего правила не формализована и представляет собой сложную концептуальную проблему.

12. ВЫДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА «ХОРОШИХ» ОБЪЕКТОВ (ПРОСТОЕ РАНЖИРОВАНИЕ)

1. Принципы выделения множества «хороших» объектов. Вернемся к нашей основной теме — задачам принятия решений. Предположим, что имеется множество объектов A, на котором уже выявлено предпочтение и задано в форме бинарного отношения ρ на этом множестве (некоторые способы выявления предпочтений рассмотрены в предыдущем параграфе). Пусть мы имеем задачу принятия решения, в которой элементы множества A являются исходами. Предположим, что принятие решения происходит в условиях определенности, тогда принятие решения сводится к выбору исхода, т. е. к выбору конкретного объекта из A. Какой объект следует выбрать или точнее, выбор какого объекта будет оптимальным?

На первый взгляд может показаться, что здесь вообще нет никакой проблемы: раз мы можем выбрать любой объект из A, то оптимальным будет выбор самого предпочтительного объекта, т. е. того объекта, который предпочтительнее (относительно введенного отношения предпочтения) любого другого. Однако вся «неприятность» в том, что такого объекта может попросту не оказаться.

Рассмотрим для примера ситуацию, когда в качестве отношения предпочтения между объектами выступает абсолютное предпочтение для векторного критерия по m показателям $p_1, \ldots, p_m$; тогда высказывание «объект a предпочтительнее объекта b» означает, что выполняется m неравенств $p_j(a) \geqslant p_j(b)$ для $j=1, \ldots, m$. В этом случае объект будет самым предпочтительным только тогда, когда для него *все* показатели $p_1, \ldots, p_m$ имеют наибольшие значения; однако наличие такого объекта является скорее исключением, нежели правилом. Как же быть тогда, когда наиболее предпочтительный относительно введенного предпочтения объект отсутствует? Предлагается такой выход. Раз нет наиболее предпочтительного, т. е. наилучшего объекта, то постараемся указать не наилучший, а «хороший» объект, точнее, некоторое подмножество «хороших» объектов. Сделать это непосредственно не представляется возможным, так как имеющаяся у нас информация об объектах — в форме отношения предпочтения — позволяет лишь *сравнивать* *объекты попарно*, т. е. позволяет указать, какой объект лучше другого, но не позволяет указать, какой объект является «хорошим» (т. е. мы сталкиваемся здесь с довольно распространенной в реальной жизни ситуацией, когда известно, что значит «лучше», но не известно, что значит «хорошо»). Поэтому необходимо иметь некоторый принцип, позволяющий выделить подмножество «хороших» объектов; в формулировке этого принципа должны содержаться требования, которые предъявляются обычно к «хорошим» — с интуитивной точки зрения — объектам. Ясно, что такой принцип можно рассматривать как принцип оптимальности для задачи выбора объекта при заданном предпочтении. В этом параграфе мы рассмотрим два таких принципа: принцип недоминируемости и принцип решения по Нейману — Моргенштерну.

Пусть $\succcurlyeq$ — отношение предпочтения, заданное на некотором (возможно, бесконечном) множестве A. Асимметричная часть отношения $\succcurlyeq$ есть $\succ$ — отношение доминирования на A. Элемент $a \in A$ называется н е д о м и н и р у е м ы м, если он не доминируется никаким другим элементом, т. е. если не существует такого $b \in A$, что $b \succ a$.

Принцип недоминируемости: *в качестве множества «хороших» объектов берется множество недоминируемых элементов* (иногда это множество называется c-ядром).

Рассмотрим в качестве примера применение принципа недоминируемости для абсолютного предпочтения по векторному критерию. Как мы знаем, абсолютное предпочтение $\succcurlyeq$ по m показателям определяется так:

$$a \succcurlyeq b \Longleftrightarrow p_j(a) \geqslant p_j(b) \text{ для всех } j = 1, \ldots, m.$$

Найдем симметричную часть отношения $\succcurlyeq$. Условие $a \sim b$ выполняется тогда и только тогда, когда $a \succcurlyeq b$ и $b \succcurlyeq a$, т. е. когда $p_j(a) \geqslant p_j(b)$ и $p_j(b) \geqslant p_j(a)$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Таким образом $a \sim b$ означает, что $p_j(a) = p_j(b)$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Поэтому доминирование $\succ$, соответствующее предпочтению $\succcurlyeq$, определяется здесь так: $a \succ b$ тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, \ldots, m$ выполняется $p_j(a) \geqslant p_j(b)$, причем по крайней мере для одного номера j неравенство должно быть строгим.

Таким образом, элемент a будет недоминируемым при абсолютном предпочтении по векторному критерию тогда и только тогда, когда не существует такого элемента b, для которого каждый из показателей p_j ($j=1, \ldots, m$) имеет бо́льшее или такое же значение, как для элемента a (причем по крайней мере один показатель имеет строго большее значение). Но это фактически есть определение эффективной точки, введенное при рассмотрении многокритериальных задач принятия решений (см. § 4, п. 2). Итак, *для абсолютного предпочтения по векторному критерию*

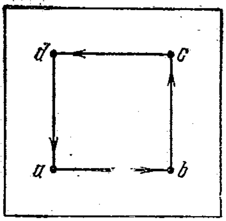


Рис. 21

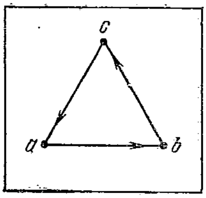


Рис. 22

множество недоминируемых элементов есть множество эффективных точек.

Заметим еще, что если отношение предпочтения $\succcurlyeq$ есть отношение порядка на множестве A, то соответствующее этому предпочтению отношение доминирования совпадает с отношением строгого порядка; таким образом, в этом случае понятие «недоминируемый элемент» тождественно понятию «максимальный элемент». Что можно сказать о существовании максимальных элементов в упорядоченном множестве? В конечном упорядоченном множестве всегда имеются максимальные элементы: идя по диаграмме упорядоченного множества только вверх, мы обязательно придем к максимальному элементу. В бесконечном упорядоченном множестве может не быть максимальных элементов (в качестве примера можно взять естественно упорядоченное множество целых чисел). Если упорядоченное множество индуктивно то, как непосредственно следует из леммы Цорна (см. конец § 10), в нем обязательно имеются максимальные элементы.

Принцип недоминируемости, используемый для выделения подмножества «хороших» объектов, обладает рядом недостатков. Во-первых, даже в случае конечного множества объектов подмножество недоминируемых объектов может оказаться пустым. Например, для доминирования, представленного графом на рис. 21, для каждого элемента имеется доминирующий его элемент. Во-вторых, недоминируемый элемент может не удовлетворять следующему требованию, которое должно, с интуитивной точки зрения, выполняться для «хорошего» объекта: «хороший» объект должен быть лучше, чем любой другой объект, который таковым не является.

Рассмотрим теперь второй принцип для выделения подмножества «хороших» объектов, который связан с именами Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна.

Подмножество $X \subset A$ называется **внутренне устойчивым**, если для любых двух различных элементов из X ни один из них не предпочитается другому.

Подмножество $X \subset A$ называется **внешне устойчивым**, если для каждого элемента вне X найдется такой элемент в X, который его предпочтительней.

Принцип решения по Нейману—Моргенштерну: *в качестве подмножества «хороших» объектов берется такое подмножество, которое одновременно внутренне и внешне устойчиво.*

Сформулированный принцип требует, чтобы, во-первых, никакие два «хороших» объекта не были сравнимыми по предпочтению между собой, и, во-вторых, чтобы для каждого объекта, не попавшего в число «хороших», нашелся более предпочтительный объект, попавший в число «хороших».

В отличие от принципа недоминируемости, принцип решения по Нейману—Моргенштерну основан на свойстве не отдельного элемента, а некоторой их совокупности. Другими словами, приняв этот принцип, мы не можем сказать, что отдельный элемент является (или не является) «хорошим», но можем сказать про подмножество элементов, что оно является (или не является) подмножеством «хороших» элементов.

2. Некоторые способы нахождения решения по Нейману — Моргенштерну. Свойства внутренней и внешней устойчивости, которые сформулированы выше для отношения предпочтения, можно ввести для любого бинарного отношения (или графа). Пусть (A, γ) — произвольный граф. Подмножество X его вершин называется **внутренне устойчивым**, если выполняется условие

$a, b \in X, a \neq b \Rightarrow (a, b) \notin \gamma$,

внешне устойчивым, если выполняется условие:

для каждого $a \notin X$ найдется такой $b \in X$, что $(a, b) \in \gamma$.

Подмножество, которое одновременно внутренне и внешне устойчиво, принято в теории графов (см., например [1]) называть **ядром**. Ясно, что если γ есть отношение предпочитаемости (т. е. $(a, b) \in \gamma$ тогда и только тогда, когда a предпочитается b), то ядро графа (A, γ) представляет собой решение по Нейману—Моргенштерну.

Вообще, даже конечный граф может не иметь ни одного ядра; например, в графе, изображенном на рис. 22 ядро отсутствует, так как в нём никакое двухэлементное подмножество его вершин не является внутренне устойчивым (а значит, множество, состоящее из всех трех вершин, также не будет внутренне устойчивым), а любое одноэлементное подмножество не будет внешне устойчивым. С другой стороны, граф, представленный на рис. 21, имеет два ядра $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$.

Рассмотрим один из способов нахождения ядра графа; этот способ связан с понятием **степени вершины** графа, которое вводится так. Вершины нулевой степени (множество которых обозначается далее через C_0) — это те вершины, для которых нет

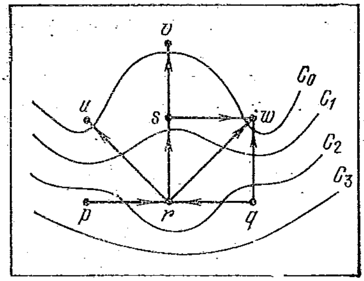


Рис. 23

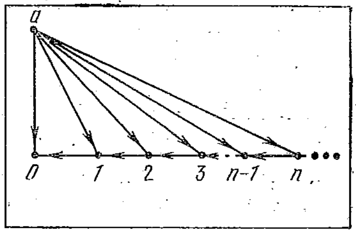


Рис. 24

исходящих из них дуг. Предположим, что уже определено множество вершин C_{k-1}. Тогда полагаем
$C_k = C_{k-1} \cup \{a \in A \mid \gamma(a) \subset C_{k-1}\}$.

Таким образом, для всякого графа определена по индукции расширяющаяся последовательность подмножеств (будем называть их **степенными подмножествами**: $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots$). Степенные подмножества можно определять не обязательно по индукции, но и непосредственно, а именно: $a \in C_k$ тогда и только тогда, когда длина любого пути в графе (A, γ) из вершины a не превосходит числа k. (Например, для графа на рис. 23 имеется четыре степенных подмножества $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset C_3$; далее последовательность степенных подмножеств стабилизируется, т. е. $C_3 = C_4 = C_5 = \ldots$.)

Определяем теперь **степень вершины** a как наименьшее натуральное число k, для которого $a \in C_k$ (т. е. $a \in C_k$ но $a \notin C_{k-1}$). Другими словами, то, что степень вершины a равна k означает, что длина всякого пути в графе (A, γ) из вершины a не превосходит k и существует путь из a, длина которого равна k. Таким образом, в графе (A, γ) степень имеют те вершины, для которых длины исходящих из них путей ограничены в совокупности.

Замечание. Если в графе длины всех путей, исходящих из вершины a, ограничены в совокупности, то все эти пути конечны. Однако обратное неверно: из того, что все пути, исходящие из a, конечны, не следует, что их длины ограничены в совокупности; соответствующий пример дает граф, изображенный на рис. 24.

Можно расширить понятие степени вершины графа так, чтобы степень имели те вершины, для которых все начинающиеся в них пути конечны. Это делается с помощью трансфинитных (порядковых) чисел следующим образом. Определим для каждого порядкового числа ξ подмножество $C_\xi \subset A$: C_0 состоит из тех вершин, для которых нет исходящих из них дуг; если ξ — непредельное порядковое число (т. е. для него существует предшествующее порядковое число $\xi - 1$), то

$C_\xi = C_{\xi-1} \cup \{a \in A \mid \gamma(a) \subset C_{\xi-1}\}$;

если ξ — предельное порядковое число, то
$C_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} C_\eta$.

Степенью вершины a назовем наименьшее порядковое число ξ_0, для которого $a \in C_{\xi_0}$. При таком определении степени каждая вершина графа, для которой все начинающиеся в ней пути конечны, имеет степень, причем степень всегда является непредельным порядковым числом.

Возьмем произвольный граф (A, γ), для которого длины всех путей ограничены в совокупности (в случае, когда множество вершин конечно, для этого необходимо и достаточно, чтобы в графе отсутствовали контура и петли). Тогда имеется натуральное число r, которое ограничивает длины всех путей, следовательно, $C_r = A$. Индукцией по степенным подмножествам графа C_0, $C_1, \ldots, C_r$ определим на множестве вершин графа функцию φ, принимающую значения 0 и 1, следующим образом.

1) $\varphi(a) = 1$ для всех $a \in C_0$.

2) Пусть функция φ уже определена на подмножестве C_{k-1}; возьмем $a \in C_k \setminus C_{k-1}$. Полагаем $\varphi(a) = 1$ в том и только в том случае, когда для всех $b \in \gamma(a)$ выполняется $\varphi(b) = 0$ (так как для $a \in C_k$ из условия $b \in \gamma(a)$ следует $b \in C_{k-1}$, то функция φ определена по индукции на любом степенном подмножестве, а значит, и на $C_r = A$).

Непосредственно проверяется, что *множество вершин графа, на которых функция φ равна 1, образует единственное ядро графа* (A, γ). Например, для графа, изображенного на рис. 23, его ядро состоит из вершин $\{u, v, w, p\}$. Заметим теперь, что удаление петель графа не влияет на свойства внутренней и внешней устойчивости подмножеств, поэтому справедливо

Предложение 12. *В конечном графе без контуров существует единственное ядро.*

Если же в графе (A, γ) имеются контуры, то, как мы видели в § 9, п. 5, факторизация отношения γ по отношению $\overset{\triangle}{\gamma}$ его взаимной достижимости («стягивание контуров») приводит к графу без контуров. Поэтому, если фактор-множество $A/_{\overset{\triangle}{\gamma}}$ оказывается конечным, то для графа (A, γ) можно построить «обобщенное ядро» следующим образом. Вначале надо, стянув контуры графа (A, γ), построить ядро C для полученного конечного графа без контуров; элементами ядра C будут классы отношения эквивалентности $\overset{\triangle}{\gamma}$. «Обобщенное ядро» графа (A, γ) состоит из тех элементов множества A, которые принадлежат классам эквивалентности $\overset{\triangle}{\gamma}$, попавшим в ядро C. Нетрудно понять, что «обобщенное ядро» обладает обобщенными свойствами внутренней и внешней устойчивости.

Отметим еще непосредственно следующее из леммы Цорна (см. § 10)

Предложение 13. *Если упорядоченное множество (A, ω) индуктивно (в частности, конечно), то в нем существует единственное ядро, совпадающее с множеством его максимальных элементов.*

Вернемся к конечным графам без контуров. Хотя в этом случае ядро графа можно найти с помощью построения степенных подмножеств, этот метод является довольно громоздким. Укажем один полезный прием, облегчающий нахождение ядра. Введем предварительно следующее понятие. Пусть $\gamma \subset A \times A$ — произвольное бинарное отношение на множестве A. Определим новое бинарное отношение $\breve{\gamma} \subset A \times A$ следующим образом: считаем, что $(a, b) \in \breve{\gamma}$ тогда и только тогда, когда, во-первых, $(a, b) \in \gamma$ и, во-вторых, если существует $(b, c) \in \gamma$, но также $(a, c) \in \gamma$. «Устройство» отношения $\breve{\gamma}$ можно пояснить, перейдя к определенному им графу, так. В графе (A, γ) назовем дугу (a, b) транзитивной, если каждый путь в два шага, в котором первый шаг делается по дуге (a, b), можно заменить путем в один шаг с той же начальной и конечной вершиной. Если в графе (A, γ) оставить только транзитивные дуги, то получим граф отношения $\breve{\gamma}$.

На «языке операций» отношение $\breve{\gamma}$ можно определить как наибольшее (по включению) из бинарных отношений, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $\breve{\gamma} \subset \gamma$, 2) $\breve{\gamma} \cdot \gamma \subset \gamma$.

Так как $(\breve{\gamma})^2 = \breve{\gamma} \cdot \breve{\gamma} \subset \breve{\gamma} \cdot \gamma \subset \gamma$ и $(\breve{\gamma})^2 \cdot \gamma = \breve{\gamma} \cdot \breve{\gamma} \cdot \gamma = \breve{\gamma} \cdot (\breve{\gamma} \cdot \gamma) \subset \breve{\gamma} \cdot \gamma \subset \gamma$, то получаем, что $(\breve{\gamma})^2 \subset \breve{\gamma}$; это означает, что отношение $\hat{\gamma}$ транзитивно. Назовем отношение $\breve{\gamma}$ транзитивной частью отношения γ (это название оправдано, так как, во-первых, $\breve{\gamma}$ является частью отношения γ и, во-вторых, отношение $\breve{\gamma}$, как показано выше, всегда транзитивно; при этом, если отношение γ транзитивно, то $\breve{\gamma} = \gamma$).

Обратим теперь внимание на одно обстоятельство в определении условий внутренней и внешней устойчивости подмножеств в графе (A, γ). Можно рассматривать свойства внутренней и внешней устойчивости подмножества X в графе (A, γ) *относительно некоторого «окружающего» его подмножества* $B \supset X$, когда мы ограничиваемся элементами подмножества B; очевидно, что свойство внутренней устойчивости подмножества X относительно B не зависит от выбора $B \supset X$ (от «окружения»), а свойство внеш-

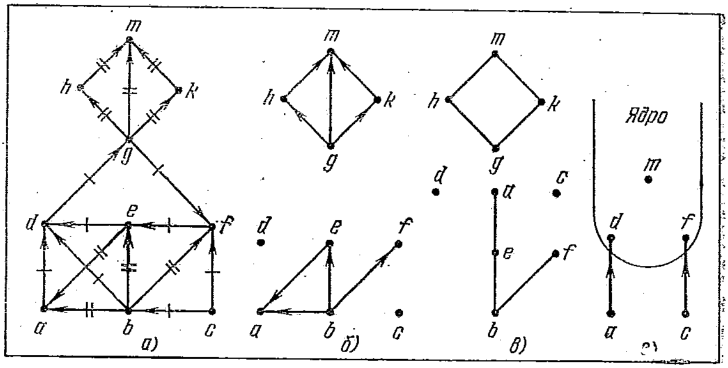


Рис. 25

ней устойчивости зависит от выбора B (от «окружения»). Справедливо

Предложение 14. Пусть (A, γ) — *произвольный граф. Предположим, что существует ядро графа (A, γ); обозначим его через B_0.*

1. *Всякое подмножество $X \subset B_0$, которое внутренне и внешне устойчиво в графе (A, γ) относительно B_0, внутренне и внешне устойчиво в графе (A, γ).*

2. *Всякое подмножество $X \subset A$, которое внутренне и внешне устойчиво в графе (A, γ), должно содержаться в B_0, являясь внутренне и внешне устойчивым в графе (A, γ) относительно B_0.*

Приведенное предложение показывает, что при поиске ядра графа (A, γ) можно ограничиться вершинами, составляющими ядро графа (A, γ) (если последнее существует). Далее, так как свойства внутренней и внешней устойчивости подмножеств не зависят от удаления петель, то можно сразу считать, что отношение γ является антирефлексивным. Тогда отношение γ также бу-

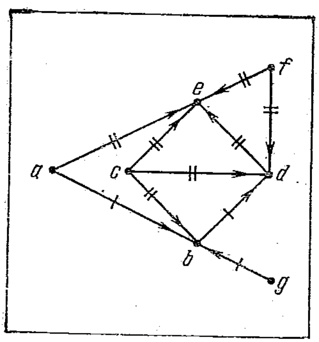


Рис. 26

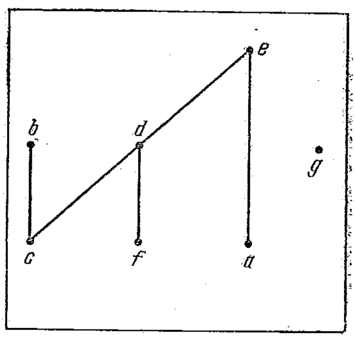


Рис. 27

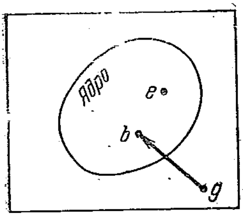


Рис. 28

дет антирефлексивным, а так как $\check{\gamma}$ всегда транзитивно, то $\check{\gamma}$ будет отношением строгого порядка (т. е. оно превращается в отношение порядка при добавлении петли в каждой вершине). Если множество вершин A конечно, то согласно предложению 13 получаем, что ядро графа $(A, \check{\gamma})$ в этом случае всегда существует и совпадает с множеством элементов, максимальных относительно порядка $\check{\gamma}$ (условие $a<b$) понимается здесь как $(a, b)\in\check{\gamma}$).

Таким образом, обозначая теперь через B_0 множество максимальных элементов в упорядоченном множестве $(A, \check{\gamma})$, мы можем при поиске ядра графа (A, γ) ограничиться подмножеством B_0: согласно предложению 14, *ядрами в графе* (A, γ) *будут те и только те подмножества, которые содержатся в* B_0 *и являются внутренне и внешне устойчивыми в графе* (A, γ) *относительно* B_0.

Пример 15. Найдем указанным методом ядро графа (A, γ), изображенного на рис. 25,*а*.

Шаг 1. Пометив двумя черточками транзитивные дуги графа (A, γ) (остальные дуги помечены одной черточкой), получим граф отношения $\check{\gamma}$; он приведен на рис. 25,*б*.

Шаг 2. Строим диаграмму (строгого) порядка $\check{\gamma}$ (рис. 25,*в*) и находим множество B_0 его максимальных элементов; в нашем случае $B_0=\{m, d, a, c, f\}$.

Шаг 3. Строим ограничение графа (A, γ) на множестве B_0 (рис. 25,*г*) и находим его ядро; непосредственно видно, что оно состоит из вершин d, f, m.

Пример 16. Рассмотрим применение принципа решения по Нейману — Моргенштерну для задачи выбора модели телевизора (см. пример 14).

Граф доминируемости (A, γ) (построенный по табл. 21) представлен на рис. 26. На рис. 27 приведена диаграмма упорядоченного множества $(A, \check{\gamma})$, откуда находим, что множество B_0 его максимальных элементов есть $\{b, e, g\}$. На рис. 28 изображено ограничение графа (A, γ) на множестве B_0. На основании предложения 14 заключаем, что имеется единственное ядро графа (A, γ), состоящее из двух элементов b и e. Таким образом, руководствуясь в примере 14 принципом решения по Нейману — Моргенштерну, надо производить выбор из множества $\{b, e\}$; вопрос о том, какой из этих двух элементов должен быть выбран, — остается открытым; для его решения нужна дополнительная информация о предпочтениях. Отметим, что в графе (A, γ) элемент e является единственным недоминируемым элементом.

13. РАНЖИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПРИ ЗАДАННОМ ПРЕДПОЧТЕНИИ

1. Описание задачи ранжирования. Под ранжированием объектов обычно понимают расположение их в цепочку по убыванию их ценности, пригодности, важности и т. п. — от самого «хорошего» к самому «плохому». При ранжировании допускается наличие «равноценных» объектов; в этом случае мы разбиваем множество всех объектов на классы «равноценных» объектов и располагаем эти классы в цепочку — от класса самых «хороших» к классу самых «плохих» объектов. Ясно, что рассмотренную в предыдущем параграфе задачу выделения подмножества «хороших» объектов можно трактовать как частный случай задачи ранжирования, при котором множество всех объектов разбивается всего на два класса — класс «хороших» объектов и его дополнение — класс «плохих» объектов; такое ранжирование назовем **простым**. Геометрически ранжирование объектов представляет собой их размещение по уровням; если уровней всего два — имеем простое ранжирование (рис. 29).

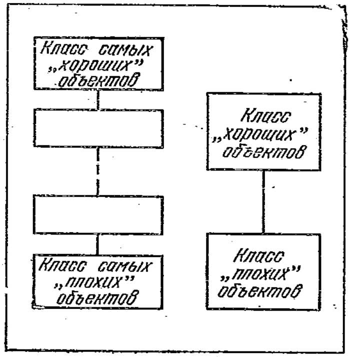


Рис. 29

На языке теории бинарных отношений введение ранжирования объектов множества означает задание на этом множестве линейного отношения квазипорядка или, что фактически то же самое, задание линейной транзитивной структуры «доминирование—безразличие» (см. § 10, п. 3); при этом классы «равноценных» объектов являются классами отношения эквивалентности — симметричной части этого квазипорядка, а геометрическое представление ранжирования можно рассматривать как диаграмму этого квазиупорядоченного множества [1)].

В этом параграфе мы рассмотрим задачу ранжирования объектов при условии, что задано предпочтение между объектами в форме бинарного отношения. Мы хотим произвести ранжирование объектов таким образом, чтобы оно было согласовано с заданным предпочтением.

Что следует понимать под согласованностью ранжирования с предпочтением? Кажется естественным считать, что ранжирование согласовано с предпочтением, если более предпочтительные объекты размещены на более высоком уровне. Однако если мы примем данное условие в качестве определения согласованности, то получим, что ранжирования, согласованные с предпочтением, могут существовать лишь для таких отношений предпочтения ρ, в графе которых отсутствуют контура. Действительно, предположим, что в графе отношения ρ имеется контур $a_1 \xrightarrow{\rho} a_2 \xrightarrow{\rho} \ldots \xrightarrow{\rho}$

[1)] Для произвольного квазиупорядоченного множества (A, ρ) его диаграмма совпадает с диаграммой упорядоченного множества $(A/_\varepsilon, \rho/_\varepsilon)$, полученного факторизацией по эквивалентности $\varepsilon=\rho\cap\rho^{-1}$. При этом каждый класс эквивалентности ε представляется одной вершиной.

$\xrightarrow{p} a_n \rightarrow a_1$. Тогда при ранжировании объект a_1 должен быть помещен выше объекта a_2, a_2 — выше a_3 и т. д., a_{n-1} — выше a_n, а a_n — выше a_1, но это, очевидно, невозможно.

Как же быть тогда, когда в графе отношения предпочтения имеются контуры? В этом случае можно предложить несколько вариантов определения согласованности ранжирования с предпочтением, причем каждый из этих вариантов имеет свое интуитивное оправдание и фактически реализует свой принцип оптимальности. Ниже мы рассмотрим один из методов построения ранжирования, согласованного с предпочтением, выражаемым линейным отношением.

Итак, пусть A — произвольное (возможно, бесконечное) множество объектов, $\geqslant$ — линейное отношение на A, выражающее предпочтение между объектами. Если отношение $\geqslant$ транзитивно, то оно является линейным отношением квазипорядка; тогда, построив диаграмму этого квазиупорядоченного множества (см. примечание к стр. 85), мы получим ранжирование объектов из A, причем для любых двух объектов $a, b \in A$ объект a будет находиться строго выше, чем объект b, тогда и только тогда, когда a доминирует b (т. е. когда $a > b$); объекты a и b будут находиться на одном уровне тогда и только тогда, когда они безразличны между собой (т. е. когда $a \sim b$). Такое ранжирование, конечно, надо считать согласованным с предпочтением $\geqslant$. Таким образом решение задачи построения ранжирования, согласованного с предпочтением, становится в этом случае тривиальным.

Будем считать далее, что отношение $\geqslant$ нетранзитивно (согласно предложению 8 это может быть лишь при наличии контуров в графе $(A, \geqslant)$). Будем решать задачу ранжирования объектов в два этапа: на первом этапе проведем «грубое» ранжирование, разбив множество всех объектов на классы «примерно равноценных» объектов и установив линейное упорядочение множества этих классов; на втором этапе проведем «тонкое» ранжирование объектов — внутри каждого класса. Для наглядности рассуждений будем интерпретировать A как множество участников турнира, проведенного по круговой системе; $a > b$ будем понимать как выигрыш участника a у участника b, $a \sim b$ — как ничью между ними. При такой интерпретации «грубое» ранжирование можно рассматривать как разбиение множества участников турнира на классы «участников одного уровня» и расположение этих классов в цепочку — от класса самых сильных участников к классу самых слабых (продолжая турнирную терминологию, можно сказать, что требуется, основываясь на результатах прошедшего по круговой системе турнира, выделить из его участников высшую лигу, куда входят самые сильные участники, затем первую лигу, вторую и т. д.).

Попробуем, исходя из чисто содержательных представлений, ответить на вопрос: когда двух участников турнира a и b можно отнести к «одной лиге», т. е. признать примерно равными по силам? Во-первых, если встреча между ними закончилась вничью ($a \sim b$). Во-вторых, когда a выиграл у b, а b выиграл у какого-нибудь участника c, который выиграл у a. Здесь можно сказать, что a выиграл у b непосредственно, а b «выиграл» у a посредством c. Далее, можно признать участников a и b относящимися к одному уровню, если a выиграл у b, а b «выиграл» у a посредством цепочки участников $c_1, c_2, \ldots, c_k$, т. е. когда $a > b$ и $b > c_1 > c_2 > \ldots > c_k > a$. Наконец, раз мы уже согласились отнести к «одной лиге» двух участников, сыгравших вничью, то в предыдущем варианте мы должны допустить не только выигрыши, но и ничьи. Суммируя сказанное выше, получаем что два участника a и b должны быть отнесены к «одной лиге», если существует последовательность вида $b \geqslant c_1 \geqslant c_2 \ldots \geqslant c_k \geqslant a \geqslant b$. Но такая последовательность есть не что иное, как контур в графе $(A, \geqslant)$, т. е. мы принимаем два объекта за примерно равноценные, если они принадлежат одному контуру графа $(A, \geqslant)$. Вспомним теперь (см. § 9, п. 3), что условие принадлежности двух элементов к одному контуру равносильно тому, что эти элементы находятся в отношении взаимной достижимости, поэтому обозначив через ε отношение взаимной достижимости графа $(A, \geqslant)$, получаем в качестве разбиения на классы «примерно равноценных» объектов разбиение, соответствующее эквивалентности ε.

Обратимся теперь к вопросу линейного упорядочения этого множества классов. Пусть C_1, C_2 — два различных класса эквивалентности ε. Возьмем любые два элемента из этих классов: $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$. Не может быть такого, чтобы $a_1 \sim a_2$, так как в этом случае a_1 и a_2 находились бы в отношении взаимной достижимости и выполнялось бы $C_1 = C_2$. Предположим, что $a_1 > a_2$. Пусть теперь a'_1, a'_2 — любые другие элементы из этих классов: $a'_1 \in C_1$, $a'_2 \in C_2$. Тогда выполняется $a'_1 > a'_2$. Действительно, условие $a'_1 \sim a'_2$ здесь невозможно, ибо оно ведет к совпадению классов C_1 и C_2. Если бы $a'_2 > a'_1$, тогда $a'_2 > a'_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1 > a_2 \overset{\varepsilon}{\equiv} a'_2$, откуда элементы a_1 и a_2 оказываются лежащими на одном контуре графа $(A, \geqslant)$, что влечет $C_1 = C_2$ против предположения.

Мы показали, что:

а) Если C_1 и C_2 — два различных класса эквивалентности ε и для каких-нибудь элементов $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$ имеет место $a_1 > a_2$, то для любых элементов $a'_1 \in C_1$, $a'_2 \in C_2$ также $a'_1 > a'_2$.

Возьмем теперь три различных класса C_1, C_2, C_3 эквивалентности ε и пусть для элементов $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$, $a_3 \in C_3$ выполняется $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3$. В каком отношении находятся элементы a_1 и a_3?

Так как $C_1 \neq C_3$, то не может выполняться $a_1 \sim a_3$. Далее, условие $a_3 > a_1$ также исключено, так как тогда $a_1 > a_2 > a_3 > a_1$, откуда получаем, что a_1 и a_3 находятся на одном контуре графа $(A, \geqslant)$ и $C_1 = C_3$. Ввиду линейности отношения $\geqslant$ выполняется $a_3 > a_1$.

Показали

б) Если C_1, C_2, C_3 — три разных класса эквивалентности ε и для $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$, $a_3 \in C_3$ выполняется $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3$, то $a_1 > a_3$.

Утверждения а) и б) дают полное основание для введения следующего правила доминирования классов эквивалентности ε: для любых двух различных классов C_1, $C_2 \in A/_{\varepsilon}$ полагаем, что C_1 доминирует C_2, если для некоторых элементов, взятых из этих классов: $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$, выполняется $a_1 > a_2$. Из условий а) и б) следует, что если класс C_1 доминирует класс C_2, то для любых элементов $a'_1 \in C_1$, $a'_2 \in C_2$ выполняется $a'_1 > a'_2$ и, кроме того, отношение доминирования классов транзитивно. Пользуясь снова турнирной терминологией, можно сказать, что при введенном определении доминирования классов каждый участник доминирующего класса выиграл не только у каждого участника доминируемого класса, но и у любого побежденного хотя бы одним участником доминируемого класса.

Из линейности отношения предпочтения $\geqslant$, заданного на множестве A, следует, что для любых двух различных классов эквивалентности ε один из них доминирует другой; таким образом, если мы к отношению доминирования классов добавим тождественное отношение, то получим в итоге линейное отношение порядка. Заметим, что оно представляет собой просто факторизацию первоначального отношения предпочтения $\geqslant$ по эквивалентности ε — отношению взаимной достижимости графа $(A, \geqslant)$ (ср. предложение 10).

Итак, *если отношение предпочтения $\geqslant$ является линейным на A, то для построения «грубого» ранжирования разбиваем A на классы отношения взаимной достижимости ε в графе $(A, \geqslant)$, а в качестве линейного упорядочения этих классов берем факторизацию отношения $\geqslant$ по эквивалентности* ε. Заметим, что классы отношения взаимной достижимости могут быть довольно обширными: в один класс попадают такие два объекта, каждый из которых оказывается предпочтительнее другого — или непосредственно, или «по цепочке».

2. «Тонкое» ранжирование по относительной силе. Перейдем теперь к описанию второго этапа ранжирования — установлению «тонкого» ранжирования объектов внутри каждого класса, состоящего из тех объектов, которые были признаны равноценными при «грубом» ранжировании. «Тонкое» ранжирование объектов будем проводить на основе приписывания каждому объекту некоторого числа, называемого его относительной силой (этот метод описан К. Бержем [1] в «задаче о лидере»).

Пусть C — класс эквивалентности ε (напомним, что ε — отношение взаимной достижимости в графе $(A, \geqslant)$). Будем снова интерпретировать C как множество участников турнира, проведенного по круговой системе ($a>b$ интерпретируется как выигрыш a у b, $a\sim b$ — как ничья). Предположим, что отношение $\geqslant$ задано с помощью матрицы доминирований — безразличий, в которой доминирование (выигрыш) обозначается через 1, доминируемость (проигрыш) — через 0, безразличие (ничья) — через 1/2. Пусть всем участникам класса C присвоены номера от 1 до r. Рассмотрим матрицу $M=\|x_{ij}\|$ $(i, j=1, \ldots, r)$, представляющую собой часть матрицы доминирований—безразличий, соответствующую участникам класса C. Для определения относительной силы участников класса C учтем вначале число непосредственных доминирований (для простоты рассуждений будем пока рассматривать турнир без ничьих). Силой 1-го порядка участника i $(=1, \ldots, r)$ назовем число $\sum_{j=1}^{r} x_{ij}$, оно представляет собой просто сумму набранных им очков (или число одержанных им побед в турнире без ничьих). Сила 2-го порядка учитывает число побед участника, одержанных им не непосредственно, а посредством «промежуточного» участника: скажем, если a победил b, а b победил c, то можно сказать, что a одержал победу «2-го порядка» над c. Сила 2-го порядка учитывает число побед «2-го порядка». Только здесь надо иметь в виду следующее обстоятельство: один участник может одержать над другим победу «2-го порядка» не единожды, а, так сказать, многократно. Например, пусть
a победил b_1, а b_1 победил c;
a победил b_2, а b_2 победил c;
a победил b_3, а b_3 победил c.

Тогда можно считать, что a одержал трехкратную победу «2-го порядка» над c. Вообще, кратность победы «2-го порядка» i над j есть $\sum_{k=1}^{r} x_{ik}\cdot x_{kj}$. Под силой 2-го порядка участника i понимается число одержанных им побед «2-го порядка» с учетом кратностей этих побед. Точно так же вводится сила 3-го порядка и вообще сила n-го порядка участника i — для любого натурального числа $n=1, 2, \ldots$. Для подсчета силы 2-го порядка обратим внимание на то, что число $\sum_{k=1}^{r} x_{ik}\cdot x_{kj}$, выражающее кратность победы «2-го порядка» i над j, есть элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы M^2 (здесь произведение матриц понимается как в линейной алгебре), откуда сила 2-го порядка участника i есть сумма элементов, стоящих в i-й строке матрицы M^2. Аналогично сила n-го порядка участника i есть сумма элементов, стоящих в i-й строке матрицы M^n. Обозначая через $x_{ij}^{(n)}$ элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы M^n, а силу n-го порядка участника i через $d_i^{(n)}$, получаем $d_i^{(n)}=\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^{(n)}$. Под относительной силой n-го порядка участника i понимается отношение

$$\pi_i^{(n)}=d_i^{(n)}\Bigg/\sum_{k=1}^{r} d_k^{(n)}. \qquad (15)$$

Оказывается, что имеет место следующее важное обстоятельство: *при неограниченном возрастании n число $\pi_i^{(n)}$ стремится к определенному пределу; этот предел* (обозначим его через π_i) *и назовем относительной силой участника i.* Будем проводить «тонкое» ранжирование участников по относительной силе, т. е. будем полагать, что i доминирует j тогда и только тогда, когда $\pi_i>\pi_j$.

В отличие от используемого в практике спортивных турниров ранжирования по числу набранных очков (т. е. в нашей терминологии по силе 1-го порядка), ранжирование по относительной силе учитывает не только число побед, одержанных участником, но и «качество» этих побед, так как здесь победа над более сильным участником ценится дороже.

Снимем теперь наложенное ранее ограничение — что турнир без ничьих. Если мы будем считать, что относительная сила участника i вычисляется по формуле (15), то по существу ничего в приведенных выше рассуждениях и выводах не изменится; меняется только истолкование чисел $d_i^{(n)}$, например $d_i^{(1)}$ есть число побед участника i, сложенное с полусуммой числа ничьих (т. е. есть число «очков» при обычной системе подсчета «очков», скажем, в шахматных турнирах).

Вектор $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_r)$, в котором i-я компонента есть относительная сила участника i, назовем предельным вектором. Таким образом, можно сказать, что «тонкое» ранжирование проводится по компонентам предельного вектора.

Возникает естественный вопрос о нахождении предельного вектора. Оказывается, что предельный вектор является так называемым собственным вектором матрицы M; в силу этого найти предельный вектор можно, не определяя по формуле (15) чисел $\pi_i^{(n)}$.

Таблица 22

	k	$n-k$
k	B_{11}	B_{12}
$n-k$	0	B_{22}

Таблица 23

	k	
k	j	
	i 0	

Остановимся на этом более подробно. Пусть $M = \|m_{ij}\|$ — произвольная действительная матрица порядка n. Как известно, число λ, для которого разрешимо уравнение $Mx = \lambda x$ (x — n-компонентный вектор), называется собственным значением матрицы M, а x — собственным вектором матрицы M. Собственное значение матрицы является корнем характеристического уравнения $\det(\lambda E - M) = 0$, где E — единичная матрица n-го порядка. В общем случае характеристическое уравнение может не иметь действительных корней, однако, если матрица M неотрицательна, то обязательно имеется действительный, причем неотрицательный корень (приведенное утверждение известно в линейной алгебре под названием теоремы Перрона — Фробениуса). Для неотрицательной матрицы M наибольшее среди неотрицательных собственных значений называется ее **числом Перрона — Фробениуса** и обозначается далее через $\lambda(M)$. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda(M)$, имеет неотрицательные компоненты.

Далее, матрица M называется **разложимой**, если в множестве $\{1, \ldots, n\}$ существует такое нетривиальное подмножество J, что для всех $i \notin J$ $j \in J$ выполняется $m_{ij} = 0$. При этом, если J содержит k элементов ($0 < k < n$), то перестановкой строк и столбцов разложимую матрицу можно привести к виду матрицы табл. 22, где в левом нижнем углу стоит нулевая матрица размерности $(n-k) \times k$. Для неотрицательной неразложимой матрицы M ее число Перрона — Фробениуса обладает следующими дополнительными свойствами (см., например, Х. Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972, с. 138):

1) $\lambda(M) > 0$ и каждый собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda(M)$, положителен:

б) если s_i — i-я строчная сумма, t_j — j-я столбцовая сумма матрицы M, то

$$\min_i s_i \leqslant \lambda(M) \leqslant \max_i s_i; \qquad \min_j t_j \leqslant \lambda(M) \leqslant \max_j t_j;$$

в) собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda(M)$, единственный с точностью до скалярного множителя.

Для неотрицательной неразложимой матрицы M по свойству в) существует единственный собственный нормированный вектор, соответствующий собственному числу Перрона — Фробениуса $\lambda(M)$. Оказывается, что *если матрица доминирований — безразличий неразложима, то собственный нормированный вектор, соответствующий ее числу Перрона — Фробениуса, совпадает с ее предельным вектором.*

Далее, имеет место следующее важное обстоятельство: *матрица доминирований — безразличий, представляющая собой ограничение линейного отношения предпочтения на любом классе его отношения взаимной достижимости, неразложима.* Действительно, пусть ρ — линейное отношение на множестве $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\|m_{ij}\|$ — матрица доминирований — безразличий для элементов, составляющих класс отношения взаимной достижимости $\overset{\Delta}{\rho}$. Предположим, что эта матрица разложима, тогда она может быть приведена к виду матрицы табл. 23. Возьмем $i > k$, $j \leqslant k$. Так как элементы a_i и a_j находятся в одном классе эквивалентности $\overset{\Delta}{\rho}$, то существует цепочка $a_i, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}, a_j$, в которой каждый элемент состоит с последующим в отношении ρ. В частности, $(a_i, a_{i_1}) \in \rho$, т. е. $m_{ii_1} \neq 0$, поэтому (см. табл. 23) $i_1 > k$. Точно так же, учитывая, что $(a_{i_1}, a_{i_2}) \in \rho$, получаем $m_{i_1 i_2} \neq 0$, поэтому $i_2 > k$ и т. д. По индукции получаем $j > k$, что ведет к противоречию.

Отметим, что нормированный собственный вектор, соответствующий числу Перрона — Фробениуса неотрицательной неразложимой матрицы, не меняется при следующих преобразованиях матрицы: 1) умножении матрицы на число $k>0$; 2) прибавлении к ней матрицы вида kE. Отсюда следует, что при нахождении предельного вектора матрицы доминирований — безразличий можно все элементы этой матрицы умножить на произвольное положительное число, а в качестве элементов, стоящих по главной диагонали, взять любые равные числа (проще всего положить их равными нулю).

Из изложенного выше получаем, что если M — матрица доминирований—безразличий, то ее предельный вектор π можно найти как решение системы линейных уравнений $M\pi = \lambda\pi$, где λ — наибольший неотрицательный действительный корень характеристического уравнения $\det(\lambda E - M) = 0$.

Итак, рассмотренный в этом параграфе метод построения ранжирования, согласованного с предпочтением, содержит следующие три этапа:

1) *построение «грубого» ранжирования с помощью выделения контуров графа отношения предпочтения и их линейного упорядочения факторизацией отношения предпочтения;*

2) *построение «тонкого» ранжирования для каждого класса элементов, отождествленных при «грубом» ранжировании; оно осуществляется по компонентам предельного вектора матрицы доминирований — безразличий;*

3) *совмещение «грубого» и «тонкого» ранжирований.*

Способ проведения «грубого» ранжирования, указанный в п. 1, имеет достаточно убедительное интуитивное обоснование; основой же метода проведения «тонкого» ранжирования по предельному вектору является математический факт существования и единственности для неотрицательной неразложимой матрицы нормированного собственного вектора, соответствующего ее числу Перрона — Фробениуса.

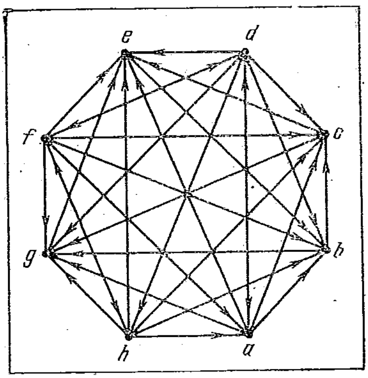


Рис. 30

3. Пример построения ранжирования. Проиллюстрируем опи-

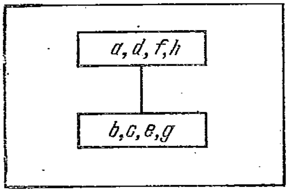


Рис. 31

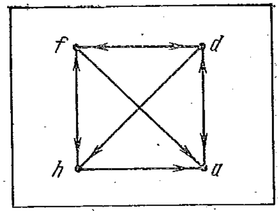


Рис. 32

санный в настоящем параграфе метод ранжирования на следующем примере.

Пример 17. (Ранжирование участников турнира). Пусть на множестве $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ задано отношение ρ линейного предпочтения матрицей доминирований — безразличий (табл. 24). Граф отношения ρ изображен на рис. 30 (доминированию x над y соответствует стрелка $x \rightarrow y$, безразличию x и y — двойная стрелка $x \leftrightarrow y$, петли не нарисованы). Для осуществления первого этапа (проведения «грубого» ранжирования) надо вначале найти классы отношения взаимной достижимости, т. е. выделить контуры графа отношения ρ; для нахождения контуров графа можно использовать алгоритм, описанный в § 9, п. 4. В нашем случае граф имеет два контура: $C_1=\{a, d, f, h\}$, $C_2=\{c, g, e, b\}$. Замечая, что $(a, b) \in \rho$, $a \in C_1$, $b \in C_2$, получаем, что класс C_1 доминирует класс C_2. Итак, результатом первого этапа ранжирования является разбиение всего множества объектов на два класса и размещение одного класса над другим (рис. 31).

Второй этап состоит в ранжировании объектов каждого класса. Рассмотрим вначале класс C_1. Отношение предпочтения элементов класса C_1 представлено графом рис. 32. Для нахождения предельного вектора матрицы доминирований — безразличий удобно все элементы этой матрицы умножить на 2 и элементы, стоя-

Таблица 24

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	1/2	1	1	1/2	1	0	1	0
b	0	1/2	1	0	0	0	1	0
c	0	0	1/2	0	1	0	1	0
d	1/2	1	1	1/2	1	1/2	1	1
e	0	1	0	0	1/2	0	0	0
f	1	1	1	1/2	1	1/2	1	1/2
g	0	0	0	0	1	0	1/2	0
h	1	1	1	0	1	1/2	1	1/2

щие по главной диагонали, положить равными нулю (см. конец п. 2). В результате получаем матрицу

$$\begin{array}{c} \\ a \\ d \\ f \\ h \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & d & f & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{M}_1.$$

Напомним, что сила k-го порядка объектов характеризуется построчной суммой матрицы $\mathrm{M}^k{}_1$; в частности, для объектов a, d, f, h их сила 1-го порядка представляется вектором (1, 4, 4, 3), а соответствующий нормированный вектор есть $\pi^1=(1/12, 4/12, 4/12, 3/12)$. По силе 1-го порядка получаем следующее ранжирование объектов (рис. 33).

Далее находим

$$\mathrm{M}^2{}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда вектор, характеризующий силу 2-го порядка объектов a, d, f, h, есть (4, 11, 9, 6), а соответствующий вектор относительной силы 2-го порядка $\pi^2=(4/30, 11/30, 9/30, 6/30)$. Аналогичным образом находим

$$\pi^3=(11/78,\ 25/78,\ 25/78,\ 17/78),\quad \pi^4=(25/206,\ 70/206,\ 64/206,\ 47/206),$$

$$\pi^5=(70/534,\ 183/534,\ 167/534,\ 114/534);$$

соответствующие ранжирования представлены на рис. 34.

Видим, что распределение мест по силе 4- и 5-го порядка одинаково; по-видимому, оно стабилизировалось (однако полной уверенности в этом нет — слишком мало итераций). Продемонстрируем здесь второй способ нахождения предельного вектора — как собственного вектора матрицы M_1, соответствующего ее наибольшему собственному значению. Вообще, нахождение собственных значений матрицы и соответствующих им собственных векторов — уже достаточно громоздкая задача (для решения которой разработаны вычислительные методы, см., например, Математический практикум. Под ред. Г. Н. Положего. М.: Физматгиз, 1960, с. 351). Но так как здесь нас интересуют не сами компоненты собственного вектора, а лишь соотношение их по величине, то попробуем найти упорядочение компонент собственного вектора без нахождения самих компонент. Для этого воспользуемся следующим приемом. Составим характеристическое уравне-

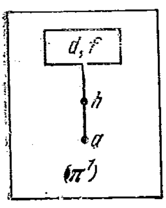


Рис. 33

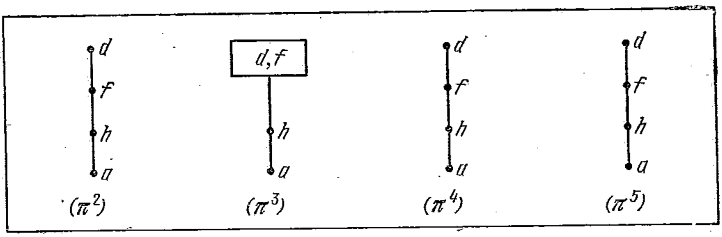


Рис. 34

ние для матрицы M_1

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 0. \tag{16}$$

Обозначим через λ_1 число Перрона — Фробениуса матрицы M_1, т. е. наибольший неотрицательный корень уравнения (16). Мы не будем находить решения уравнения (16), а найдем лишь (с требуемой точностью) интервал, содержащий λ_1. Грубую оценку для λ_1 можно получить по свойству б) чисел Перрона — Фробениуса (см. п. 2); $1<\lambda_1<4$; $2<\lambda_1<5$, откуда $2<\lambda_1<4$. Для сужения этого интервала рассмотрим многочлен $q(\lambda)=\lambda^4-3\lambda^2-8\lambda-5$. Непосредственной подстановкой находим $q(2{,}6)<0$, $q(2{,}7)>0$, откуда следует, что у многочлена $q(\lambda)$ имеется корень в интервале (2,6; 2,7), а так как правее точки 2,7 функция $q(\lambda)$ возрастает, то правее точки 2,7 у многочлена $q(\lambda)$ действительных корней нет. Таким образом, $2{,}6<\lambda_1<2{,}7$. Запишем систему уравнений $M_1x=\lambda_1x$ для нахождения координат собственного вектора $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, соответствующего собственному значению λ_1. Эта система в явном виде

$$x_2=\lambda_1x_1,$$
$$x_1+x_3+2x_4=\lambda_1x_2,$$
$$2x_1+x_2+x_4=\lambda_1x_3,$$
$$2x_1+x_3=\lambda_1x_4.$$

Так как координаты собственного вектора x определяются с точностью до пропорционального множителя, то можно зафиксировать любую координату этого вектора, например положить $x_1=1$. Тогда остальные координаты вектора x выражаются через λ_1:

$$x_2=\lambda_1,\quad x_3=\frac{\lambda_1^2+2\lambda_1+2}{\lambda_1^2-1},\qquad x_4=\frac{3\lambda_1+2}{\lambda_1^2-1}. \tag{17}$$

Теперь, зная интервал, где находится λ_1, определим интервалы нахождения x_1, x_2, x_3, x_4; если эти интервалы окажутся попарно не пересекающимися, то мы установим упорядоченность по величине координат x_1, x_2, x_3, x_4; если же какие-нибудь два интервала «перекроются», то сузим интервал для λ_1 и повторим процедуру. В нашем случае, учитывая соотношения (17) и $2{,}6<\lambda_1<2{,}7$, имеем

$$x_3<\frac{2{,}7^2+2\cdot2{,}7+2}{2{,}6^2-1}=\frac{14{,}69}{5{,}76}<2{,}6;\qquad x_3>\frac{2{,}6^2+2\cdot2{,}6+2}{2{,}7^2-1}=\frac{13{,}96}{6{,}29}>2{,}2;$$

$$x_4<\frac{3\cdot2{,}7+2}{2{,}6^2-1}=\frac{10{,}1}{5{,}76}<2;\qquad x_4>\frac{3\cdot2{,}6+2}{2{,}7^2-1}=\frac{9{,}8}{6{,}29}>1{,}5.$$

Полученные интервалы нахождения координат x_1, x_2, x_3, x_4 (в нашем случае интервалы попарно не пересекаются) изображены на рис. 35.

Таким образом, получаем следующую упорядоченность координат вектора x: $x_1<x_4<x_3<x_2$; соответствующее ей линейное упорядочение объектов a, d, f, h представлено на рис. 36, оно совпадает с упорядочением по силе 4-го порядка. Аналогично находим линейное упорядочение объектов класса C_2 (рис. 37). Наконец, третий этап, состоящий в совмещении «грубого» и «тонкого» ранжирований, приводит к окончательному ранжированию объектов, представленному на рис. 38.

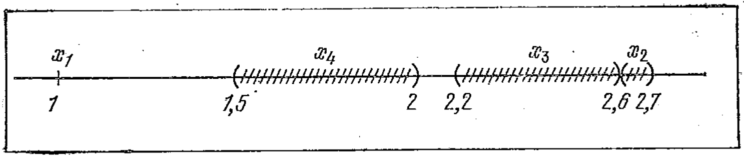


Рис. 35

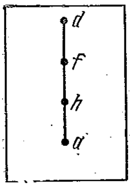


Рис. 36

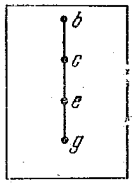


Рис. 37

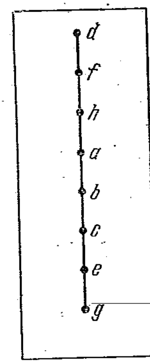


Рис. 38

Проанализируем теперь полученные результаты, интерпретируя матрицу доминирований — безразличий (табл. 24) как таблицу шахматного турнира (исключив из нее главную диагональ). В результате «грубого» ранжирования выделилось две «лиги»: «высшая» (куда вошли a, d, f, h) и «низшая» (куда вошли b, c, e, g); фактически дальнейшее сравнение участников проводится внутри своей «лиги». Посмотрим на итоги распределения мест в каждой лиге. Таблица участников «высшей лиги» есть табл. 25. При ранжировании по относительной силе участник d занял первое место, опередив участника f (хотя они набрали одинаковое число очков в турнире своей лиги). Это обусловлено тем, что, хотя они оба одержали по одной победе, d обыграл более сильного участника, чем f. Распределение мест остальных участников «высшей лиги» совпадает с их распределением по «набранным очкам».

Итоги турнира низшей лиги отражены в табл. 26. При ранжировании по относительной силе участник b опередил участника c, хотя они набрали одинаковое количество очков. Это объясняется тем, что если исключить из рассмотрения их победы над g, то видим, что b обыграл более сильного участника, чем c. Таким образом, отдача предпочтения участнику b перед участником c согласуется как с интуицией, так и с общепринятым правилом определения победителя среди двух участников, набравших одинаковое количество очков, — по личной встрече между ними. Однако при распределении мест для участников e и g указанное правило нарушено: участник e занял в ранжировании по относительной силе более высокое место, чем g, хотя g обыграл e; это

Таблица 25

	a	d	f	h	Очки
a		1/2	0	0	1/2
d	1/2		1/2	1	2
f	1	1/2		1/2	2
h	1	0	1/2		3/2

Таблица 26

	b	c	e	g	Очки
b		1	0	1	2
c	0		1	1	2
e	1	0		0	1
g	0	0	1		1

объясняется тем, что e обыграл победителя турнира низшей лиги, а g — более слабого игрока (хотя им оказался именно e!).

Таким образом, ранжирование по относительной силе не совпадает, вообще говоря, с ранжированием, определяемым правилами, скажем, шахматных турниров. Не следует ли отсюда, что нужно «подправить» правила распределения мест в шахматных турнирах? Разумеется, никакой необходимости в этом нет. Ведь правила распределения мест участников шахматных турниров сложились на основе многолетней шахматной практики и закрепились в сознании шахматистов. Победитель турнира — это сильнейший игрок не в каком-то абсолютном понимании, а по принятым правилам определения победителя. Изменение правила распределения мест можно сравнить с изменением правил ходов фигур: это были бы «другие» шахматы.

Глава V

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Простейшие понятия теории упорядоченных множеств мы рассмотрели в § 10, п. 4. В данной главе мы проведем более основательное изучение упорядоченных множеств, сосредоточив внимание на тех вопросах, которые имеют непосредственное отношение к задачам принятия решений.

14. ЛИНЕЙНЫЕ ДОУПОРЯДОЧЕНИЯ ПОРЯДКОВ

1. Совместимость отношения с отношением порядка. Пусть ω — отношение порядка на множестве A. Бинарное отношение ρ на множестве A будем называть *совместимым* с порядком ω, если граф отношения $\omega \cup \rho$ не имеет контуров. Это требование равносильно тому, что отношение $\omega\cup\rho$ включается в некоторое отношение порядка на A. Действительно, если $\omega\cup\rho\subset\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}$ — отношение порядка, то граф отношения $\omega\cup\rho$ не имеет контуров, так как контур графа $(A, \omega\cup\rho)$ был бы также контуром графа $(A, \overline{\omega})$, а граф отношения порядка контуров не имеет. Обратно, если граф отношения $\omega\cup\rho$ не имеет контуров, то по предложению 7 его отношение достижимости $\widehat{\omega\cup\rho}$ является отношением порядка и выполняется $\omega\cup\rho\subset\widehat{\omega\cup\rho}$.

Ясно, что если отношение ρ совместимо с порядком ω и компоненты упорядоченных пар, входящих в ρ, составляют подмножество $X\subset A$, то ρ совместимо и с порядком, индуцированным[1] отношением ω на X. Оказывается, верно и обратное утверждение; его мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1 (теорема о совместимости). *Пусть ω — отношение порядка на множестве A, ρ — бинарное отношение на A, причем компоненты упорядоченных пар, принадлежащих отношению ρ, составляют подмножество $X\subset A$. Если ρ совместимо с порядком, индуцированным отношением ω на подмножестве X, то ρ совместимо и с порядком ω.*

Обозначим через $\Omega(A)$ множество всех отношений порядка на множестве A. Множество $\Omega(A)$ само является упорядоченным: в качестве отношения порядка на нем выступает теоретико-множественное включение (так как отношения являются множествами, то понятие включения для них определено). В частности, можно говорить о максимальных элементах этого упорядоченного множества. Из общего определения максимального элемента (см. § 10, п. 4) получаем, что отношение порядка ω на множестве A будет максимальным тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в каком другом отношении порядка на этом множестве. Из теоремы о совместимости вытекает важное

Следствие. *В упорядоченном множестве $(\Omega(A), \subset)$ всех отношений порядка на множестве A максимальными элементами являются линейные отношения порядка и только они.*

Действительно, предположим, что для линейного отношения порядка ω на A найдется такое отношение порядка $\overline{\omega}$ на A, что $\omega\subset\overline{\omega}$ и $\omega\neq\overline{\omega}$. Тогда для некоторой пары $(a, b)\in\overline{\omega}$ выполняется $(a, b)\notin\omega$, а так как отношение ω линейно, то $(b, a)\in\omega$, значит, $(b, a)\in\overline{\omega}$. Учитывая, что $(a, b)\in\overline{\omega}$, получим ввиду антисимметричности отношения $\overline{\omega}$, что $a=b$, но тогда должно выполняться в

[1] Для любого бинарного отношения σ на множестве A индуцированное им отношение на подмножестве $X\subset A$ состоит из тех пар, входящих в отношение σ, в которых обе компоненты принадлежат подмножеству X.

силу рефлексивности отношения порядка ω, $(a, b) \in \omega$, что противоречит предположению. Обратно, пусть отношение порядка ω на A не является линейным, тогда найдется такая пара (a, b), что $(a, b) \notin \omega$ и $(b, a) \notin \omega$. Но в этом случае бинарное отношение $\rho = \{(a, b)\}$ совместимо с порядком, индуцированным отношением ω на подмножестве $\{a, b\}$ (соответствующий граф, изображенный на рис. 39, не имеет контуров). По теореме о совместимости получаем, что отношение ρ совместимо с порядком ω, значит, найдется такое отношение порядка $\bar{\omega}$ на A, которое содержит отношение $\omega \cup \rho$; так как $(a, b) \in \rho$, то $(a, b) \in \bar{\omega}$, но $(a, b) \notin \omega$, поэтому выполняется строгое включение $\omega \subset \bar{\omega}$. Итак, мы показали, что нелинейное отношение порядка не будет максимальным элементом в $(\Omega(A), \subset)$.

Сформулируем теперь один из классических результатов об отношениях порядка.

Теорема 2 (теорема Шпильрайна). *Для всякого отношения порядка ω на множестве A найдется такое линейное отношение порядка $\bar{\omega}$ на A,* что $\omega \subset \bar{\omega}$ (такое отношение $\bar{\omega}$ называется **линейным доупорядочением порядка** ω).

Кратко: *всякий порядок на множестве можно продолжить до линейного порядка на этом множестве.*

Доказательство теоремы Шпильрайна может быть получено прямым применением леммы Цорна (см. § 10, п. 4) к упорядоченному множеству $(\Omega(A), \subset)$. Действительно, если $(\omega_i)_{i \in I}$ — цепь отношений порядка на множестве A, то $\bigcup_{i \in I} \omega_i$ является, как нетрудно проверить, также отношением порядка на A. Таким образом, в упорядоченном множестве $(\Omega(A), \subset)$ каждая цепь имеет мажоранту, т. е. оно является индуктивным. По лемме Цорна получаем, что всякое отношение порядка мажорируется некоторым максимальным отношением порядка, но в данном случае «мажорируется» означает «включается», а по следствию из теоремы о совместимости максимальность отношения порядка означает его линейность.

Из теоремы о совместимости и теоремы Шпильрайна легко получается следующее

Следствие. *Всякое линейное доупорядочение подмножества упорядоченного множества может быть продолжено до линейного доупорядочения всего упорядоченного множества.*

В частности, если X — дискретное подмножество в (A, ω) (т. е. любые два различных элемента из X несравнимы), то всякое линейное упорядочение подмножества X может быть продолжено до линейного упорядочения всего множества A.

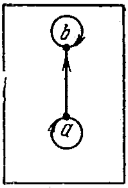


Рис. 39

Для отношения порядка на конечном множестве содержание теоремы Шпильрайна можно выразить, введя понятие нумерации. Под **нумерацией** n-элементного упорядоченного множества A, на котором задано отношение порядка ω, будем понимать такое взаимно-однозначное отображение множества A в $\{1, 2, \ldots, n\}$, при котором большему (относительно порядка ω) элементу соответствует больший номер. Нумерацию множества A можно рассматривать так же, как расположение элементов множества A в последовательность без повторяющихся элементов, причем выполняется $a_i \overset{\omega}{\geqslant} a_j \Rightarrow i \geqslant j$.

Для конечного упорядоченного множества (A, ω) задание его нумерации равносильно заданию линейного доупорядочения порядка ω. Действительно, если построена нумерация, то она задает линейное доупорядочение $\bar{\omega}$ порядка ω по правилу $a_i \overset{\bar{\omega}}{\geqslant} a_j \Leftrightarrow i \geqslant j$; обратно, если $\bar{\omega}$ — какое-нибудь линейное доупорядочение порядка ω, то мы получим нумерацию упорядоченного множества (A, ω), если присвоим номер 1 самому нижнему элементу диаграммы упорядоченного множества $(A, \bar{\omega})$, номер 2 следующему за ним элементу и т. д.

Итак, *для конечных упорядоченных множеств теорема Шпильрайна означает возможность задания нумерации.* Отметим также, что с геометрической точки зрения это означает возможность «выпрямления» диаграммы отношения порядка таким образом, что больший элемент всегда будет помещен выше меньшего на «выпрямленной» диаграмме. Пример такого «выпрямления» диаграммы упорядоченного множества приведен на рис. 40; там же дана нумерация упорядоченного множества, изображенного на диаграмме слева. Конечно, такое «выпрямление» диаграммы может быть проведено не единственным способом; описанием всех таких «выпрямлений» упорядоченного множества мы и займемся в следующем пункте.

2. Алгоритм построения линейных доупорядочений. Даже для упорядоченных множеств, диаграммы которых содержат несколько элементов, построение всех их линейных доупорядочений является довольно громоздкой задачей (попробуйте в качестве примера построить все линейные доупорядочения порядка, диаграмма которого приведена на рис. 40; ответ см. на рис. 45). Правда, имеется тривиальный алгоритм нахождения всех линейных доупорядочений конечного упорядоченного множества: если A содержит n элементов, надо выписать всевозможные последовательности длины n элементов множества A без повторений (число таких последовательностей равно $n!$) и для каждой такой последовательности проверить выполнение условия, что большему элементу соответствует больший номер. Последовательности, удовлетворяющие этому условию, и будут нумерациями упорядоченного множества. Однако простота приведенного алгоритма обманчива, прежде всего, ввиду катастрофического роста $n!$ с увеличением n; например, уже $10!$ превышает 3 млн. Кроме того, проверка условия, что большему элементу соответствует больший номер, требует в общем случае перебора $C^2_n = n(n-1)/2$ пар элементов, так что указанный способ оказывается практически неприемлемым даже для ЭВМ, если число элементов в A составляет несколько десятков. Далее излагается простой алгоритм позволяющий «вручную» найти все линейные доупорядочения конечного упорядоченного множества при условии, что его диаграмма обозрима.

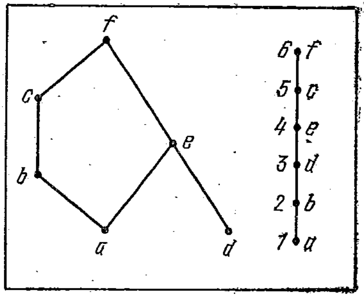


Рис. 40

Будем решать для упорядоченного множества (A, ω) эквивалентную задачу — найти все его нумерации. Пусть A содержит n элементов и a — максимальный элемент в (A, ω). Предположим, что уже имеется нумерация подмножества $A \setminus a$ (числами $1, 2, \ldots, n-1$); тогда, сохраняя эту нумерацию для элементов из $A \setminus a$ и присваивая элементу a номер n, получаем нумерацию всего множества A. В самом деле, пусть $a_i \overset{\omega}{\geqslant} a_j$. Если $a_i, a_j \neq a$, то $i \geqslant j$ по условию нумерации подмножества $A \setminus a$; если же один из этих элементов равен a, то, так как a максимален, $a = a_i$; в этом случае $i = n$ и выполняется $i \geqslant j$. Описанную выше нумерацию множества A назовем нумерацией, полученной удалением максимального элемента a. Ясно, что нумерации, полученные удалением различных максимальных элементов, различны (так как номер n присваивается в этих нумерациях разным элементам). Далее, всякая нумерация множества A может быть получена удалением некоторого его максимального элемента. Это следует из того, что при всякой нумерации множества A номер n присваивается обязательно максимальному элементу и ограничение нумерации на подмножестве, полученном удалением элемента, имеющего наибольший номер, есть нумерация этого подмножества. Таким образом, мы можем получить все нумерации множества A, если будем иметь все нумерации всех подмножеств, получающихся из A удалением одного из его максимальных элементов. Далее, к каждому из таких подмножеств применим тот же прием для нахождения их нумераций.

Таким образом, для нахождения всех нумераций множества A надо вначале составить вспомогательный граф $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$, вершинами которого являются подмножества множества A, и для любых двух подмножеств $X, Y \in \mathscr{X}$ $(X, Y) \in \gamma_\omega$ тогда и только тогда, когда подмножество Y может быть получено из подмножества X удалением одного из его максимальных элементов (в качестве множества $\mathscr{X}$ вершин этого вспомогательного графа выступают лишь те подмножества множества A, которые могут быть получены в результате удаления максимальных элементов подмножеств начиная с A).

Так как у подмножества $Y \in \gamma_\omega(X)$ число элементов на единицу меньше, чем у подмножества X, то в графе $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$ длина любого пути не превышает n, причем окончательными вершинами в нем являются одноэлементные подмножества. Получаем в итоге следующий алгоритм построения всех нумераций упорядоченного множества (A, ω):

1) строим вспомогательный граф $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$ упорядоченного множества (A, ω);

2) для каждого одноэлементного подмножества, являющегося окончательной вершиной графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$, выписываем его единственную нумерацию.

Далее, пусть X — k-элементное подмножество $(k=2, \ldots, n)$, являющееся вершиной графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$, и для каждого подмножества $X \setminus a \in \gamma_\omega(X)$ уже построены все его нумерации. Каждую нумерацию подмножества $X \setminus a$ продолжаем до нумерации подмножества X, сохраняя ее для элементов из $X \setminus a$ и присваивая элементу a номер k. Для получения всех нумераций подмножества X необходимо перебрать все смежные с ним подмножества $X \setminus a \in \gamma_\omega(X)$ и для каждого такого подмножества продолжить указанным выше способом все его нумерации.

Через конечное число шагов мы получим все нумерации множества A, т. е. все линейные продолжения порядка ω. Рассмотрим применение изложенного алгоритма на примерах.

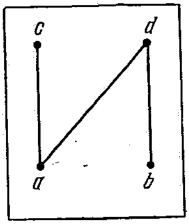


Рис. 41

Пример 18. Возьмем упорядоченное множество (A, ω), заданное диаграммой рис. 41.

Таблица 27

	a	b	c	d
$\{a\}$	1			
$\{b\}$		1		
$\{a, b\}$	1 2	2 1		
$\{a, c\}$	1		2	
$\{a, b, d\}$	1 2	2 1		3 3
$\{a, b\ c\}$	1 2 1	2 1 3	3 3 2	
$\{a, b, c, d\}$	1 2 1 2 1	2 1 2 1 3	4 4 3 3 2	3 3 4 4 4

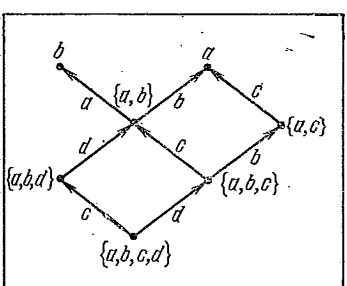


Рис. 42

Таблица 28

	a	b	c	d	e	f
$\{a\}$	1					
$\{d\}$				1		
$\{a, d\}$	1 2			2 1		
$\{a, b\}$	1	2				
$\{a, d, e\}$	1 2			2 1	3 3	
$\{a, b, d\}$	1 2 1	3 3 2		2 1 3		
$\{a, b, c\}$	1	2	3			
$\{a, b, d, e\}$	1 2 1 2 1	4 4 3 3 2		2 1 2 1 3	3 3 4 4 4	
$\{a, b, c, d\}$	1 2 1 1	3 3 2 2	4 4 4 3	2 1 3 4		
$\{a, b, c, d, e\}$	1 2 1 2 1 1 2 1 1	4 4 3 3 2 3 3 2 2	5 5 5 5 5 4 4 4 3	2 1 2 1 3 2 1 3 4	3 3 4 4 4 5 5 5 5	
$\{a, b, c, d, e, f\}$	1 2 1 2 1 1 2 1 1	4 4 3 3 2 3 3 2 2	5 5 5 5 5 4 4 4 3	2 1 2 1 3 2 1 3 4	3 3 4 4 4 5 5 5 5	6 6 6 6 6 6 6 6 6

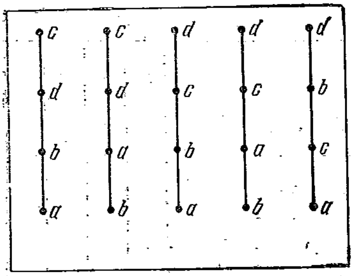
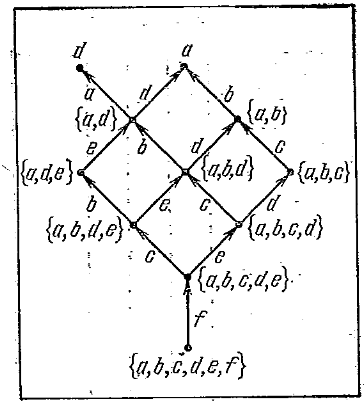


Рис. 43

Рис. 44 →



Шаг 1. Строим вспомогательный граф $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$ (см. рис. 42). Его построение начинаем с множества $A=\{a, b, c, d\}$. Буква около стрелки указывает, удалением какого максимального элемента получено подмножество, в которое эта стрелка ведет.

Шаг 2. Составляем таблицу для нахождения всех линейных доупорядочений (нумераций) подмножеств, являющихся вершинами графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$ (табл. 27). Заполнение таблицы производим по строкам сверху вниз; каждая строка представляет собой нумерацию подмножества, записанного в боковине таблицы. При составлении нумерации подмножества X, состоящего из k элементов, надо переписывать все записанные выше в таблице нумерации подмножеств $Y \in \gamma_\omega$ (X) и присвоить номер k тому элементу, который дополняет Y до X. В нижнем «блоке» таблицы получаются все нумерации подмножества $A=\{a, b, c, d\}$. Соответствующие им линейные доупорядочения изображены на рис. 43.

Пример 19. Найдем все линейные доупорядочения порядка, диаграмма которого представлена на рис. 40.

Вспомогательный граф данного упорядоченного множества изображен на рис. 44, таблица нумераций вершин этого графа есть табл. 28. Всего имеется 9 различных нумераций (линейных доупорядочений), они представлены диаграммами рис. 45.

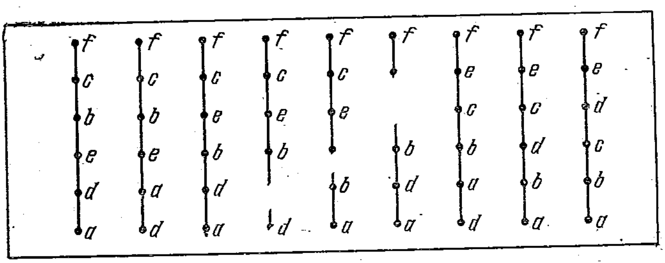


Рис. 45

3. Подсчет числа линейных доупорядочений. В некоторых вопросах требуется найти не сами линейные доупорядочения упорядоченного множества, а их количество. Для конечного упорядоченного множества (A, ω) число его линейных доупорядочений (или, что то же самое, число его нумераций) можно определить, не находя сами нумерации, а используя лишь вспомогательный граф $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$. Обозначим через $N(X)$ число всех нумераций подмножества X, являющегося вершиной графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$. Так как нумерации подмножества X получаются продолжением всех нумераций подмножеств $Y \in \gamma_\omega(X)$, то

$$N(X) = \sum_{Y \in \gamma_\omega(X)} N(Y). \tag{18}$$

Каждое подмножество, являющееся окончательной вершиной графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$, одноэлементно и, следовательно, имеет единственную нумерацию, поэтому, используя соотношение (18), можно найти число всех нумераций любого подмножества, являющегося вершиной графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$, „спускаясь“ к этому подмножеству по графу $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$ от его окончательных вершин. Практически это удобно проделать следующим образом. Около каждой окончательной вершины графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$ проставляем 1; далее, согласно (18) у каждой вершины графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$ проставляем число, равное сумме всех чисел, проставленных около всех смежных с ней вершин. Для каждого подмножества, являющегося вершиной графа $(\mathscr{X}, \gamma_\omega)$, проставленное около него число и есть число его линейных доупорядочений. На рис. 46 этот способ подсчета числа линейных доупорядочений показан для упорядоченного множества примера 19.

Далее мы рассмотрим способ подсчета числа линейных доупорядочений таких упорядоченных множеств, которые получаются с помощью композиции специального вида, называемой *упорядоченной суммой* упорядоченных множеств. Этот вид композиции, имеющий важное значение для многих вопросов теории упорядоченных множеств, определяется так. Пусть $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ семейство упорядоченных множеств, причем множества A_i $(i \in I)$ попарно не пересекаются. На множестве индексов I также должно быть задано отношение (строгого) порядка $>$. Тогда на множестве $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ определяется отношение порядка ω следующим образом. Пусть $a, b \in A$. 1. Если элементы a и b принадлежат одному и тому же подмножеству A_i, то условие $a \overset{\omega}{>} b$ равнозначно условию

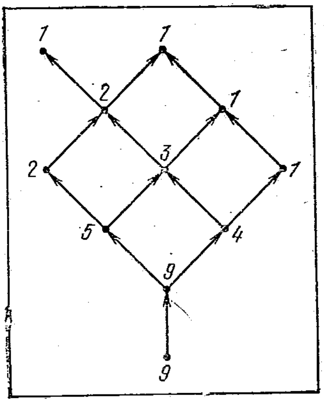


Рис. 46

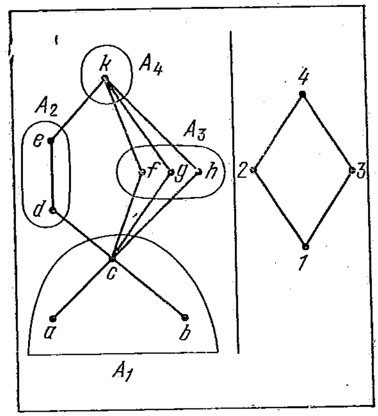


Рис. 47

$a \overset{\omega_i}{>} b$. 2. Если $a \in A_i$, $b \in A_j$, где $i \neq j$, то условие $a \overset{\omega}{>} b$ равнозначно тому, что $i > j$.

Легко проверить, что ω действительно является отношением порядка на A; упорядоченное множество (A, ω) называется упорядоченной суммой семейства упорядоченных множеств $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$. Наглядно упорядоченную сумму семейства $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ можно представить следующим образом. Берется диаграмма упорядоченного множества $(I, >)$ и вместо вершины $i \in I$ в нее «вставляется» диаграмма упорядоченного множества (A_i, ω_i). Например, упорядоченное множество, диаграмма которого изображена на рис. 47, есть упорядоченная сумма четырех упорядоченных множеств, диаграммы которых приведены на рис. 48; диаграмма упорядоченного множества индексов дана на рис. 47 справа.

Имеется два важных частных случая такой композиции.

1. *Отношение порядка $>$ на множестве индексов линейно* (в этом случае говорят о л и н е й н о у п о р я д о ч е н н о й с у м м е упорядоченных множеств). Линейно упорядоченную сумму семейства упорядоченных множеств $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ можно рассматривать как размещение диаграмм упорядоченных множеств (A_i, ω_i) по «этажам»: большему индексу $i \in I$ соответствует больший «этаж». Линейно упорядоченная сумма упорядоченных множеств A_1, A_2, A_3, A_4, где порядок на множестве индексов есть $4 > 3 > 2 > 1$, изображена на рис. 49.

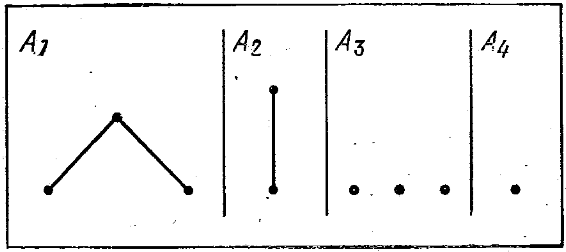


Рис. 48

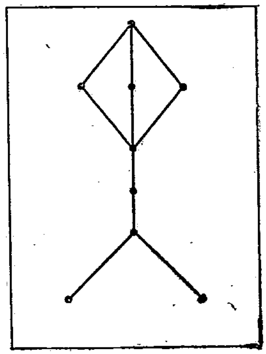


Рис. 49

2. *Отношение порядка на множестве индексов тривиально* (т. е. условие $i > j$ не выполняется ни для каких $i, j \in I$). Такие упорядоченные множества называются дискретными, а соответствующая упорядоченная сумма — дискретной суммой упорядоченных множеств. Диаграмма дискретной суммы семейства упорядоченных множеств $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ получается простым размещением диаграмм этих упорядоченных множеств рядом друг с другом; например, рис. 48 можно рассматривать (если убрать разделительные прямые) как диаграмму дискретной суммы упорядоченных множеств A_1, A_2, A_3, A_4.

Поставим задачу — найти число линейных доупорядочений для упорядоченной суммы упорядоченных множеств, зная число элементов и число линейных доупорядочений для каждой ее компоненты. В общем случае эта задача неразрешима: каждое упорядоченное множество является упорядоченной суммой всех своих одноэлементных подмножеств, для каждого из которых число элементов и число линейных доупорядочений равно единице, но число линейных доупорядочений различных упорядоченных множеств, содержащих одно и то же число элементов, различно. Однако для дискретной и линейно упорядоченной суммы упорядоченных множеств эта задача может быть легко решена; к ее решению мы сейчас и перейдем.

Найдем вначале число линейных доупорядочений (нумераций) линейно упорядоченной суммы упорядоченных множеств. Вид диаграммы линейно упорядоченной суммы представлен на рис. 50. Зафиксировав набор линейных доупорядочений каждой компоненты и разместив диаграммы этих линейных доупорядочений по «этажам», получим диаграмму

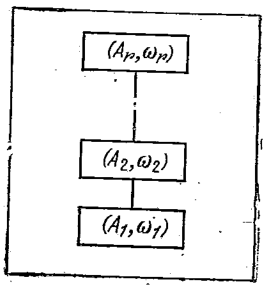


Рис. 50

линейного доупорядочения линейно упорядоченной суммы этих компонент. Очевидно, что разным наборам линейных доупорядочений компонент соответствуют разные линейные доупорядочения их линейно упорядоченной суммы и что всякое линейное доупорядочение линейно упорядоченной суммы можно получить указанным способом. Таким образом, число линейных доупорядочений линейно упорядоченной суммы равно числу всех наборов линейных доупорядочений ее компонент, т. е. произведению количеств линейных доупорядочений всех компонент линейно упорядоченной суммы.

Итак, если мы обозначим через N_k число линейных доупорядочений упорядоченного множества (A_k, ω_k) $(k=1, \ldots, r)$, через N — число линейных доупорядочений их линейно упорядоченной суммы, то

$$N=N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_r. \tag{19}$$

Например, для упорядоченных множеств A_1, A_2, A_3, A_4, диаграммы которых даны на рис. 48, находим: $N(A_1)=2$, $N(A_2)=1$, $N(A_3)=6$, $N(A_4)=1$, откуда число линейных доупорядочений их линейно упорядоченной суммы (см. рис. 49) равно 12. Применение формулы (19) позволяет в этом случае быстрее найти число линейных доупорядочений, чем с помощью построения вспомогательного графа, как это делалось выше.

Пусть теперь (A, ω) — дискретная сумма упорядоченных множеств (A_k, ω_k) $(k=1, \ldots, r)$; обозначим снова через N_k число линейных доупорядочений упорядоченного множества (A_k, ω_k), через N число линейных доупорядочений (A, ω), n_k число элементов в A_k, n число элементов в A (так как множества A_k попарно не пересекаются, то $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$). Тогда имеет место следующая формула[1]:

$$N=\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_r. \tag{20}$$

Доказательство формулы (20) проводится индукцией по r. При $r=1$ правая часть (20) есть $\frac{n_1!}{n_1!} N_1=N$. Покажем справедливость (20) для $r=2$. Пусть имеется два упорядоченных множества, первое из которых содержит n_1 элементов, второе n_2 элементов и заданы нумерации $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1})$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_{n_2})$ этих упорядоченных множеств. Нумерацию дискретной суммы этих упорядоченных множеств можно получить следующим образом: выделим в множестве $\{1, 2, \ldots, n_1+n_2\}$ произвольное n_1-элементное подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}$; его дополнение обозначим через $\{i_{n_1+1}, \ldots, i_{n_1+n_2}\}$ (будем предполагать, что указанные числа записаны в порядке возрастания). Тогда, присваивая каждому элементу a_s номер i_s $(s=1, \ldots, n_1)$, а каждому элементу b_t номер i_{n_1+t} $(t=1, \ldots, n_2)$, получаем,

[1] Для одного частного случая формула (20) приведена (без доказательства) в работе С. С. Кислицына «Конечные частично упорядоченные множества и соответствующие им множества перестановок». (Математические заметки, 1968, т. 4, № 5, с. 511—518.)

очевидно, нумерацию дискретной суммы этих упорядоченных множеств (это пояснено на рис. 51). Ясно, что каждая нумерация дискретной суммы может быть получена таким способом.

Итак, каждая пара нумераций исходных упорядоченных множеств порождает столько нумераций их дискретной суммы, сколькими способами можно выбрать n_1-элементное подмножество из (n_1+n_2)-элементного; число таких способов есть число сочетаний из n_1+n_2 по n_1: $C^{n_1}_{n_1+n_2}=\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!\cdot n_2!}$. Далее, если N_1 — число нумераций первого, а N_2 — число нумераций второго упорядоченного множества, то число пар их нумераций есть $N_1\cdot N_2$ и каждая такая пара нумераций порождает $\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!\cdot n_2!}$ нумераций дискретной суммы этих упорядоченных множеств; получаем всего $\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!\cdot n_2!}N_1\cdot N_2$ нумераций дискретной суммы. Показали справедливость (20) для $r=2$. Используя то обстоятельство, что дискретная сумма r упорядоченных множеств может быть представлена как дискретная сумма двух упорядоченных множеств (первое из которых есть дискретная сумма первых $r-1$ из них, а второе r-е), получаем отсюда общую формулу (20). Например, для дискретной суммы четырех упорядоченных множеств A_1, A_2, A_3, A_4, рассмотренных выше (рис. 48), имеем: $N_1=2$, $N_2=1$, $N_3=6$, $N_4=1$, $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=3$, $n_4=1$, значит, для дискретной суммы этих упорядоченных множеств имеется всего

$$\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!}\,2\cdot 6=60\,480 \quad \text{линейных доупорядочений.}$$

В качестве еще одного примера применения формулы (20) рассмотрим подсчет числа линейных доупорядочений древесных порядков. Древесные порядки можно описать следующим образом. Рассмотрим граф, все вершины которого расположены на «уровнях», причем на последнем (верхнем) уровне имеется единственная вершина a_0 (корень дерева); из каждой вершины предпоследнего уровня исходит дуга к корню. Вообще, для любой вершины $(k-1)$-го уровня существует единственная вершина k-го уровня, в которую из нее исходит дуга (см. рис. 52). Такой граф называется **д е р е в о м с к о р н е м** a_0. На множестве вершин дерева определяется следующее отношение порядка: $a\leqslant b$ тогда и только тогда, когда существует путь из a в b (очевидно, что введенное отношение есть отношение достижимости в этом графе; оно будет отношением порядка, так как в дереве отсутствуют контуры, см. предложение 7)[1]. При

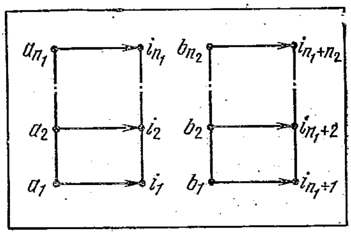


Рис. 51

[1] Древесный порядок можно определить и непосредственно как порядок, удовлетворяющий следующим двум условиям: а) существует наибольший элемент; б) для каждого элемента множество его мажорант является цепью.

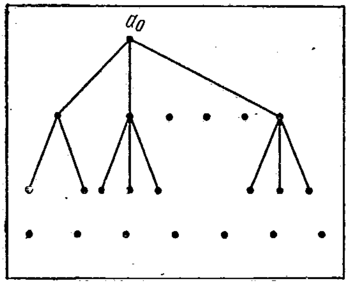


Рис. 52

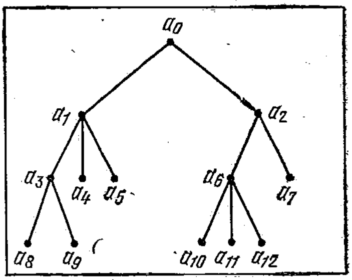


Рис. 53

введенном упорядочении a_0 будет наибольшим элементом. Если T — дерево, то для каждой его вершины a_s множество всех меньших относительно введенного порядка вершин (включая a_s) само образует дерево с корнем a_s; будет называть его **поддеревом дерева** T и обозначать через T_{a_s}; в частности, само дерево T есть свое поддерево: $T = T_{a_0}$.

Предложение 15. *Пусть T_0 — дерево, T_0, T_1, ..., T_r — все его поддеревья, содержащие более одной вершины. Тогда число линейных доупорядочений древесного порядка, определяемого деревом T_0, равно*

$$N(T_0) = \frac{|T_0|!}{|T_0| \cdot |T_1| \cdot \ldots \cdot |T_r|}, \tag{21}$$

где $|T_s|$ — число вершин поддерева T_s ($s=0, \ldots, r$).

Доказательство формулы (21) проводится индукцией по числу уровней. При переходе от $k-1$ к k надо воспользоваться тем обстоятельством, что при отбрасывании наибольшего элемента (что не влияет на число линейных доупорядочений) диаграмма древесного порядка превращается в дискретную сумму древесных порядков, к каждому из которых можно применить по индуктивному предположению формулу (21), а для подсчета числа линейных доупорядочений дискретной суммы надо использовать формулу (20).

Для древесного порядка, представленного на рис. 53, число его линейных доупорядочений согласно формуле (21) равно

$$\frac{|T_{a_0}|!}{|T_{a_0}| \cdot |T_{a_1}| \cdot |T_{a_2}| \cdot |T_{a_3}| \cdot |T_{a_6}|} = \frac{13!}{13 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4} = 1\,108\,800.$$

В некоторых вопросах требуется не число линейных доупорядочений порядка ω, а обратная величина, которую мы обозначим через $L(\omega)$ и назовем **мерой линейности порядка** ω (или мерой линейности соответствующего упорядоченного множества). Отметим, что мера линейности всегда заключена в следующих границах: $0<L(\omega)\leqslant 1$, причем $L(\omega)=1$ тогда и только тогда, когда ω — линейный порядок. Из формул (19)—(21), переходя к обратным величинам, получаем:

1. Если упорядоченное множество (A, ω) является линейно упорядоченной суммой r упорядоченных множеств (A_i, ω_i) $(i=1, \ldots, r)$, то

$$L(\omega)=L(\omega_1)\cdot L(\omega_2)\cdot\ldots\cdot L(\omega_r). \tag{22}$$

2. Если упорядоченное множество (A, ω) является дискретной суммой r упорядоченных множеств (A_i, ω_i) $(i=1, \ldots, r)$, то

$$L(\omega)=\frac{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}{(n_1+n_2+\cdots+n_r)!}\,L(\omega_1)\cdot L(\omega_2)\cdot\ldots\cdot L(\omega_r). \tag{23}$$

3. Если ω — древесный порядок, определяемый деревом T_0, и $T_0, T_1, \ldots, T_r$ — все поддеревья дерева T_0, содержащие более одной вершины, то

$$L(\omega)=\frac{|T_0|\cdot|T_1|\cdot\ldots\cdot|T_r|}{|T_0|!}. \tag{24}$$

15. ИЗОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

1. Описание изотонных образов упорядоченного множества. Важным свойством числовых функций является свойство монотонности (изотонности). Напомним, что функция f называется монотонно возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. $x_1\geqslant x_2\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

Аналогично вводится понятие изотонности и для произвольных упорядоченных множеств. Если (A, ω), (B, σ) — два упорядоченных множества, то отображение $f:A\to B$ называется **изотонным**, если выполняется

$$a_1\overset{\omega}{\geqslant} a_2\Rightarrow f(a_1)\overset{\sigma}{\geqslant} f(a_2).$$

Если существует изотонное отображение упорядоченного множества (A, ω) на упорядоченное множество (B, σ), то (B, σ) называется **изотонным образом** (A, ω), а σ — **изотонным образом порядка** ω.

Задача. Пусть нам задано (например, с помощью диаграммы) упорядоченное множество.

1. Как описать всевозможные изотонные образы этого упорядоченного множества?

2. Как найти изотонные образы этого упорядоченного множества, удовлетворяющие дополнительным условиям?

Решением сформулированных вопросов мы и займемся в этом параграфе. Итак, пусть (A, ω) — заданное упорядоченное множество. Как построить какое-нибудь упорядоченное множество (B, σ) и отображение $f: A \to B$ с таким расчетом, чтобы f оказалось изотонным? Как это часто делают в математике, предположим, что задача уже решена, и выясним, что представляет собой эквивалентность ε по отображению f ($a \overset{\varepsilon}{\equiv} a'$ означает, что $f(a) = f(a')$)). Покажем, что фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ является в этом случае ацикличным, т. е. граф этого отношения не содержит контуров (см. § 9, п. 3). Надо проверить, что для любых классов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ эквивалентности ε выполняется

$$(C_1, C_2) \in \omega/_\varepsilon, \ldots, (C_{n-1}, C_n) \in \omega/_\varepsilon, (C_n, C_1) \in \omega/_\varepsilon \Rightarrow C_1 = C_2 = \ldots = C_n. \tag{25}$$

Условие импликации (25) означает, что найдутся такие элементы $a_1, a'_1 \in C_1$; $a_2, a'_2 \in C_2$; ...; $a_n, a'_n \in C_n$, для которых имеет место $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a'_2$, $a_2 \overset{\omega}{\geqslant} a'_3$, ..., $a_{n-1} \overset{\omega}{\geqslant} a'_n$, $a_n \overset{\omega}{\geqslant} a'_1$. Так как f изотонно, то $f(a_1) \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_2)$, $f(a_2) \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_3)$, ..., $f(a_{n-1}) \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_n)$, $f(a_n) \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_1)$. Учитывая, что элементы a_k, a'_k принадлежат одному классу эквивалентности ε, получаем $f(a'_k) = f(a_k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Тогда $f(a_1) \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_2) = f(a_2) \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_3) = \ldots \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_n) = f(a_n) \overset{\sigma}{\geqslant} f(a'_1) = f(a_1)$. Ввиду отсутствия контуров в графе (B, σ) получаем отсюда, что $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n)$, т. е. $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2 \overset{\varepsilon}{\equiv} \ldots \overset{\varepsilon}{\equiv} a_n$, значит, $C_1 = C_2 = \ldots = C_n$.

Обратно, пусть ε — какая-нибудь эквивалентность на A, удовлетворяющая тому условию, что граф отношения $\omega/_\varepsilon$ не содержит контуров. Тогда (см. предложение 7) его отношение достижимости $\widehat{\omega/_\varepsilon}$ является отношением порядка. Рассмотрим отображение f, которое каждому элементу $a \in A$ сопоставляет содержащий его класс $\varepsilon(a)$ эквивалентности ε. Так как из условия $(a_1, a_2) \in \omega$ следует (по определению фактор-отношения) $(\varepsilon(a_1), \varepsilon(a_2)) \in \omega/_\varepsilon$, и $\omega/_\varepsilon \subset \widehat{\omega/_\varepsilon}$, то выполняется импликация $(a_1, a_2) \in \omega \Rightarrow (\varepsilon(a_1), \varepsilon(a_2)) \in \widehat{\omega/_\varepsilon}$; таким образом, соответствие $f: a \to \varepsilon(a)$ является изотонным отображением упорядоченного множества (A, ω) на упорядоченное множество $(A/_\varepsilon, \widehat{\omega/_\varepsilon})$. Заметим, что эквивалентность по введенному отображению f совпадает с ε, так как условие $\varepsilon(a_1) = \varepsilon(a_2)$ равносильно $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$.

Итак, *поиск изотонных образов упорядоченного множества связан с нахождением таких отношений эквивалентности ε на A, что граф отношения $\omega/_{\varepsilon}$ не содержит контуров.* Такие отношения эквивалентности будем называть **стабильными** в упорядоченном множестве (A, ω) (или стабильными относительно порядка ω). Мы доказали

Предложение 16. а) *Если ε — эквивалентность по некоторому изотонному отображению упорядоченного множества (A, ω), то эквивалентность ε является стабильной в (A, ω).*

б) *Если ε — стабильная эквивалентность в (A, ω), то соответствие $a \to \varepsilon(a)$ является изотонным отображением упорядоченного множества (A, ω) в упорядоченное множество $(A/\varepsilon, \widehat{\omega/\varepsilon})$, причем эквивалентность по этому отображению есть ε.*

Утверждение б) сводит задачу построения изотонного образа упорядоченного множества к задаче нахождения эквивалентности, стабильной в этом упорядоченном множестве. Как построить стабильное отношение эквивалентности в упорядоченном множестве? Пусть ε_0 — отношение эквивалентности на A, которое не является стабильным в (A, ω), т. е. в графе фактор-отношения $\omega/_{\varepsilon_0}$ имеются контуры. Тогда, произведя их «стягивание» (см. § 9, п. 5), получим граф без контуров. Но стягивание контуров есть факторизация по отношению взаимной достижимости; таким образом, в этом случае мы проводим двойную факторизацию: сначала факторизуем отношение ω по эквивалентности ε_0, а потом факторизуем полученное отношение по отношению его взаимной достижимости. Понятно, что такая двойная факторизация может быть заменена одной факторизацией отношения ω по эквивалентности, каждый класс которой является объединением классов эквивалентности ε_0, лежащих на одном контуре графа отношения $\omega/_{\varepsilon_0}$. Суммируя сказанное выше, получаем следующий метод построения изотонного образа упорядоченного множества (A, ω).

1. Задаем произвольное отношение эквивалентности ε_0 на множестве A, строим фактор-отношение $\omega/_{\varepsilon_0}$ и выделяем его контуры (алгоритм выделения контуров см. в § 9, п. 4).

Объединив классы эквивалентности ε_0, лежащие на одном контуре, получим отношение эквивалентности ε [1], стабильное относительно порядка ω.

---

[1] Можно показать, что ε является наименьшим из всех стабильных в (A, ω) отношений эквивалентности, содержащих ε_0; в частности, если эквивалентность ε_0 стабильна, то $\varepsilon = \varepsilon_0$.

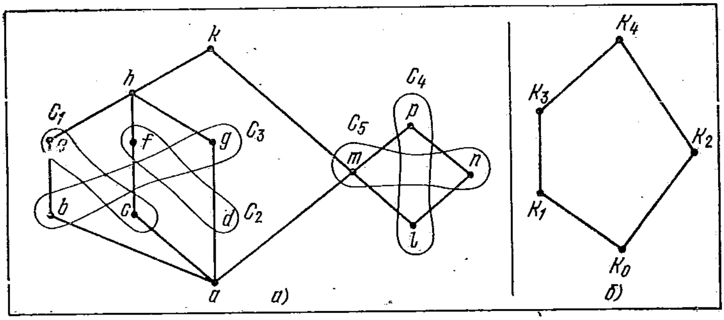


Рис. 54

2. Строим фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ и его отношение достижимости $\widehat{\omega/_\varepsilon}$. Упорядоченное множество $(A/_\varepsilon, \widehat{\omega/_\varepsilon})$ является изотонным образом упорядоченного множества (A, ω), а отображение $a \to \varepsilon(a)$ — изотонным.

Рассмотрим применение данного алгоритма на примере.

Пример 20. Упорядоченное множество (A, ω) задано диаграммой на рис. 54, *а*. Пусть ε_0 — эквивалентность, нетривиальные (т. е. содержащие более одного элемента) классы которой составляют элементы, обведенные замкнутой линией. Выделим контуры фактор-отношения $\omega/_{\varepsilon_0}$. Выполняется $e \overset{\omega}{\geqslant} b$, $g \overset{\omega}{\geqslant} d$, $f \overset{\omega}{\geqslant} c$; учитывая, что $e, c \in C_1$; $b, g \in C_3$; $d, f \in C_2$, получаем $(C_1, C_3) \in \omega/_{\varepsilon_0}$, $(C_3, C_2) \in \omega/_{\varepsilon_0}$, $(C_2, C_1) \in \omega/_{\varepsilon_0}$, таким образом C_1, C_3, C_2—контур в графе $(A/_{\varepsilon_0}, \omega/_{\varepsilon_0})$. Далее $p \overset{\omega}{\geqslant} m, m \overset{\omega}{\geqslant} l$, а так как $p, l \in C_4$; $m, n \in C_5$, то C_4, C_5 — второй контур в графе $(A/_{\varepsilon_0}, \omega/_{\varepsilon_0})$. Эквивалентность ε, классы которой $K_1 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, $K_2 = C_4 \cup C_5$, $K_3 = \{h\}$, $K_4 = \{k\}$, $K_0 = \{a\}$, является стабильной в упорядоченном множестве (A, ω). Отношение $\widehat{\omega/_\varepsilon}$, диаграмма которого приведена на рис. 54, *б*, будет отношением порядка, а отображение: $a \to K_0$, $b, c, d, e, f, g \to K_1$, $l, m, n, p \to K_2$, $h \to K_3$, $k \to K_4$ — изотонным; $\widehat{\omega/_\varepsilon}$ — изотонный образ порядка ω.

Если мы теперь построим любое доупорядочение[1] $\tilde{\omega}$ порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$, то указанное выше отображение останется, очевидно, изотонным, т. е. снова получим изотонный образ упорядоченного множества (A, ω). Оказывается, что таким способом можно получить по су-

[1] Под доупорядочением произвольного порядка ω_1 понимают всякое содержащее его отношение порядка $\omega_2 \supseteq \omega_1$, заданное на том же множестве (допускается $\omega_2 = \omega_1$). В частности, если ω_2 — линейное отношение порядка, то оно будет линейным доупорядочением порядка ω_1.

ществу все изотонные образы упорядоченного множества. Более точно приведенное выше утверждение можно сформулировать на базе понятия изоморфизма упорядоченных множеств, которое вводится так. Два упорядоченных множества (X, ω_1) и (Y, ω_2) называются **изоморфными**, если существует такое взаимно-однозначное отображение $\Theta : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, что для любых $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \overset{\omega_1}{\geqslant} x_2 \Longleftrightarrow \Theta(x_1) \overset{\omega_2}{\geqslant} \Theta(x_2). \tag{26}$$

(Очевидно, условие (26) означает, что и отображение Θ, и обратное отображение Θ^{-1} являются изотонными.) Легко проверить, что конечные упорядоченные множества изоморфны тогда и только тогда, когда они могут быть представлены одной и той же диаграммой. Вообще, два изоморфных упорядоченных множества одинаково «устроены» относительно упорядоченности и отличаются лишь обозначением входящих в них элементов; если же отвлечься от обозначений элементов, то изоморфные упорядоченные множества можно отождествить.

Пусть теперь (A, ω) — произвольное упорядоченное множество и (B, σ) — его изотонный образ при отображении $f\colon A \xrightarrow{\text{на}} B$. Согласно предложению 16,а, эквивалентность ε по отображению f является стабильной, значит, $\widehat{\omega/_\varepsilon}$ — отношение порядка на фактор-множестве $A/_\varepsilon$. Рассмотрим отображение f^{-1}, которое каждому элементу $b \in B$ сопоставляет его полный прообраз $f^{-1}(b)$. Очевидно, f^{-1} является взаимно-однозначным отображением множества B на фактор-множество $A/_\varepsilon$, поэтому отношение ω^*, определенное на $A/_\varepsilon$ условием

$$(f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2)) \in \omega^* \Longleftrightarrow (b_1, b_2) \in \sigma, \tag{27}$$

будет отношением порядка на $A/_\varepsilon$ и упорядоченные множества (B, σ) и $(A/_\varepsilon, \omega^*)$ изоморфны между собой. Далее, если $(C_1, C_2) \in \omega/_\varepsilon$, то для некоторых $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$ имеет место $(a_1, a_2) \in \omega$, а так как f изотонно, то $(f(a_1), f(a_2)) \in \sigma$; по определению отображения f^{-1} выполняется $f^{-1}(f(a_1)) = C_1$, $f^{-1}(f(a_2)) = C_2$, откуда на основании (27) получаем $(C_1, C_2) \in \omega^*$. Доказали включение $\omega/_\varepsilon \subset \omega^*$, а так как отношение ω^* транзитивно, то также выполняется $\widehat{\omega/_\varepsilon} \subset \omega^*$, т. е. ω^* является доупорядочением порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$.

Мы доказали, что каждый изотонный образ порядка ω изоморфен некоторому доупорядочению порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$, где ε — стабильная эквивалентность в (A, ω). Итак, нами доказана

Теорема 3. *Отношения порядка вида* $\widehat{\omega/_{\varepsilon}}$, *где* ε — *всевозможные стабильные эквивалентности в* (A, ω), *а также их доупорядочения исчерпывают с точностью до изоморфизма все изотонные образы порядка* ω.

2. Строго изотонные отображения и измерения упорядоченных множеств. Изотонное отображение f упорядоченного множества (A, ω) в упорядоченное множество (B, σ) называется строго изотонным, если

$$a_1 \overset{\omega}{>} a_2 \Rightarrow f(a_1) \overset{\sigma}{>} f(a_2).$$

Займемся задачей построения для упорядоченного множества его строго изотонных образов. Заметим вначале, что если упорядоченное множество (B, σ) является строго изотонным образом упорядоченного множества (A, ω) и σ^* — любое доупорядочение порядка σ, то (B, σ^*) — также строго изотонный образ (A, ω). Поэтому, согласно теореме 3, описание всех строго изотонных образов упорядоченного множества (A, ω) сводится (с точностью до изоморфизма) к нахождению таких стабильных в (A, ω) отношений эквивалентности ε, для которых соответствие $a \to \varepsilon(a)$ является строго изотонным отображением (A, ω) в $(A/_{\varepsilon}, \widehat{\omega/_{\varepsilon}})$. Пусть указанное соответствие строго изотонно; возьмем два элемента $a_1, a_2 \in A$, которые попадают в один класс эквивалентности ε, т. е. $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$. Предположим, что $a_1 \overset{\omega}{>} a_2$, тогда должно выполняться $\varepsilon(a_1) \overset{\widehat{\omega/_{\varepsilon}}}{>} \varepsilon(a_2)$, но так как $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$, то выполняется $\varepsilon(a_1) = \varepsilon(a_2)$. Показали, что условие $a_1 \overset{\omega}{>} a_2$ не имеет места ни для каких элементов одного класса эквивалентности ε; такие подмножества в упорядоченном множестве называются дискретными. Итак, эквивалентность ε обладает свойством — все ее классы являются дискретными подмножествами. Обратно, пусть ε — произвольная стабильная эквивалентность в (A, ω), все классы которой дискретны. Если выполняется $a_1 \overset{\omega}{>} a_2$, то равенство $\varepsilon(a_1) = \varepsilon(a_2)$ не может иметь места, так как тогда элементы a_1 и a_2 должны находиться в одном классе эквивалентности ε, что невозможно ввиду дискретности этих классов; значит, соответствие $a \to \varepsilon(a)$ является в этом случае строго изотонным. На основании теоремы 3 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Отношения порядка вида* $\widehat{\omega/_{\varepsilon}}$, *где* ε—*стабильные эквивалентности в* (A, ω), *все классы которых дискретны, а также* *всевозможные доупорядочения таких порядков исчерпывают с точностью до изоморфизма все строго изотонные образы порядка* ω.

Пример 21. Для упорядоченного множества (A, ω), диаграмма которого дана на рис. 54,*а*, эквивалентность ε, классы которой $C^*_1=\{b, c, d\}$, $C^*_2=\{e, f, g\}$, $C^*_3=\{m, n\}$, $C^*_4=\{a\}$, $C^*_5=\{h\}$, $C^*_6=\{k\}$, $C^*_7=\{l\}$, $C^*_8=\{p\}$, стабильна и все ее классы дискретны. Диаграмма отношения порядка $\overset{\widehat{\sqcap}}{\omega/_\varepsilon}$ представлена на рис. 55,*а*. Соответствие $b, c, d \to C^*_1$; $e, f, g \to C^*_2$; $m, n \to C^*_3$, $a \to C^*_4$, $h \to C^*_5$, $k \to C^*_6$, $l \to C^*_7$, $p \to C^*_8$ — будет строго изотонным отображением (A, ω) на $(A/_\varepsilon, \overset{\widehat{\sqcap}}{\omega/_\varepsilon})$. Это отображение останется строго изотонным, если вместо порядка $\overset{\widehat{\sqcap}}{\omega/_\varepsilon}$ взять любое его доупорядочение; одно из таких доупорядочений представлено на рис. 55,*б*.

Строго изотонное отображение произвольного упорядоченного множества (A, ω) в множество действительных чисел, снабженное естественным порядком, называется его **измерением**. Грубо говоря, измерение представляет собой такое «очисливание» элементов упорядоченного множества, которое большему элементу сопоставляет большее число. Рассмотренная в § 14, п. 1 нумерация упорядоченного множества представляет собой его измерение, удовлетворяющее дополнительному условию: номера разных элементов должны быть различными, т. е. всякая нумерация является взаимно-однозначным измерением. Примером измерения, не являющегося вообще взаимно-однозначным, может служить функция высоты в упорядоченном множестве. Под **высотой** элемента a упорядоченного множества понимают натуральное число $h(a)$, равное наибольшей из длин цепей, в которых a является наибольшим элементом. Пусть для двух элементов $a, a' \in A$ выполняется $a' \overset{\omega}{>} a$, тогда всякую цепь, ведущую в a, можно продолжить до цепи, ведущей в a' (например, добавив дугу $a \to a'$), поэтому высота элемента a' строго больше, чем высота элемента a, т. е. h — измерение упорядоченного множества (A, ω).

На практике удобно использовать следующий прием нахождения высоты элементов упорядоченного множества по его диаграмме. Ясно, что для каждого минимального элемента его высота равна нулю; если для всех элементов, строго меньших элемента x, их высота уже определена, то высота элемента x может быть найдена как $\max\limits_{y<x} h(y)+1$. Поэтому для нахождения высоты вначале надо проставить нули около всех минимальных элементов, а для того чтобы найти высоту любого другого элемента, надо раньше определить высоты всех строго меньших его элементов и наиболь-

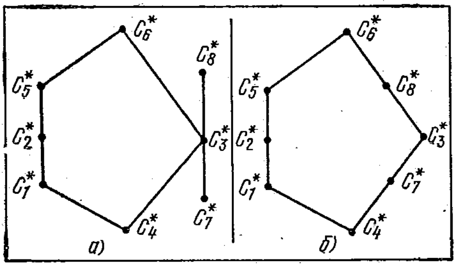


Рис. 55

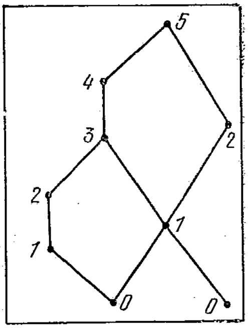


Рис. 56

шую из них увеличить на единицу. Такой способ нахождения высоты проиллюстрирован на рис. 56; этот пример показывает, что функция высоты не является обязательно взаимно-однозначной. Ясно, что эта функция взаимно-однозначна для линейно упорядоченного множества. Вообще, для линейно упорядоченного множества (A, ω) функция $f: A \to R$ является его измерением тогда и только тогда, когда выполняется равносильность

$$a' \overset{\omega}{\geqslant} a \Longleftrightarrow f(a') \geqslant f(a).$$

Другими словами, измерение линейно упорядоченного множества есть его изоморфизм в множество действительных чисел. Для линейного порядка всякое его измерение содержит полную информацию о нем, так как в этом случае высказывания $a' \overset{\omega}{\geqslant} a$ и $f(a') \geqslant f(a)$ равносильны; поэтому линейную упорядоченность на множестве можно фактически «свести» к линейной упорядоченности числовых оценок[1]. Этого нельзя сказать о нелинейном порядке, так как его измерение содержит лишь частичную информацию о нем: из условия $f(a') > f(a)$ нельзя сделать вывод, что $a' \overset{\omega}{>} a$.

В отличие от порядка на действительной прямой, порядок на множестве R^n n-мерных векторов, определяемый их покомпонентным сравнением

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \Longleftrightarrow x_1 \geqslant x'_1,\ x_2 \geqslant x'_2, \ldots, x_n \geqslant x'_n,$$

является при $n > 1$ нелинейным, поэтому можно попытаться для нелинейного порядка найти его изоморфное представление с по-

[1] Вопросы, связанные с существованием измерений произвольных упорядоченных множеств подробно освещены в книге: П. Фишберн. Теория полезности для принятия решений. — М.: Мир, 1978.

мощью векторного порядка. Оказывается, что такое представление всегда существует (по крайней мере для конечного множества A): *достаточно взять соответствие, которое каждому элементу $a \in A$ сопоставляет вектор $(p_1(a), \ldots, p_r(a))$, где p_j ($j=1, \ldots, r$) — всевозможные нумерации упорядоченного множества (A, ω)*. Действительно, для любых двух элементов a, $a' \in A$, для которых $a' \overset{\omega}{\geqslant} a$, выполняется также $p_j(a') \geqslant p_j(a)$ при любой нумерации p_j. Если же элементы a и a' несравнимы относительно порядка ω, то подмножество $\{a, a'\}$ дискретно и, по следствию из теоремы Шпильрайна (см. § 14, п. 1), можно продолжить как упорядоченность $a' > a$, так и $a > a'$ до линейной упорядоченности всего множества A. Пусть p_{j_1} — нумерация, соответствующая первому продолжению, а p_{j_2} — второму, тогда $p_{j_1}(a') > p_{j_1}(a)$ и $p_{j_2}(a) > p_{j_2}(a')$. Таким образом, неравенство $a' \overset{\omega}{\geqslant} a$ выполняется тогда и только тогда, когда $p_j(a') \geqslant p_j(a)$ имеет место для всех нумераций p_j.

Отметим, что каждую нумерацию p_j можно рассматривать как числовой показатель, введенный для объектов множества A; условие $p_j(a') \geqslant p_j(a)$ для всех $j=1, \ldots, r$ означает тогда, что объект a' предпочтительнее объекта a в смысле абсолютного предпочтения для векторного критерия (см. § 11). Таким образом, мы показали, что *на конечном множестве всякую упорядоченность можно представить в виде абсолютного предпочтения для векторного критерия.*

Пример 22. Для упорядоченного множества, диаграмма которого дана на рис. 41, построим его представление с помощью векторного порядка. Используя табл. 27 всех нумераций этого упорядоченного множества, получаем искомое соответствие в виде

$a \to (1, 2, 1, 2, 1)$; $b \to (2, 1, 2, 1, 3)$; $c \to (4, 4, 3, 3, 2)$; $d \to (3, 3, 4, 4, 4)$.

Из приведенного примера видно, что требуемое представление получается сопоставлением каждому элементу упорядоченного множества соответствующего ему столбца нижнего «блока» таблицы нумераций этого упорядоченного множества.

В некоторых случаях желательно представить данный порядок ω с помощью векторного порядка на R^n при возможно меньшем n. Из доказанного выше следует, что такое представление всегда возможно при n, равном числу всех линейных доупорядочений (нумераций) порядка ω. Однако внимательный анализ проведенного рассуждения показывает, что для построения изоморфного представления порядка ω достаточно ограничиться таким набором нумераций, чтобы для любых двух элементов a, a', несравнимых относительно порядка ω, нашлись такие две нумерации p_{j_1} и p_{j_2} из этого набора, что $p_{j_1}(a') > p_{j_1}(a)$ и $p_{j_2}(a) > p_{j_2}(a')$ (в терминах линейных доупорядочений это означает, что надо найти такой набор $(\overline{\omega}_j)_{j \in I}$

линейных доупорядочений порядка ω, чтобы $\bigcap\limits_{i\in I}\overline{\omega}_i=\omega$). В приведенном примере такой набор образуют две нумерации, стоящие во второй и пятой строчках нижнего «блока» табл. 27; получаем тогда следующее представление отношения порядка на множестве двумерных векторов:

$a\to(2,1)$; $b\to(1,3)$; $c\to(4,2)$; $d\to(3,4)$.

3. Сильно изотонные отображения упорядоченных множеств. Рассмотрим еще один тип изотонных отображений упорядоченных множеств. Изотонное отображение f упорядоченного множества (A, ω) в упорядоченное множество (B, σ) называется сильно изотонным, если

$$(a_1)\overset{\sigma}{>}f(a_2)\Rightarrow a_1\overset{\omega}{>}a_2.$$

Пусть ε — эквивалентность по сильно изотонному отображению f. Возьмем такие два элемента a_1, a_2 из разных классов эквивалентности ε (т. е. $a_1\overset{\varepsilon}{\not\equiv}a_2$), для которых $a_1\overset{\omega}{\geqslant}a_2$. Пусть теперь a'_1 — любой элемент, находящийся в одном классе эквивалентности ε с элементом a_1, a'_2 — находящийся в одном классе эквивалентности ε с a_2 ($a'_1\overset{\varepsilon}{\equiv}a_1$, $a'_2\overset{\varepsilon}{\equiv}a_2$). Тогда $f(a'_1)=f(a_1)$, $f(a'_2)=f(a_2)$. Так как $a_1\overset{\omega}{\geqslant}a_2$ и f изотонно, то $f(a_1)\overset{\sigma}{\geqslant}f(a_2)$. Равенство здесь исключено: если $f(a_1)=f(a_2)$, то $a_1\overset{\varepsilon}{\equiv}a_2$ в противоречие с предположением, поэтому $f(a_1)\overset{\sigma}{>}f(a_2)$, а значит, и $f(a'_1)\overset{\sigma}{>}f(a'_2)$; согласно условию сильной изотонности $a'_1\overset{\omega}{>}a'_2$. Показали, что эквивалентность ε удовлетворяет условию

$$a_1\overset{\omega}{\geqslant}a_2,\quad a_1\overset{\varepsilon}{\not\equiv}a_2,\quad a'_1\overset{\varepsilon}{\equiv}a_1,\quad a'_2\overset{\varepsilon}{\equiv}a_2\Rightarrow a'_1\overset{\omega}{>}a'_2. \tag{28}$$

Формула (28) означает, что всякое неравенство, имеющее место для неэквивалентных элементов, сохраняется при замене этих элементов им эквивалентными.

Обратно, пусть в упорядоченном множестве (A, ω) имеется эквивалентность ε, удовлетворяющая условию (28). Покажем, что тогда фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ транзитивно. Возьмем три класса C_1, C_2, C_3 эквивалентности ε, для которых выполняется $(C_1, C_2)\in\omega/_\varepsilon$, $(C_2, C_3)\in\omega/_\varepsilon$. Это означает, что для некоторых $a_1\in C_1$, a_2, $a'_2\in C_2$;

$a_3 \in C_3$ имеет место $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2$, $a'_2 \geqslant a_3$. Надо показать, что $(C_1, C_3) \in \in \omega/_\varepsilon$. Если $C_1 = C_2$, то доказывать нечего. Если $C_1 \neq C_2$, то $a_1 \overset{\varepsilon}{\not\equiv} a_2$. Так как элементы a_2 и a'_2 находятся в одном классе эквивалентности ε, то $a'_2 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$; по условию (28) получаем $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a'_2$, а так как $a'_2 \overset{\omega}{\geqslant} a_3$, то $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_3$. Учитывая, что $a_1 \in C_1$, $a_3 \in C_3$, получаем по определению фактор-отношения $(C_1, C_3) \in \omega/_\varepsilon$. Проверим теперь, что фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ антисимметрично. Пусть $(C_1, C_2) \in \omega/_\varepsilon$ и $(C_2, C_1) \in \omega/_\varepsilon$, т. е. выполняется $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2$, $a'_2 \overset{\omega}{\geqslant} a'_1$ для некоторых a_1, $a'_1 \in C_1$; a_2, $a'_2 \in C_2$. Надо показать, что $C_1 = C_2$. Если $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$, то нужное равенство получается сразу. Если же $a_1 \overset{\varepsilon}{\not\equiv} a_2$, то, учитывая, что выполняется $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2$, $a'_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1$, $a'_2 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$, получаем по условию (28) $a'_1 \overset{\omega}{\geqslant} a'_2$, что вместе с условием $a'_2 \overset{\omega}{\geqslant} a'_1$ дает $a'_1 = a'_2$, откуда $C_1 = C_2$. Итак, фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ оказывается в этом случае отношением порядка.

Покажем теперь, что отображение $a \to \varepsilon(a)$ является сильно изотонным отображением упорядоченного множества (A, ω) в упорядоченное множество $(A/_\varepsilon, \omega/_\varepsilon)$. Пусть $\varepsilon(a_1) \overset{\omega/_\varepsilon}{>} \varepsilon(a_2)$. По определению фактор-отношения найдутся такие элементы a'_1, $a'_2 \in A$, что $a'_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1$, $a'_2 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$ и $a'_1 \overset{\omega}{\geqslant} a'_2$. Не может быть, чтобы выполнялось $a'_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a'_2$, так как тогда получили бы $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$ и $\varepsilon(a_1) = \varepsilon(a_2)$ в противоречие с предположением, значит, $a'_1 \overset{\varepsilon}{\not\equiv} a'_2$. Учитывая, что имеет место $a'_1 \overset{\omega}{\geqslant} a'_2$, $a'_1 \overset{\varepsilon}{\not\equiv} a'_2$, $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a'_1$, $a_2 \overset{\varepsilon}{\equiv} a'_2$, согласно (28) получаем $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2$, а так как $a_1 \overset{\varepsilon}{\not\equiv} a_2$, то $a_1 \neq a_2$, значит, выполняется строгое неравенство $a_1 \overset{\omega}{>} a_2$.

Эквивалентность ε, удовлетворяющую условию (28), будем в дальнейшем называть **сильно стабильной** (то, что сильно стабильная эквивалентность является стабильной, следует из доказанного выше: фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ оказалось отношением порядка и, следовательно, оно не имеет контуров). Мы показали, что если ε — сильно стабильная эквивалентность в упорядоченном множестве (A, ω), то фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ — отношение порядка на фактор-множестве $A/_\varepsilon$, а соответствие $a \to \varepsilon(a)$ является сильно изотонным отображением (A, ω) на $(A/_\varepsilon, \omega/_\varepsilon)$.

Оказывается, что других сильно изотонных образов упорядоченного множества, кроме указанных, фактически нет. Итак, справедлива

Теорема 5. *Упорядоченные множества вида* $(A/_\varepsilon, \omega/_\varepsilon)$, *где* ε — *всевозможные сильно стабильные в* (A, ω) *эквивалентности, исчерпывают с точностью до изоморфизма все сильно изотонные образы упорядоченного множества* (A, ω).

Другой подход к описанию сильно изотонных образов упорядоченного множества основан на разложении его в упорядоченную сумму (см. § 14, п. 3). А именно, если упорядоченное множество (A, ω) есть упорядоченная сумма семейства упорядоченных множеств $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$, $>$ — отношение строгого порядка на множестве индексов I, то нетрудно проверить, что отношение эквивалентности ε, классами которого являются A_i $(i \in I)$, сильно стабильно. Поэтому отображение, которое каждому элементу $a \in A_i$ сопоставляет индекс $i \in I$, будет сильно изотонным. Справедливо и обратное: если в упорядоченном множестве (A, ω) найдена сильно стабильная эквивалентность ε, то это упорядоченное множество можно разложить в упорядоченную сумму, причем классы эквивалентности ε выступают в качестве компонент разложения, а фактор-отношение $\omega/_\varepsilon$ — в качестве отношения порядка на множестве этих классов. Таким образом, для упорядоченного множества следующие три задачи: нахождение сильно стабильной эквивалентности, разложение упорядоченного множества в упорядоченную сумму, нахождение сильно изотонного образа этого упорядоченного множества — фактически равнозначны.

Пример 23. Введем для произвольного упорядоченного множества (A, ω) следующее отношение эквивалентности ε^0: два элемента эквивалентны относительно ε^0 тогда и только тогда, когда для них совпадают множества строго бо́льших и строго меньших их элементов, т. е.

$$a' \overset{\varepsilon^0}{\equiv} a'' \Longleftrightarrow \{a \mid a \overset{\omega}{>} a'\} = \{a \mid a \overset{\omega}{>} a''\}, \quad \{a \mid a \overset{\omega}{<} a'\} = \{a \mid a \overset{\omega}{<} a''\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эквивалентность ε^0 сильно стабильна и каждый ее класс является дискретным подмножеством. Пусть теперь ε — какая-нибудь сильно стабильная эквивалентность, имеющая дискретные классы. Пусть $a' \overset{\varepsilon}{\equiv} a''$ и $a \overset{\omega}{>} a'$. Тогда $a \overset{\varepsilon}{\not\equiv} a'$ (иначе класс эквивалентности ε, содержащий элемент a, не был бы дискретным). Из условий $a \overset{\omega}{>} a'$, $a \overset{\varepsilon}{\not\equiv} a'$, $a' \overset{\varepsilon}{\equiv} a''$ согласно (28) получаем $a \overset{\omega}{>} a''$. Меняя местами a' и a'', получаем, что у элементов a' и a'' совпадают множества строго бо́льших их элементов; аналогичное утверждение справедливо и для множеств строго меньших элементов. Получаем $a' \overset{\varepsilon^0}{\equiv} a''$, т. е. имеет место включение $\varepsilon \subset \varepsilon^0$.

Таким образом, ε^0 является наибольшим из всех сильно стабильных в (A, ω) отношений эквивалентности, имеющих дискретные классы; эквивалентность ε^0

определяет разложение упорядоченного множества в упорядоченную сумму дискретных подмножеств, имеющее самые «крупные» компоненты.

Применение аппарата стабильных отношений эквивалентности в упорядоченных множествах к задачам принятия решений будет рассмотрено нами в § 19.

16. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ПРЕДПОЧТЕНИЯХ

1. Типы дополнительной информации. Характерной особенностью задач принятия решений, в которых предпочтения заданы не с помощью целевых функций, а с помощью отношений, является то, что для них возникает проблема уточнения предпочтений. Понятно, что уточнение предпочтений возможно лишь при наличии дополнительной информации о предпочтениях принимающего решение. Интуитивно ясно, что уточнение предпочтений будет способствовать уточнению оптимального решения; поэтому, если есть возможность получить такую дополнительную информацию, ею не следует пренебрегать. Предполагая, что «первоначальное» предпочтение задано в форме отношения порядка ω на множестве объектов A, мы рассмотрим здесь два основных типа дополнительной информации о предпочтениях: информацию о доминировании и информацию о безразличии.

А. **Информация о доминировании.** Будем представлять дополнительную информацию о доминировании в форме бинарного отношения α на множестве A, где условие $(x, y) \in \alpha$ интерпретируется как сообщение (поступившее от принимающего решение) о том, что объект x доминирует объект y; отношение α можно рассматривать тогда как множество подобных сообщений. Дополнительную информацию о доминировании, заданную в виде бинарного отношения α, естественно считать не противоречащей «первоначальному» предпочтению (заданному в виде отношения порядка ω), если существует такое отношение порядка $\bar{\omega}$ на множестве A, которое содержит как отношение ω, так и α, т. е. $\bar{\omega} \supset \omega \cup \alpha$; как мы видели в § 14, п. 1, это условие равносильно тому, что отношение α совместимо с порядком ω, т. е. граф отношения $\omega \cup \alpha$ не содержит контуров.

Как построить отношение, выражающее предпочтение *после* получения дополнительной информации в виде отношения α, совместимого с порядком ω (мы хотим, чтобы результирующее отношение также было отношением порядка)? Если мы просто присоединим к отношению ω все пары, принадлежащие отношению α, то полученное отношение $\omega \cup \alpha$ может оказаться нетранзитивным (как мы видели в § 8, объединение даже двух транзитивных отношений может быть нетранзитивным), а значит, оно не будет и отношением порядка.

Так как отношение α совместимо с порядком ω, то граф отношения $\omega \bigcup \alpha$ не содержит контуров и по предложению 7 его отношение достижимости $\widehat{\omega \bigcup \alpha}$ представляет собой отношение порядка— его и будем рассматривать как результирующее отношение предпочтения. Порядок $\widehat{\omega \bigcup \alpha}$ является наименьшим из всех отношений порядка, содержащих $\omega \bigcup \alpha$, т. е. $\widehat{\omega \bigcup \alpha}$ — это наименьшее „расширение“ отношения $\omega \bigcup \alpha$ до отношения порядка; в частности, если $\omega \bigcup \alpha$ транзитивно, то $\widehat{\omega \bigcup \alpha} = \omega \bigcup \alpha$. Порядок $\widehat{\omega \bigcup \alpha}$ представляет собой некоторое доупорядочение (см. сноску на стр. 114) порядка ω; если отношение $\widehat{\omega \bigcup \alpha}$ окажется линейным, то, значит, имеется полная информация о предпочтениях; подчеркнем, что в данном контексте полнота понимается лишь в «качественном» смысле и сводится к тому, что любые два объекта сравнимы по предпочтению.

Итак, *если дополнительная информация о доминировании, заданная в форме отношения α, не противоречит первоначальному предпочтению, заданному в форме отношения порядка ω, то существует наименьшее отношение порядка, содержащее $\omega \bigcup \alpha$, им является отношение достижимости $\widehat{\omega \bigcup \alpha}$. Отношение $\widehat{\omega \bigcup \alpha}$ рассматривается как результирующее отношение порядка, построенное с учетом дополнительной информации о доминировании.*

В простейшем случае дополнительная информация о доминировании представляет собой единственное сообщение о доминировании одного объекта над другим типа «объект x_1 доминирует объект y_1»; здесь $\alpha = \{(x_1, y_1)\}$. Что в этом случае будет означать совместимость отношения α с порядком ω? Возможны три случая: 1) $x_1 \overset{\omega}{>} y_1$, 2) $y_1 \overset{\omega}{>} x_1$, 3) x_1 и y_1 несравнимы относительно ω. В первом случае имеет место включение $\alpha \subset \omega$, значит, $\omega \bigcup \alpha = \omega$ и условие совместимости тривиально выполняется. Поступившая информация бессодержательна (не дает ничего нового), но и не противоречит первоначальному предпочтению. Во втором случае граф отношения $\omega \bigcup \alpha$ содержит контур $x_1 \xrightarrow{\omega \bigcup \alpha} y_1 \xrightarrow{\omega \bigcup \alpha} x_1$, значит, поступившая информация противоречит первоначальному предпочтению. В третьем случае отношение $\alpha = \{(x_1, y_1)\}$ совместимо с порядком, индуцированным отношением ω на подмножестве $\{x_1, y_1\}$ (так как последний представляет собой просто тождественное отношение на $\{x_1, y_1\}$; по теореме о совместимости отношение α совместимо и с порядком ω. Первый и третий случай можно объединить условием $y_1 \overset{\omega}{\not>} x_1$. Таким образом, *совместимость отношения, состояще-*

го из единственной пары (x_1, y_1), *с отношением порядка* ω *сводится к выполнению условия* $y_1 \overset{\omega}{\not>} x_1$. Легко проверить, что для отношения, состоящего из единственной пары (x_1, y_1) и совместимого с порядком ω, результирующее отношение порядка ω_1 (представляющее собой, как отмечено выше, отношение достижимости для $\omega \cup \{(x_1, y_1)\}$), можно определить формулой

$$a_1 \overset{\omega_1}{\geqslant} a_2 \Longleftrightarrow a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2 \text{ или } a_1 \overset{\omega}{\geqslant} x_1 \overset{\alpha}{>} y_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь другой способ задания дополнительной информации о доминировании, когда она задается не в виде *множества* пар, а в виде *последовательности* пар (т. е. в виде последовательности сообщений о доминировании)

$$x_1 \overset{\alpha}{>} y_1,\ x_2 \overset{\alpha}{>} y_2,\ \ldots,\ x_r \overset{\alpha}{>} y_r. \tag{30}$$

Будем предполагать, что последовательность (30) удовлетворяет следующему условию. Отношение, состоящее из единственной пары (x_1, y_1), должно быть совместимым с порядком ω; построим результирующее отношение порядка ω_1 по формуле (29). Отношение, состоящее из пары (x_2, y_2), должно быть совместимым с порядком ω_1; взяв в качестве первоначального порядка отношение ω_1, построим отношение порядка ω_2 по формуле, аналогичной (29); вообще, если порядок ω_{k-1} уже построен, то отношение, состоящее из пары (x_k, y_k), должно быть совместимым с порядком ω_{k-1}; определяем тогда порядок ω_k формулой

$$a_1 \overset{\omega_k}{\geqslant} a_2 \Longleftrightarrow a_1 \overset{\omega_{k-1}}{\geqslant} a_2 \text{ или } a_1 \overset{\omega_{k-1}}{\geqslant} x_k \overset{\alpha}{>} y_k \overset{\omega_{k-1}}{\geqslant} a_2. \tag{31}$$

Получаем в итоге расширяющуюся последовательность отношений порядка $\omega_0 \subset \omega_1 \subset \ldots \subset \omega_r$, где ω_0 — первоначальный порядок: $\omega_0 = \omega$, а ω_k получается из ω_{k-1} по формуле (31). Будем рассматривать ω_r как результирующее отношение порядка, построенное с учетом информации о доминировании в виде последовательности (30).

Теперь положим $\alpha = \bigcup_{k=1}^{r} \{(x_k, y_k)\}$ и сравним отношения ω_r и $\widehat{\omega \cup \alpha}$. Так как $(x_1, y_1) \in \alpha$, то $\omega \cup \{(x_1, y_1)\} \subset \omega \cup \alpha$, откуда $\omega_1 = \widehat{\omega \cup \{(x_1, y_1)\}} \subset \widehat{\omega \cup \alpha}$. По индукции получаем $\omega_r \subset \widehat{\omega \cup \alpha}$. С другой стороны, так как для каждого k выполняется $(x_k, y_k) \in \omega_k$ и последовательность ω_k $(k = 1, \ldots, r)$ возрастает, то $\alpha \subset \omega_r$, а значит, $\omega \cup \alpha \subset \omega_r$. Учитывая, что отношение ω_r транзитивно, получаем отсюда обратное включение $\widehat{\omega \bigcup \alpha} \subset \omega_r$. Мы показали, что $\omega_r = \widehat{\omega \bigcup \alpha}$. Итак, *независимо от способа задания дополнительной информации о доминировании, совместимой с первоначальным предпочтением,— в виде множества пар или в виде описанной выше последовательности пар — результирующее отношение получается одним и тем же.* В частности, отсюда следует, что результирующее отношение не зависит от порядка перечисления пар, дающих дополнительную информацию о доминировании. Иное дело — содержательность поступающей информации: содержательность сообщения $x \overset{\alpha}{>} y$ определяется не только объектами x и y, но и номером этого сообщения в поступающей последовательности сообщений. Рассмотрим следующий пример.

Пример 24. Упорядоченное множество (A, ω) задано диаграммой рис. 57,*а*. Пусть поступила информация о доминировании в виде последовательности сообщений $d > a$, $c > b$. После первого сообщения получим в качестве результирующего отношение порядка, диаграмма которого изображена на рис. 57,*б*, а после второго сообщения — отношение порядка на рис. 57,*в*; оба сообщения являются содержательными. Однако, если сообщение $c > b$ поступило первым, то результирующим отношением порядка после получения этого сообщения будет отношение порядка на рис. 57,*в* и второе сообщение $d > a$ становится бессодержательным.

В заключение отметим, что так как установление совместимости отношения α, дающего дополнительную информацию о доминировании, с отношением порядка ω, выражающим первоначальное предпочтение, состоит в проверке отсутствия контуров графа отношения $\omega \bigcup \alpha$, то здесь можно использовать приведенный в § 9, п. 4 алгоритм выделения контуров графа: если M — матрица отношения $\omega \bigcup \alpha$ и множество A состоит из n элементов, то условие совместимости отношения α с порядком ω равносильно тому, что в матрице M^n все строки должны быть различными. Существенное облегчение дает здесь теорема 1, так как по этой теореме достаточно проверить совместимость отношения α с порядком, индуцированным отношением ω на подмножестве, состоящем из компонент упорядоченных пар, принадлежащих отношению α.

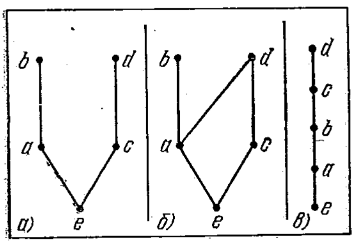


Рис. 57

Б. **Информация о безразличии** может быть задана в виде разбиения множества объектов A на попарно непересекающиеся классы, где в один класс отнесены объекты, безразличные по предпочтению для принимающего решение[1]. Пусть ε_0 — соответствующее этому разбиению отношение эквивалентности. Как построить результирующее отношение порядка с учетом такой дополнительной информации о предпочтениях? Так как безразличные объекты могут быть отождествлены, то естественным было бы взять новое множество, элементами которого являются классы эквивалентности ε_0 (т. е. фактор-множество $A/_{\varepsilon_0}$), и перенести на него структуру отношения ω с помощью известного нам метода факторизации. Однако, как мы знаем, фактор-отношение $\omega/_{\varepsilon_0}$ может быть нетранзитивным, а обычный способ пополнения отношения до транзитивного — с помощью построения его отношения достижимости — может не привести к отношению порядка; отношение $\widehat{\omega/_{\varepsilon_0}}$ будет отношением порядка тогда и только тогда, когда граф отношения $\omega/_{\varepsilon_0}$ не имеет контуров, другими словами, когда эквивалентность ε_0 стабильна в упорядоченном множестве (A, ω). Поэтому для построения результирующего порядка вначале надо «расширить» отношение эквивалентности ε_0 до стабильного отношения эквивалентности $\varepsilon \supset \varepsilon_0$ (как мы видели в § 15, п. 1, классы эквивалентности ε представляют собой объединение классов эквивалентности ε_0, лежащих на одном контуре графа фактор-отношения $\omega/_{\varepsilon_0}$), затем построить фактор-отношение $\omega/_{\varepsilon}$ (которое уже не имеет контуров), и взять в качестве результирующего порядка отношение достижимости $\widehat{\omega/_{\varepsilon}}$. Указанная процедура фактически совпадает с описанным в § 15, п. 1 методом нахождения изотонного образа упорядоченного множества с помощью построения стабильного отношения эквивалентности.

Итак, задание дополнительной информации о безразличии приводит в итоге к упорядоченному множеству, которое является изотонным образом первоначального упорядоченного множества. Накладывая некоторые дополнительные условия на отношение безразличия ε, мы можем получить изотонные образы, обладающие дополнительными свойствами. Например, требование, чтобы любые два безразличных объекта были несравнимыми относительно порядка ω, приводит в результате к строго изотонному образу упорядоченного множества (A, ω). При этом необходимо иметь в виду, что при построении отношения безразличия приходится кроме первоначального отождествления в виде эквивалентности ε_0 проводить дополнительные отождествления классов эквивалентности ε_0, лежащих на одном контуре графа отношения $\omega/_{\varepsilon_0}$.

[1] В этом параграфе мы будем рассматривать лишь транзитивные безразличия; в этом случае отношение безразличия будет отношением эквивалентности, см. § 10, п. 3.

Еще несколько заключительных замечаний, касающихся влияния дополнительной информации о предпочтениях на результирующее отношение порядка. *Дополнительная информация о доминировании приводит к доупорядочению первоначального порядка* ω, *а информация о безразличии — к построению изотонного образа порядка* ω. Говоря образно, информация о доминировании приводит к «выпрямлению» диаграммы упорядоченного множества, а информация о безразличии — к «склеиванию» элементов.

Отметим, что, говоря здесь о первоначальном предпочтении и об отношениях, несущих дополнительную информацию о предпочтениях, мы не касались способов выявления этих отношений. Дело в том, что все эти понятия не являются формализованными, поэтому не существует единых методов выявления указанных отношений; можно говорить лишь о «естественных», «разумных», «целесообразных» и т. д. приемах. Например, если первичная информация об объектах задана с помощью таблицы показателей (критериев) эффективности, то представляется естественным в качестве первоначального предпочтения брать абсолютное предпочтение для векторного критерия (см. § 11). Далее, если, например, каждому критерию можно приписать некоторый «вес», то тем самым вводятся отношения безразличия и доминирования, где безразличными будут векторы, которым соответствуют одинаковые значения «взвешенной» суммы, и для двух векторов доминирующим будет тот, которому соответствует большее значение «взвешенной» суммы. Однако такое приписывание весов возможно далеко не всегда (об этом мы уже говорили в § 11). В работе [10] предлагается способ построения отношений безразличия и доминирования, основанный на введении упорядоченности критериев по важности. Если два критерия (скажем, i-й и j-й) признаны равноценными, то любые два вектора, получающиеся один из другого перестановкой i-й и j-й компоненты, считаются безразличными; если i-й критерий признается важнее j-го, то для любых двух векторов, получающихся один из другого перестановкой i-й и j-й компоненты, доминирующим считается тот, у которого i-я компонента больше j-й. Имеются и другие правила, позволяющие формализовать дополнительную информацию о предпочтениях в виде отношений доминирования и безразличия. В данном параграфе мы сосредоточили внимание на тех аспектах, которые не связаны с конкретным способом задания как первоначального отношения предпочтения, так и отношений, несущих дополнительную информацию о предпочтениях.

2. Использование дополнительной информации в задаче ранжирования. В гл. IV мы имели дело с задачей выделения множества «хороших» объектов, а также с построением ранжирования объектов, согласованного с предпочтением, заданным в форме отношения. Рассмотрим теперь эти задачи для случая, когда предпочтение задается отношением порядка. Итак, пусть A — множество объектов, ω — отношение порядка на A, выражающее предпочтение принимающего решение (напомним, что условие $(a, b) \in \omega$ понимается при различных a и b как доминирование a над b). Введенные в § 12 две концепции подмножества «хороших» объектов (концепция недоминируемости и концепция решения по Нейману — Моргенштерну) приводят здесь[1] к одному и тому же подмножеству, состоящему из всех максимальных в (A, ω) элементов; под ранжированием, согласованным с предпочтением, заданным отношением порядка, естественно понимать любое линейное доупорядочение этого порядка. Если упорядоченное множество не является линейно упорядоченным, то в нем, как правило, имеется множество максимальных элементов и для него имеется много линейных доупорядочений; в этом пункте мы установим влияние дополнительной информации о предпочтениях на количество максимальных элементов и на число линейных доупорядочений. Интуитивно кажется очевидным, что дополнительная информация о предпочтениях должна приводить к уменьшению как множества максимальных элементов, так и числа линейных доупорядочений. Однако здесь надо проявлять известную осторожность. Возьмем, например, бесконечную цепь вида $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ — в ней нет максимальных элементов. Если теперь поступила дополнительная информация о безразличии, согласно которой должны быть отождествлены все элементы начиная с некоторого a_n, то в результирующем упорядоченном множестве, построенном с учетом этой дополнительной информации, класс $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ будет являться максимальным элементом; формально мы здесь получаем увеличение количества максимальных элементов.

Влияние информации о доминировании. Пусть дополнительная информация о доминировании задана в форме бинарного отношения α, совместимого с порядком ω. Как мы выяснили в п. 1, результирующим будет отношение порядка $\omega \widehat{\cup} \alpha$, обозначим его для краткости через ω_α. Так как выполняется включение $\omega \subset \omega_\alpha$, то из условия $a_1 \overset{\omega}{>} a_2$ всегда следует $a_1 \overset{\omega_\alpha}{>} a_2$, поэтому всякий элемент, являющийся максимальным относительно порядка ω_α, будет максимальным и относительно порядка ω; обозначая через M множество максимальных элементов в (A, ω), а через M_α множество максимальных элементов в (A, ω_α), получаем

$$M_\alpha \subset M. \tag{32}$$

---

[1] В предположении, что множество A конечно, или при более слабом предположении, что упорядоченное множество (A, ω) индуктивно; см. в этой связи § 12, предложение 13.

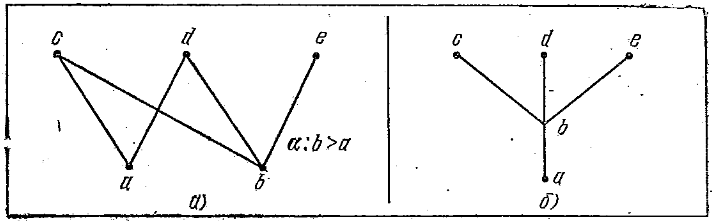


Рис. 58

Включение в (32) может быть и нестрогим (соответствующий пример приведен на рис. 58); однако если в отношение α входит хотя бы одна пара, обе компоненты которой являются максимальными в (A, ω) элементами, то включение в (32) обязательно строгое, т. е. получаем в этом случае сужение множества максимальных элементов.

Рассмотрим теперь влияние информации о доминировании на число линейных доупорядочений. Так как выполнено включение $\omega \subset \subset \omega_\alpha$, то всякое линейное доупорядочение порядка ω_α будет также линейным доупорядочением порядка ω, но не наоборот: среди линейных доупорядочений порядка ω линейными доупорядочениями порядка ω_α будут те и только те линейные порядки $\bar{\omega}$ на A, для которых при всех парах $(a_1, a_2) \in \alpha$ выполнено $a_1 \overset{\bar{\omega}}{>} a_2$. Если информация о доминировании в форме отношения α содержательна (т. е. имеется хотя бы одна пара объектов, для которых выполняется $(a'_1, a'_2) \in \alpha$, но не выполняется $a'_1 \overset{\omega}{>} a'_2$), тогда элементы a'_1 и a'_2 должны быть несравнимыми относительно порядка ω; в этом случае в силу следствия из теоремы Шпильрайна (см. § 14, п. 1) найдется такое линейное доупорядочение $\tilde{\omega}$ порядка ω, для которого выполнено $a'_2 \overset{\tilde{\omega}}{>} a'_1$; линейный порядок $\tilde{\omega}$ не будет линейным доупорядочением порядка ω_α. Итак, *при задании дополнительной информации о доминировании число линейных доупорядочений уменьшается, а обратная величина — мера линейности — возрастает.* Если отношение α состоит из единственной пары $\alpha = \{(a_1, a_2)\}$, то увеличение меры линейности определяется числом линейных доупорядочений порядка ω, для которых выполняется неравенство $a_2 > a_1$: чем таких линейных доупорядочений больше, тем больше увеличивается мера линейности. Для упорядоченного множества, рассмотренного в примере 19, дополнительная информация о доминировании, состоящая из единственного сообщения $d > c$, сокращает число линейных доупорядочений с девяти до одного (приведенного на рис. 45 последним); для остальных линейных доупорядочений выполнено обратное неравенство $c > d$.

Влияние информации о безразличии. Пусть имеется дополнительная информация о безразличии, заданная в форме отношения эквивалентности ε_0. Как мы выяснили в п. 1, результирующим отношением порядка в этом случае будет отношение достижимости для фактор-отношения $\omega/_{\varepsilon}$, где ε — эквивалентность, каждый класс которой есть объединение классов эквивалентности ε_0, лежащих на одном контуре графа отношения $\omega/_{\varepsilon_0}$. Отображение, которое каждому элементу $a \in A$ сопоставляет содержащий его класс эквивалентности $\varepsilon(a)$, будет изотонным:

$$a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2 \Rightarrow \varepsilon(a_1) \overset{\widehat{\omega/_{\varepsilon}}}{\geqslant} \varepsilon(a_2). \tag{33}$$

Выясним, что представляют собой максимальные элементы в упорядоченном множестве $(A/_{\varepsilon}, \widehat{\omega/_{\varepsilon}})$. Пусть C — класс эквивалентности ε, являющийся максимальным элементом в $(A/_{\varepsilon}, \widehat{\omega/_{\varepsilon}})$, $a \in C$ и $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a$.

Тогда на основании (33) выполняется $\varepsilon(a_1) \overset{\widehat{\omega/_{\varepsilon}}}{\geqslant} \varepsilon(a) = C$, но ввиду максимальности элемента C строгое неравенство здесь невозможно, значит, $\varepsilon(a_1) = C$, т. е. $a_1 \in C$.

Таким образом, максимальный класс эквивалентности ε является таким подмножеством множества A, которое вместе с каждым элементом содержит и больший его элемент. Такие подмножества называются мажорантно устойчивыми в упорядоченном множестве (A, ω). Далее, если множество A конечно[1], то для каждого элемента $a \in C$ найдется такой максимальный элемент a^*, что $a^* \overset{\omega}{\geqslant} a$; ввиду мажорантной устойчивости подмножества C получаем $a^* \in C$. Таким образом, каждый класс эквивалентности ε, являющийся максимальным элементом в $(A/_{\varepsilon}, \widehat{\omega/_{\varepsilon}})$, содержит по крайней мере один максимальный элемент упорядоченного множества (A, ω), а так как классы эквивалентности ε попарно не пересекаются, то отсюда следует, что *число максимальных элементов в $(A/_{\varepsilon}, \widehat{\omega/_{\varepsilon}})$ не превосходит числа максимальных элементов в (A, ω).*

[1] Вместо условия конечности достаточно более слабого предположения индуктивности упорядоченного множества (A, ω), см. § 10, п. 4.

Перейдем теперь к анализу влияния дополнительной информации о безразличии на меру линейности упорядоченного множества; для этого надо сравнить число линейных доупорядочений упорядоченных множеств (A, ω) и $(A/_\varepsilon, \widehat{\omega/_\varepsilon})$. Пусть $>$ — линейное доупорядочение порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$. Для каждого класса C эквивалентности ε зададим линейное доупорядочение ω_C порядка, индуцированного отношением ω на этом классе. Построим линейно упорядоченную сумму (см. § 14, п. 3) семейства упорядоченных множеств $(C, \omega_C)_{C \in A/_\varepsilon}$, где множество классов $A/_\varepsilon$ упорядочено порядком $>$; нетрудно проверить, что она будет линейным доупорядочением порядка ω. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_r$ — все классы эквивалентности ε и для класса C_k имеется N_k линейных доупорядочений порядка, индуцированного отношением ω на этом классе. Согласно (19) будет иметься $N_1 \cdot N_2 \ldots N_r$ линейных доупорядочений линейно упорядоченной суммы этих классов. Таким образом, каждое линейное доупорядочение $>$ порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$ порождает $N_1 N_2 \ldots N_r$ линейных доупорядочений порядка ω, причем если линейные доупорядочения порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$ различны, то любые порожденные ими линейные доупорядочения порядка ω, очевидно, также различны. Отсюда следует, что число $N(\omega)$ линейных доупорядочений порядка ω и число $N(\widehat{\omega/_\varepsilon})$ линейных доупорядочений порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$ связаны неравенством

$$N(\omega) \geqslant (N_1 N_2 \ldots N_r) \cdot N(\widehat{\omega/_\varepsilon}).$$

Переходя к обратным величинам — мерам линейности соответствующих упорядоченных множеств — получаем

$$L(\widehat{\omega/_\varepsilon}) \geqslant L(\omega)/L_1 L_2 \ldots L_r. \tag{34}$$

Из (34) следует, что *мера линейности упорядоченного множества* $(A/_\varepsilon, \widehat{\omega/_\varepsilon})$ *превосходит меру линейности упорядоченного множества* (A, ω), причем весьма сильно. Как мы видели на примерах § 14, число линейных доупорядочений даже для упорядоченных множеств, имеющих небольшое число элементов, велико, а мера линейности порядка $\widehat{\omega/_\varepsilon}$ по крайней мере в $N_1 N_2 \ldots N_r$ раз больше меры линейности порядка ω. Таким образом, информация о безразличии сильно увеличивает меру линейности упорядоченного множества.

Задача. Пользуясь формулой (34), оцените увеличение меры линейности упорядоченного множества, приведенного на рис. 54,*а* при наличии указанной информации о безразличии.

Глава VI

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ УПОРЯДОЧЕННОСТИ ИСХОДОВ

Дальнейшее изучение задач принятия решений будет производиться в предположении транзитивности предпочтений. Некоторые авторы считают, что, вообще, всякое предпочтение «обязано» быть транзитивным, т. е. что только те отношения между реальными объектами имеют право именоваться предпочтениями, которые являются транзитивными. Не вставая на такую «крайнюю» точку зрения, укажем на два обстоятельства, по которым рассмотрение транзитивных предпочтений представляет особый интерес. Во-первых, если выявление предпочтений между объектами проводится с помощью их попарного сравнения и основой для предпочтения является увеличение какого-либо числового показателя, то такое отношение предпочтения транзитивно. Далее, если выявление предпочтения между объектами проводится по таблице значений их признаков введением решающих правил, то некоторые типы решающих правил автоматически приводят к транзитивным предпочтениям, например абсолютное предпочтение для векторного критерия (см. § 11). Во-вторых, если построенное тем или иным способом отношение предпочтения оказалось нетранзитивным, то его можно стандартным способом превратить в транзитивное, причем таких способов несколько. Например, можно для отношения ρ построить его отношение достижимости (транзитивное замыкание) $\widehat{\rho}$ или его транзитивную часть $\breve{\rho}$ (см. § 12, п. 2).

Если имеется транзитивная структура «доминирование — безразличие», то, как установлено в § 10, п. 3, ее можно задать с помощью одного отношения квазипорядка, причем в этом случае отношение безразличия является отношением эквивалентности. Отождествив безразличные объекты, мы получим в итоге отношение порядка — это есть фактически содержание предложения 5. Таким образом, *отношения порядка можно рассматривать как основную форму представления транзитивных структур «доминирование — безразличие»*.

Содержанием настоящей главы является рассмотрение задач принятия решений, в которых предпочтения заданы в форме отношений порядка на множестве возможных исходов. Оказывается, что те методы принятия оптимальных решений, которые обычно используются при наличии численной оценки исходов (рекомендуем читателю для сопоставления «освежить» в памяти материал гл. II), не могут быть непосредственно перенесены на случай, когда предпочтения представлены отношениями порядка; требуется или существенная трансформация этих методов, или иная идейная основа. Кроме того, возникают совсем новые проблемы, например, связанные со способами уточнения предпочтений и влиянием дополнительной информации на выбор решений (эти вопросы уже затрагивались нами в § 16). В данной главе мы сосредоточим внимание на характерных особенностях исследования математических моделей принятия решений, в которых предпочтения заданы отношениями порядка, рассмотрев задачи принятия решений в условиях неопределенности, риска и конфликта.

17. ГИПОТЕЗА АНТАГОНИЗМА И ГАРАНТИРОВАННЫЕ ИСХОДЫ

Как мы установили в § 2, задачу принятия решения в условиях неопределенности можно представить в виде таблицы функции реализации F (табл. 1), где $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество альтернатив принимающего решение, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество состояний среды, A — множество исходов. Если принимающий решение выбирает альтернативу x_i, а среда принимает состояние y_j, то получается исход $F(x_i, y_j) \in A$ $(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m)$.

Предположим, что в качестве гипотезы о поведении среды принята гипотеза антагонизма (см. § 5). Тогда, если исходы имеют числовое выражение, то, как мы выяснили, оптимальным решением является выбор максиминной альтернативы, т. е. альтернативы с тем номером i, на котором достигается внешний экстремум в выражении

$$\max_i \min_j F(x_i, y_j). \tag{35}$$

Если же предпочтения на множестве исходов заданы отношением порядка, то выражение (35) теряет смысл (по крайней мере когда отношение порядка не является линейным), поэтому прямой перенос на этот случай принципа максимина невозможен. Попробуем все же и здесь воспользоваться «максиминной идеологией».

Пусть ω — произвольное отношение порядка на множестве исходов A, выражающее предпочтения принимающего решение. Будем говорить, что исход $a \in A$ **гарантируется**, если существует такая альтернатива x_i, что при любом состоянии среды y_j выполняется $F(x_i, y_j) \overset{\omega}{\geqslant} a$; при этом альтернатива x_i называется **гарантирующей исход** a. (Иногда для упорядоченного множества (A, ω) совокупность всех элементов, превосходящих элемент a (включая a), называется **верхним конусом** элемента a. Очевидно, что исход a гарантируется тогда и только тогда, когда существует такая альтернатива, при использовании которой исход обязательно попадает в верхний конус элемента a.) Всякую альтернативу, гарантирующую исход, являющийся максимальным элементом в множестве всех гарантированных исходов, будем по-прежнему называть максиминной. Хотя в данном случае это название уже не имеет того абсолютного значения, как при численном выражении исходов, оно оправдано тем, что всякая такая альтернатива приводит при любом состоянии среды к исходу, не менее предпочтительному, чем некоторый максимальный гарантированный исход.

При отсутствии дополнительной информации о возможных состояниях среды естественно рассматривать в качестве оптимального решения выбор максиминной альтернативы. Правда, максиминных альтернатив может быть несколько, а гарантированные ими исходы могут быть различными. Для сужения множества максиминных альтернатив необходима дополнительная информация; если эта дополнительная информация позволяет установить линейное упорядочение множества всех гарантированных исходов, то в этом случае имеется наибольший гарантированный исход, являющийся единственным максимальным элементом (см. предложение 11) в множестве гарантированных исходов. При этом, хотя максиминных альтернатив может быть и несколько, все они гарантируют один и тот же исход. Проиллюстрируем использование принципа максимина на следующем примере.

Пример 25 (вакцины против вирусов). Ожидается появление вирусов одного из трех типов: A, B или C. Против этих вирусов имеется семь видов вакцин, обозначаемых далее $x_1, x_2, \ldots, x_7$; по стоимости производства одной дозы вакцины самой дорогой является вакцина x_1, после нее самой дорогой — x_2 и т. д., вакцина x_7 — самая дешевая. Для вакцины каждого вида эффективность ее действия на вирусы разных типов различна и может быть оценена в баллах табл. 29 (оценка 4 означает очень высокую эффективность действия, 3 — достаточно высокую, 2 — среднюю, 1 — низкую). Условия производства таковы, что можно производить вакцину только одного вида. Выбор какого вида вакцины будет оптимальным, если цель состоит в минимизации затрат и максимизации эффективности?

Приведенную задачу можно рассматривать как задачу принятия решения в условиях неопределенности: альтернативами принимающего решение являются $x_1, x_2, \ldots, x_7$, возможными состояниями среды — A, B, C, получающиеся исходы оцениваются по двум показателям — стоимость и эффективность. Табл. 30 есть таблица функции реализации; если критерии стоимости и эффективности считать несводимыми один к другому, то множество исходов можно упорядочить абсолютным предпочтением для векторного критерия (диаграмма упорядоченного множества исходов приведена на рис. 59). Здесь множество гарантированных исходов

$W=\{(1,3),\ (2,3),\ (3,2)\ (4,2),\ (5,2),\ (6,1)\ (7,1)\}$,

в нем максимальными элементами являются (2,3), (5,2), (7,1), а соответствующие им максиминные альтернативы x_2, x_5 и x_7 (рис. 59).

Таблица 29

	A	B	C
x_1	4	3	4
x_2	3	3	4
x_3	4	3	2
x_4	3	2	3
x_5	2	3	2
x_6	3	2	1
x_7	1	2	1

Таблица 30

	A	B	C
x_1	(1,4)	(1,3)	(1,4)
x_2	(2,3)	(2,3)	(2,4)
x_3	(3,4)	(3,3)	(3,2)
x_4	(4,3)	(4,2)	(4,3)
x_5	(5,2)	(5,3)	(5,2)
x_6	(6,3)	(6,2)	(6,1)
x_7	(7,1)	(7,2)	(7,1)

Как в неформальных терминах охарактеризовать оптимальность этих трех альтернатив? Нетрудно понять, что в задачах принятия решений, подобных приведенной выше, в которых исходы оцениваются по двум показателям, не сводимым один к другому, — имеются максиминные альтернативы двух типов. Максиминные альтернативы первого типа те, которые среди всех альтернатив, дающих наибольший гарантированный уровень эффективности, являются наиболее предпочтительными (т. е. самыми дешевыми) по стоимости. Максиминные альтернативы второго типа определяются для каждого возможного уровня эффективности. А именно, если h — любой фиксированный уровень эффективности, то максиминной будет альтернатива, которая является самой дешевой по стоимости среди всех альтернатив, гарантированный уровень эффективности которых не ниже h. В нашем примере наибольший гарантированный уровень эффективности равен 3; его обеспечивают две альтернативы: x_1 и x_2, из них альтернатива x_2 более предпочтительна по стоимости, т. е. x_2 — максиминная альтернатива первого типа. Гарантированный уровень $h=2$ обеспечивают альтернативы $x_1, \ldots, x_5$;

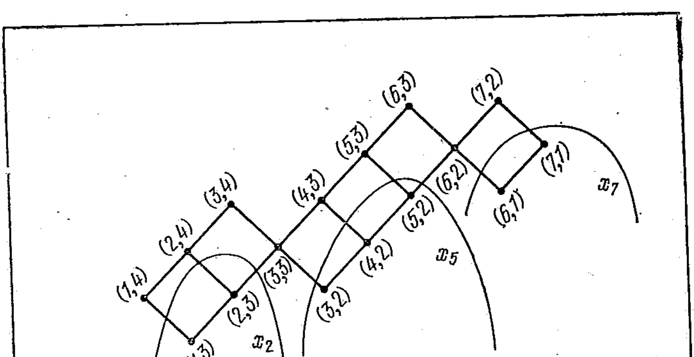


Рис. 59

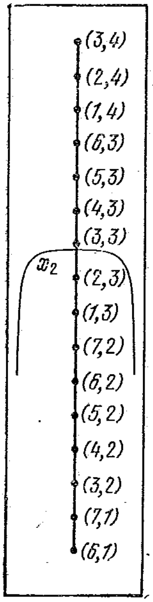


Рис. 60

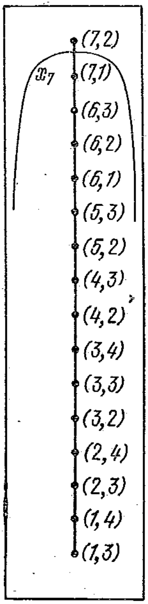


Рис. 61

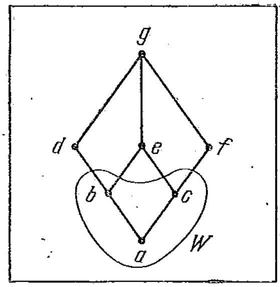


Рис. 62

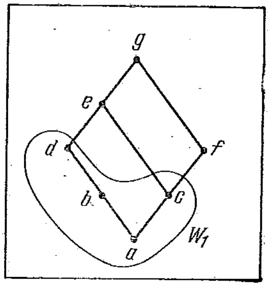


Рис. 63

из них самой предпочтительной по стоимости является x_5. Гарантированный уровень $h=1$ обеспечивают все альтернативы, из них наиболее предпочтительной по стоимости является x_7.

Итак, выделение максиминных альтернатив позволило в нашем примере сузить первоначальное множество альтернатив до трех: x_2, x_5 и x_7. При отсутствии какой-либо дополнительной информации о соотношении показателей стоимости и эффективности дальнейшее сужение этого множества (в частности, нахождение единственной оптимальной альтернативы) не представляется возможным. В то же время наличие такой информации приводит к «выпрямлению» диаграммы упорядоченного множества исходов, что, в свою очередь, ведет (см. § 16, п. 2) к уменьшению числа максимальных элементов в множестве гарантированных исходов, а значит, и к уменьшению числа максиминных альтернатив. Скажем, в рамках нашего примера, если поступила информация о том, что критерий эффективности существенно важнее критерия стоимости, то диаграмма упорядоченного множества исходов вытягивается в прямую линию (рис. 60), исход (2,3) становится единственным максимальным элементом в множестве всех гарантированных исходов, а альтернатива x_2 — единственной максиминной альтернативой. Если же поступит информация, что критерий стоимости существенно важнее критерия эффективности, то упорядоченное множество исходов изображается диаграммой рис. 61; тогда единственным максимальным элементом в множестве гарантированных исходов будет (7,1), а соответствующей ему максиминной альтернативой — x_7.

Следует иметь в виду, что при проведении преобразования упорядоченного множества исходов, связанного с дополнительной информацией о предпочтениях, может меняться и множество гарантированных исходов. Проиллюстрируем это следующим примером.

Таблица 31

	y_1	y_2	y_3
x_1	d	e	g
x_2	e	f	c
x_3	a	b	g

Пример 26. Возьмем задачу принятия решения, таблицей функции реализации которой является табл. 31, а диаграммой упорядоченного множества исходов — диаграмма на рис. 62. Здесь альтернатива x_1 гарантирует исход b, альтернатива x_2 гарантирует исход c и любая альтернатива гарантирует исход a. Таким образом, множество гарантированных исходов есть $W=\{a, b, c\}$; максимальными элементами в нем являются b и c. Предположим, что получена дополнительная информация о предпочтениях в виде сообщения о доминировании: $e>d$. Тогда результирующее отношение порядка, построенное с учетом этого сообщения, представляется диаграммой на рис. 63; таблица функции реализации сохраняется. Видим, что множество гарантированных исходов изменилось и состоит из элементов a, b, c, d; максимальными элементами в нем будут теперь d и c.

Однако, *если отношение, дающее дополнительную информацию о доминировании, таково, что вторые компоненты пар, входящих в это отношение, принадлежат множеству всех гарантированных* (при первоначальном предпочтении) *исходов, то множество гарантированных исходов сохранится.* Для доказательства этого утверждения заметим, во-первых, что при поступлении дополнительной информации о доминировании множество гарантированных исходов может только расшириться. Действительно, пусть ω — отношение порядка, выражающее первоначальное предпочтение на множестве исходов A, α — бинарное отношение, дающее дополнительную информацию о доминировании и совместимое с порядком ω.

Напомним (см. § 16, п. 1), что в этом случае результирующим отношением порядка будет отношение достижимости $\omega_\alpha = \widehat{\omega \cup \alpha}$, причем всегда выполняется включение $\omega \subset \omega_\alpha$. Обозначим через W и W_α соответственно множество исходов, гарантированных при предпочтениях ω и ω_α. Если $a \in W$, то найдется такая альтернатива x_i, что при любом состоянии среды y_j выполняется $F(x_i, y_j) \overset{\omega}{\geqslant} a$, значит $F(x_i, y_j) \overset{\omega_\alpha}{\geqslant} a$, т. е. $a \in W_\alpha$. Показали включение $W \subset W_\alpha$. Покажем теперь, что при указанном выше предположении об отношении α выполняется и обратное включение. Как мы видели в § 16, п. 1, дополнительную информацию о доминировании, заданную в виде бинарного отношения α, можно задать также в виде последовательности сообщений

$$a_1 \overset{\alpha}{>} a'_1,\ a_2 \overset{\alpha}{>} a'_2,\ \ldots,\ a_r \overset{\alpha}{>} a'_r, \tag{36}$$

состоящей из всех пар (a_k, a'_k), принадлежащих отношению α. Обозначим через ω_1 отношение порядка, построенное с учетом первого сообщения $a_1 \overset{\alpha}{>} a'_1$. Предположим, что исход a гарантируется при предпочтении ω_1, т. е. существует такая альтернатива x_i, для которой неравенство $F(x_i, y_j) \overset{\omega_1}{\geqslant} a$ выполняется при всех состояниях среды y_j. Согласно (29) это неравенство означает, что

$$F(x_i, y_j) \overset{\omega}{\geqslant} a \text{ или } F(x_i, y_j) \overset{\omega}{\geqslant} a_1 \overset{\alpha}{>} a'_1 \overset{\omega}{\geqslant} a. \tag{37}$$

Может быть два случая:

1) при всех y_j выполняется первый член дизъюнкции (37), тогда альтернатива x_i гарантирует исход a при предпочтении ω;

2) хотя бы при одном y_j выполняется второй член дизъюнкции (37); тогда, в частности, $a'_1 \overset{\omega}{\geqslant} a$. Так как $(a_1, a'_1) \in \alpha$, то по предположению $a'_1 \in W$, т. е. существует альтернатива x_k, гарантирующая исход a'_1; ввиду условия $a'_1 \overset{\omega}{\geqslant} a$, альтернатива x_k будет гарантировать при предпочтении ω и исход a. Итак, после первого сообщения $a_1 \overset{\alpha}{>} a'_1$ множество гарантированных исходов сохранилось; сохранится оно и после всей последовательности сообщений (36). Получаем $W = W_\alpha$.

Пусть теперь $a^*_1, a^*_2, \ldots, a^*_p$ — все максимальные элементы множества W гарантированных исходов при предпочтении ω. Возьмем такую последовательность сообщений о доминировании

$$a^*_1 > a^*_2,\ a^*_1 > a^*_3,\ \ldots,\ a^*_1 > a^*_p. \tag{38}$$

Сообщение $a^*_1 > a^*_2$ совместимо с порядком ω. Так как $a^*_2 \in W$, то множество исходов, гарантированных при предпочтении, построенном с учетом сообщения $a^*_1 > a^*_2$, в силу отмеченного выше обстоятельства сохранится, но множество его максимальных элементов уменьшится, ибо элемент a^*_2 уже не будет в нем максимальным. Рассуждая аналогичным образом, получим, что при предпочтении, построенном с учетом информации о доминировании в виде всей последовательности (38), элемент a^*_1 будет единственным максимальным гарантированным исходом. Но так как элемент a^*_1 выбран нами произвольно, то фактически мы показали, что *для всякого максимального гарантированного исхода имеется такая дополнительная информация о предпочтениях в виде последовательности сообщений о доминировании, которая не противоречит первоначальному предпочтению и при учете которой этот исход становится единственным максимальным гарантированным исходом, а соответствующая этому исходу альтернатива — единственной мак-*

симинной альтернативой. Именно это обстоятельство не позволяет сузить множество максиминных альтернатив при отсутствии дополнительной информации о предпочтениях: всякая максиминная альтернатива может оказаться — при учете дополнительной информации о предпочтениях — единственной оптимальной альтернативой.

18. ПРОДОЛЖЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

1. Способы продолжения упорядоченности. В некоторых задачах принятия решений принимающий решение должен сравнивать по предпочтению не только возможные исходы, но и вероятностные меры на множестве исходов[1]. Если имеется численная оценка исходов, т. е. такая функция f, которая каждому исходу $a \in A$ сопоставляет его «полезность» $f(a)$ (для принимающего решение), то в качестве «полезности» вероятностной меры μ на множестве A обычно берется соответствующее ей математическое ожидание $\sum\limits_{a \in A} \mu(a) \cdot f(a)$ и из двух вероятностных мер более предпочтительной считается та, которой соответствует бо́льшее значение математического ожидания. Если же предпочтения на множестве исходов заданы с помощью отношения порядка, то непосредственно воспользоваться этим приемом не представляется возможным, так как для объектов нечисловой природы понятие математического ожидания теряет смысл. Заметим, что здесь математическое ожидание нужно не само по себе, а лишь для *сравнения* вероятностных мер, т. е. для ответа на вопрос, находятся ли две вероятностных меры в отношении предпочтения или нет. Иными словами, проблема состоит *в продолжении упорядоченности,* заданной на множестве, на множество его вероятностных мер; эта проблема имеет принципиальное значение для ряда вопросов теории принятия решений.

В работе автора[2] предложен следующий способ продолжения отношения порядка ω, заданного на произвольном (конечном) множестве A, на множество $\mathscr{P}(A)$ всех вероятностных мер на A. Рассмотрим класс K всевозможных изотонных отображений упорядоченного множества (A, ω) в действительные числа. Этот класс со-

---

[1] Формально вероятностную меру μ на конечном множестве A можно определить как такое отображение μ: $A \longrightarrow [0, 1]$, что $\sum\limits_{a \in A} \mu(a) = 1$.

[2] См. **Розен В. В.** Смешанные расширения игр с упорядоченными исходами. — ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, № 6, с. 1436—1450.

держит всю информацию об отношении порядка ω, так как для любых $a_1, a_2 \in A$ выполняется равносильность

$$a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_2 \Longleftrightarrow f(a_1) \geqslant f(a_2) \text{ для всех } f \in K. \tag{39}$$

Каждое отображение $f \in K$ с помощью оператора «математическое ожидание» продолжается до отображения $\bar{f}$: $\mathscr{P}(A) \to R$:

$$\bar{f}(\mu) = \sum_{a \in A} \mu(a) \cdot f(a) \quad (\mu \in \mathscr{P}(A)). \tag{40}$$

Определим теперь на множестве $\mathscr{P}(A)$ отношение $\bar{\omega}$ формулой, аналогичной формуле (39), т. е. для любых двух вероятностных мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{P}(A)$ полагаем

$$\mu_1 \overset{\bar{\omega}}{\geqslant} \mu_2 \Longleftrightarrow \bar{f}(\mu_1) \geqslant \bar{f}(\mu_2) \text{ для всех } f \in K. \tag{41}$$

Оказывается, что отношение $\bar{\omega}$ также является отношением порядка, причем оно продолжает порядок ω. При этом важным является тот факт, что если в формуле (41) вместо класса K всех изотонных отображений упорядоченного множества (A, ω) в R взять его подкласс, состоящий из изотонных отображений в двухэлементное множество $\{0, 1\}$, то получим в качестве продолжения то же самое отношение порядка $\bar{\omega}$. Указанное обстоятельство позволяет описать отношение $\bar{\omega}$ в явном виде следующим образом:

$$\mu_1 \overset{\bar{\omega}}{\geqslant} \mu_2 \Longleftrightarrow \mu_1(X) \geqslant \mu_2(X) \text{ для любого подмножества } X \subset A,$$
$$\text{мажорантно устойчивого}^{1)} \text{ в } (A, \omega)\ (\mu(X) \text{ есть } \sum_{a \in X} \mu(a)). \tag{42}$$

Отношение порядка $\bar{\omega}$ будем в дальнейшем называть **продолжением порядка** ω на множество вероятностных мер. Отметим, что для линейного отношения порядка ω всякое мажорантно устойчивое подмножество имеет вид $\{a' \in A \mid a' \geqslant a\}$, где $a \in A$; в этом случае согласно (42) условие $\mu_1 \overset{\bar{\omega}}{\geqslant} \mu_2$ равносильно тому, что для любого $a \in A$ выполняется [2]

$$\sum_{a' \geqslant a} \mu_1(a') \geqslant \sum_{a' \geqslant a} \mu_2(a').$$

---

[1] Подмножество $X \subset A$ называется **мажорантно устойчивым** в упорядоченном множестве (A, ω), если вместе с каждым элементом оно содержит и больший его элемент.

[2] В таком виде продолжение **линейного** порядка на множество вероятностных мер было введено Е. Б. Яновской в работе «Ситуации равновесия в играх с неархимедовыми полезностями». (В кн.: Мат. методы в социальных науках/Ин-т физики и математики АН ЛитССР. — Вильнюс, 1974, вып. 4, с. 98—118.

Отношение $\overline{\omega}$ обладает важным свойством устойчивости относительно построения выпуклой комбинации вероятностных мер, т. е. если выполняется r неравенств

$$
\begin{aligned}
&\mu_1 \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} \nu_1,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\mu_r \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} \nu_r
\end{aligned}
\tag{43}
$$

и $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — r неотрицательных чисел, сумма которых равна единице, то для выпуклых комбинаций вероятностных мер[1], стоящих в левой и правой частях (43), также выполняется неравенство

$$\lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_r\mu_r \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} \lambda_1\nu_1 + \ldots + \lambda_r\nu_r. \tag{44}$$

Указанное свойство может быть положено в основу определения отношения $\overline{\omega}$, а именно, оказывается, что $\overline{\omega}$ *есть наименьшее* (по включению) *из тех отношений квазипорядка на множестве* $\mathscr{P}(A)$, *которые содержат отношение* ω *и обладают свойством устойчивости относительно построения выпуклых комбинаций.*

Дадим теперь наглядное истолкование неравенства $\mu_1 \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} \mu_2$ для произвольных вероятностных мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{P}(A)$. Положим $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Представим вероятностную меру μ_1 геометрически в виде разбиения единичного интервала на n подынтервалов $I^1{}_1, \ldots, I^n{}_1$, где длина подынтервала $I^i{}_1$ ($i=1, \ldots, n$) равна $\mu_1(a_i)$ (если $\mu_1(a_i)=0$, то подынтервал $I^i{}_1$ будет пустым). Аналогично представим вероятностную меру μ_2 в виде разбиения единичного интервала на n подынтервалов $I^1{}_2, \ldots, I^n{}_2$, где длина подынтервала $I^j{}_2$ ($j=1, 2, \ldots, n$) равна $\mu_2(a_j)$. Оказывается, что *условие* $\mu_1 \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} \mu_2$ *выполняется тогда и только тогда, когда возможно «уложить» интегралы* $I^1{}_1, \ldots, I^n{}_1$ *в интервалы* $I^1{}_2, \ldots, I^n{}_2$ *при следующем ограничении: разрешается укладывать интервал* $I^i{}_1$ *в интервал* $I^j{}_2$ *лишь при условии* $a_i \overset{\omega}{\geqslant} a_j$. Пример такой «укладки» меры μ_1 в меру μ_2 приведен на рис. 64; справа дана диаграмма порядка ω.

---

[1] Выпуклая комбинация вероятностных мер $\mu_1, \ldots, \mu_r$ с коэффициентами $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ есть вероятностная мера $\lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_r\mu_r$, определяемая условием

$$\overline{\lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_r\mu_r}(a) = \lambda_1\mu_1(a) + \ldots + \lambda_r\mu_r(a).$$

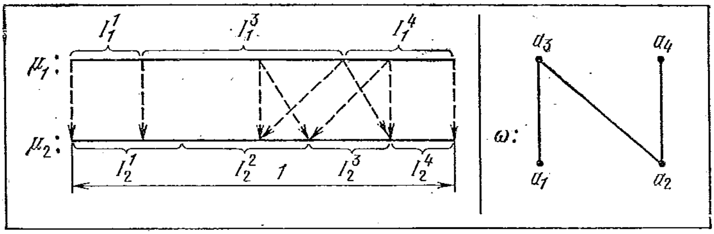


Рис. 64

(Пояснение: здесь интервал I^1_1 «уложен» в интервал I^1_2; I^3_1 — в интервалы I^1_2, I^2_2, I^3_2; I^4_1 — в интервалы I^2_2, I^4_2. Сформулированное выше ограничение выполнено, так как $a_1 \overset{\omega}{\geqslant} a_1$, $a_3 \overset{\omega}{\geqslant} a_1$, $a_3 \overset{\omega}{\geqslant} a_2$, $a_3 \overset{\omega}{\geqslant} a_3$, $a_4 \overset{\omega}{\geqslant} a_2$, $a_4 \overset{\omega}{\geqslant} a_4$.)

2. Максимальные элементы в упорядоченном множестве $(\mathscr{P}(A), \bar{\omega})$. Для дальнейшего изучения задач принятия решений, в которых предпочтения заданы отношениями порядка, важное значение имеют вопросы существования и нахождения максимальных элементов подмножеств специального вида, называемых выпуклыми многогранниками[1], в упорядоченном множестве $(\mathscr{P}(A), \bar{\omega})$. Справедлив следующий результат.

Теорема 6. *Пусть (A, ω) — конечное упорядоченное множество, $C \subset \mathscr{P}(A)$ — выпуклый многогранник. Для того чтобы вероятностная мера $\mu_0 \in C$ была максимальным элементом подмножества C относительно порядка $\bar{\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое строго изотонное отображение $f: A \to R$, при котором μ_0 доставляет наибольшее значение функции $\bar{f}(\mu)$, где $\mu \in C$* ($\bar{f}$ есть продолжение отображения f на множество $\mathscr{P}(A)$, определенное формулой (40)).

Теорема 6 характеризует максимальные элементы выпуклых многогранников в $(\mathscr{P}(A), \bar{\omega})$, но эта характеристика, удобная для доказательства существования максимальных элементов, малопригодна для их нахождения. Для нахождения максимальных элементов подмножеств в $(\mathscr{P}(A), \bar{\omega})$ полезно следующее понятие. Договоримся на дальнейшее, считая отношение порядка ω на A фиксированным, для любых двух вероятностных мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{P}(A)$ писать просто $\mu_1 \geqslant \mu_2$ вместо $\mu_1 \overset{\bar{\omega}}{\geqslant} \mu_2$ и говорить в этом случае, что μ_1 мажорирует μ_2.

[1] Подмножество $C \subset \mathscr{P}(A)$ называется **выпуклым многогранником**, если существует такое конечное подмножество $C_0 \subset C$, что C совпадает с множеством всевозможных выпуклых комбинаций вероятностных мер из C_0.

Пусть S — произвольное множество вероятностных мер на A. Подмножество $S_0 \subset S$ назовем **базисом** для S, если[1] 1. Ни одна вероятностная мера, принадлежащая подмножеству S_0, не мажорируется выпуклой комбинацией остальных вероятностных мер из S_0; 2. Всякая вероятностная мера из S, не попавшая в S_0, мажорируется выпуклой комбинацией вероятностных мер из S_0.

Для всякого конечного подмножества $S \subset \mathscr{P}(A)$ существует его базис, который может быть найден следующим образом. Если в подмножестве S есть вероятностная мера, которая мажорируется выпуклой комбинацией остальных вероятностных мер из S, то, отбросив ее, получим новое подмножество, к которому применим ту же процедуру, и т. д. Так как S конечно, то приходим в конце концов к такому его подмножеству S_0, которое удовлетворяет условию 1. Нетрудно проверить, что S_0 удовлетворяет также условию 2.

Перейдем теперь к вопросу нахождения максимальных элементов выпуклых многогранников в $(\mathscr{P}(A), \bar{\omega})$. Заметим, прежде всего, что из условия 2 и свойства устойчивости порядка $\bar{\omega}$ относительно построения выпуклых комбинаций сразу следует.

Предложение 17. *Если S_0 — базис для S, то всякая выпуклая комбинация вероятностных мер из S мажорируется выпуклой комбинацией вероятностных мер из S_0.*

Для произвольного подмножества $S \subset \mathscr{P}(A)$ будем обозначать через $H(S)$ множество всех выпуклых комбинаций элементов из S. Если подмножество S_0 является базисом для S, то по предложению *17* всякая вероятностная мера $\mu \in H(S)$ мажорируется некоторой вероятностной мерой $\nu \in H(S_0)$; отсюда сразу следует, что *все максимальные элементы подмножества $H(S)$ находятся в $H(S_0)$*. Этот факт позволяет сузить «область поиска» максимальных элементов, а в некоторых случаях (как мы увидим в п. 3) и найти их.

3. Выбор оптимальных решений в условиях риска. Рассмотрим задачу принятия решения в условиях риска, заданную в форме таблицы ее функции реализации F (табл. 32). Здесь $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество альтернатив, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество состояний среды, A — множество возможных исходов. Если принимающий решение выбирает альтернативу x_i, а среда принимает состояние y_j, то в результате получается исход $F(x_i, y_j) \in A$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$). При принятии решения в условиях риска принимающему решение известна для каждого состояния среды вероятность его наступления; пусть q_j — вероятность наступления состояния y_j.

---

[1] Стоит заметить, что приводимые далее условия 1 и 2 аналогичны условиям внутренней и внешней устойчивости подмножеств в графе, см. § 12, п. 2.

Таблица 32

F	$y_1\ (q_1)$	...	$y_j\ (q_j)$	...	$y_m\ (q_m)$
x_1	$F(x_1\ y_1)$	...	$F(x_1,\ y_j)$	...	$F(x_1,\ y_m)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$F(x_i,\ y_1)$	...	$F(x_i,\ y_j)$	...	$F(x_i,\ y_m)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_n	$F(x_n,\ y_1)$	...	$F(x_n,\ y_j)$	...	$F(x_n,\ y_m)$

Если имеется численная оценка исходов — для каждого исхода $F(x_i,\ y_j)$ его «полезность» для принимающего решение оценена числом a_{ij}, то мерой «полезности» альтернативы x_i может служить величина математического ожидания $\sum_{j=1}^{m} q_j a_{ij}$ и сравнение любых двух альтернатив проводится по соответствующим им математическим ожиданиям (см. в этой связи § 5).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда предпочтения принимающего решение на множестве исходов A задано с помощью отношения порядка ω. Тогда каждой альтернативе x_i соответствует вероятностная мера F_{x_i} на A, для которой вероятность исхода $a \in A$ есть сумма вероятностей тех состояний среды, которые приводят к исходу a при условии выбора альтернативы x_i; так как множество всех вероятностных мер на A упорядочено порядком $\bar{\omega}$ — продолжением порядка ω на множество вероятностных мер, то сравнение альтернатив можно свести к сравнению соответствующих им вероятностных мер относительно порядка $\bar{\omega}$.

В конце § 6 для теоретико-игровых моделей принятия решений был рассмотрен случайный выбор действий, при котором каждая альтернатива выбирается с заданной вероятностью (смешанные стратегии). Что можно сказать о таком способе выбора действий в нашем случае? Оказывается, что если исходы имеют численную оценку, то применение смешанных действий нецелесообразно. Действительно, в этом случае альтернативы можно линейно упорядочить по соответствующим им математическим ожиданиям, и понятно, что использование альтернативы, которой соответствует наибольшее математическое ожидание, приводит к большему ожидаемому результату, чем использование любой «смеси» альтернатив. Если же предпочтение на множестве исходов задано с помощью отношения порядка ω, то его продолжение $\bar{\omega}$ не является линейным (даже если ω — линейный порядок), а множество вероятностных мер $\{F_{x_1}, \ldots, F_{x_n}\}$ не будет иметь наибольшего (относительно порядка $\bar{\omega}$) элемента. Поэтому при задании предпочтений с помощью отношений порядка мы будем в качестве «действий» рассматривать вероятностные меры на первоначальном множестве альтернатив. Вероятностную меру p на множестве $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ будем записывать в виде $p=(p_1, \ldots, p_n)$, где $p_i=p(x_i)$ — вероятность выбора альтернативы x_i. Конечно, $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$. Каждой вероятностной мере $p=(p_1, \ldots, p_n)$ на множестве альтернатив X соответствует вероятностная мера F_p на множестве исходов A, для которой вероятность $F_p(a)$ наступления исхода a равна сумме всевозможных произведений вида $p_i \cdot q_j$, где $F(x_i, y_j)=a$. (Ясно, что данное на стр. 145 определение вероятностной меры F_{x_i} есть частный случай только что приведенного определения.) Множество всех таких вероятностных мер F_p упорядочено отношением $\bar{\omega}$ — продолжением порядка ω.

Под оптимальным решением будем понимать такую вероятностную меру $p^0 \in \mathscr{P}(X)$, для которой соответствующая ей вероятностная мера F_{p^0} является максимальным элементом в множестве $\{F_p \mid p \in \mathscr{P}(X)\}$, упорядоченном порядком $\bar{\omega}$.

Против приведенного выше определения оптимальности решения можно выставить одно возражение следующего плана: конечно, понимание в качестве оптимального решения максимального элемента вполне естественно (и уже использовалось нами в других задачах принятия решений, например в § 16), но почему мы должны брать максимальную вероятностную меру именно относительно порядка $\bar{\omega}$? Ведь наверняка можно «придумать» и другие способы продолжения заданного порядка на множество вероятностных мер, тогда изменится и множество максимальных элементов. Важным доводом в пользу выбора максимальных элементов относительно порядка ω является факт, зафиксированный в теореме 6. Действительно, предположим, что возможно получение такой дополнительной информации о предпочтениях, на основе которой удастся для каждого исхода $a \in A$ установить его «полезность», выраженную числом $f(a)$. Такое «очисливание» исходов можно считать не противоречащим первоначально заданному предпочтению в форме отношения порядка ω, если лучший относительно порядка ω исход имеет бо́льшую «полезность», т. е. говоря формальным языком, функция f должна являться строго изотонным отображением упорядоченного множества (A, ω) в действительные числа (иначе, его измерением). По теореме 6 оптимальными — в смысле данного выше определения — решениями будут в точности те, которые приводят к наибольшему математическому ожиданию «полезности» при каком-либо «очисливании», непротиворечащем первоначально заданному предпочтению. Иными словами, мы *выбираем в качестве оптимальных такие решения* (в форме вероятностных распределений на множестве альтернатив), *которые потенциально могут оказаться наилучшими при получении дополнительной информации о предпочтениях.*

Перейдем теперь к вопросу нахождения оптимальных решений для рассматриваемого класса задач. Следует сразу сказать, что задача практического нахождения максимальных элементов подмножеств упорядоченного множества $(\mathcal{P}(A), \overline{\omega})$, является в общем случае довольно сложной, поэтому мы ограничимся здесь вопросами сужения области поиска. Заметим вначале, что для любой вероятностной меры $p = (p_1, \ldots, p_n)$ на множестве альтернатив X вероятностная мера F_p на множестве исходов A может быть представлена в виде выпуклой комбинации вероятностных мер F_{x_i}, соответствующих отдельным альтернативам, следующим образом: $F_p = p_1F_{x_1} + \ldots + p_nF_{x_n}$. Отсюда следует, что подмножество $\{F_p \mid p \in \mathcal{P}(X)\}$ вероятностных мер является выпуклым многогранником, состоящим из всевозможных выпуклых комбинаций вероятностных мер $F_{x_1}, \ldots, F_{x_n}$, и согласно сказанному в конце п. 2, каждый максимальный элемент этого подмножества есть выпуклая комбинация вероятностных мер, принадлежащих базису подмножества $\{F_{x_1}, \ldots, F_{x_n}\}$. Так как нахождение базиса сводится к отбрасыванию тех вероятностных мер, которые мажорируются выпуклыми комбинациями оставшихся вероятностных мер, то мы должны уметь для каждой вероятностной меры F_{x_i} ответить на вопрос—мажорируется ли она (относительно порядка $\overline{\omega}$) выпуклой комбинацией вероятностных мер $F_{x_1}, \ldots, F_{x_{i-1}}, F_{x_{i+1}}, \ldots, F_{x_n}$? Ответ на этот вопрос сводится благодаря (42) к вопросу разрешимости некоторой системы линейных неравенств. Рассмотрим теперь несколько примеров, показывающих нахождение оптимальных решений в условиях риска.

Пример 27. Возьмем задачу принятия решения в условиях риска, в которой множество выбора X состоит из двух альтернатив x_1 и x_2, а среда принимает одно из четырех состояний y_1, y_2, y_3, y_4, вероятности которых равны соответственно 1/4, 1/6, 1/4, 1/3. Получающиеся исходы характеризуются двумя показателями, не сводимыми один к другому. Каждый из показателей оценивается

Таблица 33

	y_1 (1/4)	y_2 (1/6)	y_3 (1/4)	y_4 (1/3)
x_1	(хор. отл.) $= a$	(уд. пл.) $= b$	(отл., уд.) $= c$	(хор., отл.) $= a$
x_2	(отл., уд.) $= c$	(пл., хор.) $= d$	(хор., отл.) $= a$	(уд., пт.) $= b$

в балльной шкале оценками {*плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично*}, и результаты оценок представлены в табл. 33.

При несводимости одного показателя к другому в качестве отношения предпочтения на множестве исходов естественно взять абсолютное предпочтение для векторного критерия, т. е. считать один исход предпочтительнее другого, если для первого оба показателя имеют более высокую оценку. Обозначая отношение предпочтения (являющееся отношением порядка) через ω, имеем

$$a \overset{\omega}{>} b,\ a \overset{\omega}{>} d,\ c \overset{\omega}{>} b. \tag{45}$$

Получаем в итоге задачу принятия решения в условиях риска при наличии упорядоченности исходов, в которой функция реализации F представлена табл. 34, а диаграмма отношения порядка — на рис. 65. Вероятностные меры F_{x_1} и F_{x_2} на множестве исходов $\{a, b, c, d\}$, соответствующие альтернативам x_1 и x_2, заданы табл. 35. В данном случае выполняется неравенство $F_{x_1} \overset{\overline{\omega}}{>} F_{x_2}$; соответствующая «укладка» меры F_{x_1} в меру F_{x_2} приведена на рис. 66.

Таким образом, одноэлементное подмножество $\{F_{x_1}\}$ образует базис подмножества $\{F_{x_1}, F_{x_1}\}$, значит, F_{x_1} является единственным максимальным (и даже наибольшим) элементом в множестве $\{F_p \mid p \in \mathscr{P}(X)\}$, упорядоченном порядком $\overline{\omega}$. Оптимальным решением будет здесь выбор альтернативы x_1. *Оптимальность выбора альтернативы* x_1 *по сравнению с выбором как альтернативы* x_2, *так и любой комбинации альтернатив* x_1 и x_2 (с заданными вероятностями) *проявляется в том, что при любом «очисливании» исходов, согласованном с* (45), *вероятностная мера* F_{x_2} *дает наибольшее математическое ожидание «полезности»*. Последнее обстоятельство наглядно пояснено рис. 67 (для каждого прямоугольника его высота равна численной оценке соответствующего исхода). В самом деле, математическое ожидание «полезности» при использовании альтернативы x_i равно суммарной площади прямоугольников, построенных на интервалах a, b, c, d, представляющих геометрически меру F_{x_i} $(i=1,2)$. Так как бо́льшему относительно ω исходу должна соответствовать бо́льшая величина «полезности», то прямоугольники, построенные для вероятностной меры F_{x_1}, будут иметь большую суммарную площадь, чем для вероятностной меры F_{x_2} («излишки» площади заштрихованы).

Пример 28. Рассмотрим еще одну задачу принятия решения в условиях риска, заданную таблицей функции реализации F (табл. 36) и той же диаграммой упорядоченного множества исходов (рис. 65).

Таблица 34

F	1/4	1/6	1/4	1/3
x_1	a	b	c	a
x_2	c	d	a	b

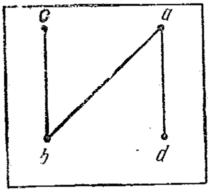


Рис. 65.

Таблица 35

	a	b	c	d
F_{x_1}	7/12	1/6	1/4	0
F_{x_2}	1/4	1/3	1/4	1/6

Для нахождения базиса подмножества $\{F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}\}$ надо отбросить те вероятностные меры, которые мажорируются выпуклой комбинацией оставшихся вероятностных мер. Условие мажорирования меры F_{x_1} сводится к существованию такого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, что

$$\lambda F_{x_2} + (1-\lambda) F_{x_3} \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} F_{x_1}. \tag{46}$$

Ввиду (42) условие (46) равносильно тому, что для любого подмножества A_k, мажорантно устойчивого в (A, ω), выполняется

$$\lambda F_{x_2}(A_k) + (1-\lambda) F_{x_3}(A_k) \geqslant F_{x_1}(A_k). \tag{47}$$

В нашем случае (см. рис. 65) мажорантно устойчивыми подмножествами будут $A_1=\{a, d\}$, $A_2=\{a, b, c\}$, $A_3=\{c\}$, $A_4=\{a\}$, $A_5=\{a, c\}$, $\varnothing$, A. Условие (47) для несобственных подмножеств $\varnothing$ и A выполняется автоматически при любом $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, поэтому получаем из (47) следующую систему линейных неравенств (относительно λ):

$$\begin{aligned}
&\lambda F_{x_2}(\{a, d\}) + (1-\lambda) F_{x_3}(\{a, d\}) \geqslant F_{x_1}(\{a, d\}),\\
&\lambda F_{x_2}(\{a, b, c\}) + (1-\lambda) F_{x_3}(\{a, b, c\}) \geqslant F_{x_1}(\{a, b, c\}),\\
&\lambda F_{x_2}(c) + (1-\lambda) F_{x_3}(c) \geqslant F_{x_1}(c),\\
&\lambda F_{x_2}(a) + (1-\lambda) F_{x_3}(a) \geqslant F_{x_1}(a),\\
&\lambda F_{x_2}(\{a, c\}) + (1-\lambda) F_{x_3}(\{a, c\}) \geqslant F_{x_1}(\{a, c\})
\end{aligned} \tag{48}$$

Таблица 36

	3/12	4/12	5/12
x_1	d	c	b
x_2	b	d	c
x_3	c	b	a

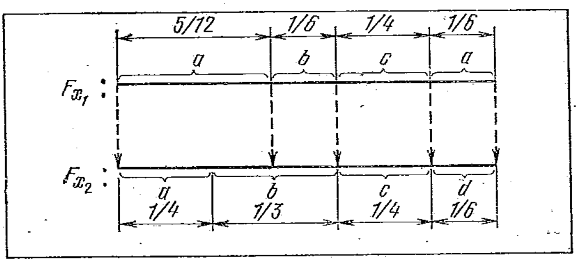


Рис. 66.

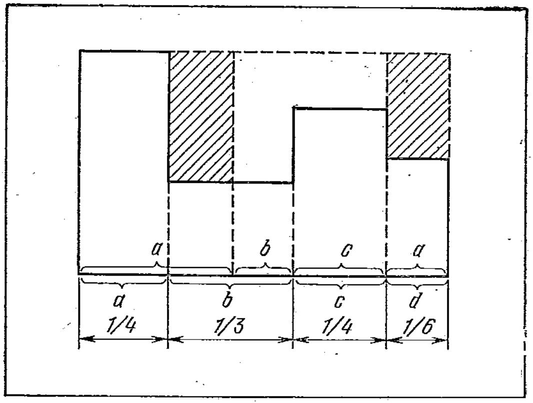


Рис. 67.

или

$$\frac{4}{12}\lambda+\frac{5}{12}(1-\lambda)\geqslant\frac{3}{12}\qquad 0\cdot\lambda+\frac{5}{12}(1-\lambda)\geqslant 0$$

$$\frac{8}{12}\lambda+(1-\lambda)\geqslant\frac{9}{12}\qquad \frac{5}{12}\lambda+\frac{8}{12}(1-\lambda)\geqslant\frac{4}{12}$$

$$\frac{5}{12}\lambda+\frac{3}{12}(1-\lambda)\geqslant\frac{4}{12}\qquad (49)$$

Решением системы (49) является $1/2\leqslant\lambda\leqslant 3/4$ (фактически нас интересует здесь не решение системы, а факт ее разрешимости). Отбрасывая теперь вероятностную меру F_{x_1} как мажорируемую выпуклой комбинацией вероятностных мер F_{x_2} и F_{x_3}, переходим к подмножеству $\{F_{x_2}, F_{x_3}\}$. Надо проверить, выполняется ли $F_{x_3}\overset{\overline{\omega}}{\geqslant}F_{x_2}$ или $F_{x_2}\overset{\overline{\omega}}{\geqslant}F_{x_3}$. Условие $F_{x_3}\overset{\overline{\omega}}{\geqslant}F_{x_2}$ не имеет места, так как для мажорантно устойчивого подмножества $\{c\}$ выполняется $F_{x_2}(c)=5/12>3/12=F_{x_3}(c)$; точно так же условие $F_{x_2}\overset{\overline{\omega}}{\geqslant}F_{x_3}$ не имеет места, так как для мажорантно устойчивого подмножества $\{a\}$ имеем $F_{x_3}(a)=5/12>0=F_{x_2}(a)$. Итак, $\{F_{x_2}, F_{x_3}\}$ — базис подмножества $\{F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}\}$, поэтому каждый максимальный элемент подмножества $\{F_p \mid p\in\mathscr{P}(X)\}$ имеет вид $\lambda F_{x_2}+(1-\lambda)F_{x_3}$.

Оказывается, что если базис состоит из двух элементов, то верно и обратное утверждение[1]: в этом случае каждая выпуклая комбинация вероятностных мер, принадлежащих базису, представляет собой максимальный элемент подмно-

[1] Для базиса, содержащего более двух элементов, формулируемое далее утверждение не имеет места.

жества $\{F_p \mid p \in \mathscr{P}(X)\}$. Действительно, пусть $\{F_{x_1}, F_{x_2}\}$ — базис подмножества $\{F_{x_1}, F_{x_2}, \ldots, F_{x_n}\}$. Покажем, что для любых $0 \leqslant \lambda_1 \neq \lambda_2 \leqslant 1$ вероятностные меры $\lambda_1 F_{x_1} + (1-\lambda_1) F_{x_2}$ и $\lambda_2 F_{x_1} + (1-\lambda_2) F_{x_2}$ несравнимы между собой относительно порядка $\overline{\omega}$. Предположим, например, что

$$\lambda_1 F_{x_1} + (1-\lambda_1) F_{x_2} \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} \lambda_2 F_{x_1} + (1-\lambda_2) F_{x_2}.$$

Тогда по условию (42) для каждого подмножества $A_k \subset A$, мажорантно устойчивого в (A, ω), справедливо

$$\lambda_1 F_{x_1}(A_k) + (1-\lambda_1) F_{x_2}(A_k) \geqslant \lambda_2 F_{x_1}(A_k) + (1-\lambda_2) F_{x_2}(A_k),$$

т. е.

$$(\lambda_1 - \lambda_2) F_{x_1}(A_k) \geqslant (\lambda_1 - \lambda_2) F_{x_2}(A_k).$$

Если $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, то для каждого мажорантно устойчивого подмножества A_k выполняется $F_{x_1}(A_k) \geqslant F_{x_2}(A_k)$; если $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, то для каждого мажорантно устойчивого подмножества A_k имеет место $F_{x_2}(A_k) \geqslant F_{x_1}(A_k)$. Согласно (42) получаем в первом случае $F_{x_1} \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} F_{x_2}$, во втором $F_{x_2} \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} F_{x_1}$. В любом случае вероятностные меры F_{x_1} и F_{x_2} оказываются сравнимыми в противоречие с тем, что $\{F_{x_1}, F_{x_2}\}$ базис.

Предположим теперь, что вероятностная мера $\lambda F_{x_1} + (1-\lambda) F_{x_2}$ не является максимальным элементом подмножества $\{F_p \mid p \in \mathscr{P}(X)\}$, тогда для некоторой вероятностной меры $p = (p, \ldots, p_n)$ на X должно выполняться $F_p \overset{\overline{\omega}}{>} \lambda F_{x_1} + (1-\lambda) F_{x_2}$; в свою очередь, согласно предложению 17 вероятностная мера $F_p = p_1 F_{x_1} + \ldots + p_n F_{x_n}$ мажорируется некоторой выпуклой комбинацией вероятностных мер вида $\lambda_1 F_{x_1} + (1-\lambda_1) F_{x_2}$.

Получаем

$$\lambda_1 F_{x_1} + (1-\lambda_1) F_{x_2} \overset{\overline{\omega}}{\geqslant} F_p \overset{\overline{\omega}}{>} \lambda F_{x_1} + (1-\lambda) F_{x_2},$$

что противоречит доказанному выше свойству несравнимости любых двух вероятностных мер, являющихся выпуклыми комбинациями F_{x_1} и F_{x_2}.

Возвращаясь к примеру 28, получаем, что здесь в качестве оптимального решения выступает любая вероятностная мера, сосредоточенная на альтернативах x_2 и x_3. Как объяснить этот результат? Из содержательных соображений ясно, что, не имея информации о соотношении между собой исходов c и a, нельзя сделать никакого выбора в пользу одной из альтернатив x_2 или x_3. Действительно, если мы выберем, например, x_2, а в дальнейшем окажется, что исход a имеет значительно бóльшую «полезность», чем исход c, то наш выбор не оправдан; точно так же будет не оправдан и выбор альтернативы x_3, если окажется, что исход c имеет значительно бóльшую полезность, чем исход a. Таким образом, мы не можем выбрасывать из поля зрения ни альтернативу x_2, ни альтернативу x_3; при однократном принятии решения остается выбирать одну из них с некоторой вероятностью. Но мы показали большее: обладая информацией о предпочтениях исходов только в виде диаграммы на рис. 65, мы не можем среди случайных выборов альтернатив x_2 и x_3 отдать предпочтение одному случайному выбору перед другим. Действительно, согласно теореме 6, для любого числа $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ можно подобрать такое «очисливание» исходов a, b, c, d, чтобы вероятностная мера, для которой альтернатива x_2 выбирается с вероятностью λ, а альтернатива x_3 с вероятностью $1-\lambda$, давала наибольшее математическое ожидание «полезности».

19. ИГРЫ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Игра, в которой предпочтения игроков заданы в виде отношений порядка на множестве исходов, называется **игрой с упорядоченными исходами**. Скажем, игра с упорядоченными исходами двух игроков может быть задана с помощью таблицы вида табл. 37 (таблицы функции реализации F), в которой $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество стратегий игрока 1, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество стратегий игрока 2, множества исходов A (эти множества предполагаются здесь конечными) и двух диаграмм отношений порядка ω_1 и ω_2 на множестве A, выражающих предпочтения игроков 1 и 2, соответственно. Напомним общую схему игры: если игрок 1 выбрал стратегию x_i, а игрок 2 — стратегию y_j (игроки выбирают свои стратегии независимо друг от друга), то складывается ситуация (x_i, y_j), приводящая к исходу $F(x_i, y_j) \in A$. Как мы видели в § 6, для теоретико-игровых моделей в качестве естественного принципа оптимальности вводится принцип равновесия, основанный на идее устойчивости. Для описанной выше игры с упорядоченными исходами этот принцип приводит к следующему определению. Ситуация (x_{i_0}, y_{j_0}) называется **ситуацией равновесия**, если для любых $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$ выполняется

$$F(x_i, y_{j_0}) \overset{\omega_1}{\not>} F(x_{i_0}, y_{j_0}); \quad F(x_{i_0}, y_j) \overset{\omega_2}{\not>} F(x_{i_0}, y_{j_0}). \tag{50}$$

В ситуации равновесия ни один из игроков не имеет оснований для одностороннего отклонения от своей стратегии, так как при таком отклонении не получится лучшего (с точки зрения предпочтений отклонившегося игрока) исхода. Если исходы, получающиеся при одностороннем отклонении игрока 1 от ситуации равновесия, сравнимы относительно предпочтений игрока 1 с исходом в ситуации равновесия, а исходы, получающиеся при одностороннем отклонении игрока 2 от ситуации равновесия, сравнимы относительно предпочтений игрока 2 с исходом в ситуации равновесия,

Таблица 37

F	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	$F(x_1, y_1)$	...	$F(x_1, y_j)$	...	$F(x_1, y_m)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$F(x_i, y_1)$	...	$F(x_i, y_j)$	...	$F(x_i, y_m)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_n	$F(x_n, y_1)$	...	$F(x_n, y_j)$	...	$F(x_n, y_m)$

то такая ситуация равновесия называется **особой**. Так как для сравнимых элементов в упорядоченном множестве условие $a_1 \not> a_2$ равнозначно условию $a_1 \leqslant a_2$, то особая ситуация равновесия (x_{i_0}, y_{j_0}) может быть охарактеризована следующим образом:

$$F(x_i, y_{j_0}) \overset{\omega_1}{\leqslant} F(x_{i_0}, y_{j_0}); \; F(x_{i_0}, y_j) \overset{\omega_2}{\leqslant} F(x_{i_0}, y_{j_0}). \tag{51}$$

В частности, если отношения порядка ω_1 и ω_2 линейны, то любая ситуация равновесия будет особой. Для игры с упорядоченными исходами, заданной с помощью таблицы ее функции реализации и диаграмм отношений порядка ω_1 и ω_2, имеется простое правило для нахождения ситуаций равновесия: *ситуация (x_i, y_j) будет ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда элемент $F(x_i, y_j)$ является одновременно максимальным в своем столбце относительно порядка ω_1 и максимальным в своей строке относительно порядка* ω_2; для характеризации особой ситуации равновесия надо в приведенном выше правиле заменить «максимальный» на «наибольший». Конечно, игра с упорядоченными исходами может не иметь ни особой, ни обычной ситуации равновесия; приведение соответствующих примеров предоставляется читателю. Рассмотрим теперь один содержательный пример игры двух игроков с упорядоченными исходами.

Пример 29. (совместное обеспечение строительства). Двум организациям поручено совместное строительство объекта, на которое они должны выделить денежные средства и рабочую силу. Первая организация может выделить 2, 3 или 4 единицы денежных средств и 2 или 3 единицы рабочей силы; вторая — 4, 5 или 6 единиц денежных средств и 1 или 2 единицы рабочей силы. Качество строительства определяется обеспеченностью его денежными средствами и рабочей силой, причем для достижения хорошего качества требуется не менее 9 единиц денежных средств и не менее 5 единиц рабочей силы; для достижения удовлетворительного качества требуется не менее 7 единиц денежных средств и не менее 4 единиц рабочей силы; во всех остальных случаях качество строительства будет плохим. Интересы сторон (т. е. первой и второй организации) таковы. Первая организация заинтересована лишь в том, чтобы качество строительства не было плохим, оценивая его в 0 баллов, а удовлетворительное и хорошее качество она оценивает в 1 балл. Вторая организация заинтересована в улучшении качества строительства, оценивая плохое качество в 0 баллов, удовлетворительное — в 1 балл и хорошее — в 2 балла. Кроме того, каждая организация заинтересована в минимизации затрат *своих* денежных средств и *своей* рабочей силы, оценивая свои наивысшие затраты в 0 баллов, а каждую нижеследующую ступень своих затрат баллом на единицу выше. (Здесь имеется довольно сложное переплетение интересов сторон: обе стороны стремятся избежать плохого качества строительства — в этом единство их интересов, но при этом каждая сторона заинтересована в экономии своих затрат за счет другой стороны. Кроме того, вторая организация имеет «свой особый интерес» — достижение хорошего качества строительства, к чему первая организация безразлична.)

Альтернативы каждой организации можно представить в виде пар, первая компонента которых — число выделенных ею единиц денежных средств, вторая — число выделенных ею единиц рабочей силы. Каждая ситуация, складывающаяся при выборе обеими организациями своих альтернатив, может быть оценена ими по трем показателям: 1) оценка (субъективная) качества строительства, 2) оценка затрат денежных средств, 3) оценка затрат рабочей силы (см. табл. 38; для каждой ситуации ее оценка первой организацией приведена в верхней половине соответствующей клетки, а второй — в нижней половине). Получаем в итоге игру двух игроков (в качестве которых выступают первая и вторая организации); табл. 38 является таблицей функции реализации, а множество всех ситуаций (выступающих здесь в качестве исходов игры) упорядочивается каждым из игроков абсолютным предпочтением для векторного критерия.

Как найти равновесные ситуации этой игры с упорядоченными исходами? Среди всех оценок, стоящих в верхних половинах клеток табл. 38, отметим (прямоугольная рамка) те из них, которые являются максимальными элементами в своих столбцах относительно абсолютного предпочтения для векторого критерия. Они соответствуют ситуациям, которые являются не улучшаемыми сразу по трем введенным показателям первой организацией за счет одностороннего изменения своей стратегии. Аналогично среди всех оценок, стоящих в нижних половинах клеток табл. 38, отметим те, которые являются максимальными элементами в своих строках, — они соответствуют ситуациям, не улучшаемым второй организацией за счет одностороннего изменения своей стратегии. Тогда те клетки, в которых оказались отмеченными и верхняя, и нижняя половины, будут соответствовать ситуациям, которые являются не улучшаемыми сразу по трем показателям и для первой, и для второй организации, т. е. ситуациям равновесия; видим, что оказалось пять таких ситуаций: ((2,2), (4,1)), ((2,2), (5,2)), ((3,2), (4.2)), ((2,3), (5,1)), ((3,3), (4.1)). Ситуация ((2,2), (4.1)) является для обеих сторон самой выгодной по затратам, хотя она приводит к плохому качеству строительства; остальные четыре ситуации равновесия характеризуются тем, что они соответствуют минимальным суммарным затратам обеих организаций, приводящим к удовлетворительному качеству строительства. Отметим, что здесь всякая ситуация, приводящая к хорошему качеству строительства, неустойчива; это и понятно, так как в такой ситуации первая организация (которая хорошее и удовлетворительное качество оценивает одинаково) может снизить свои затраты денежных средств и рабочей силы до такого уровня, который приведет к удовлетворительному качеству, и с помощью такой «односторонней акции» получит лучшую для себя ситуацию.

Займемся теперь вопросом нахождения ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами. Для конечной игры неболь-

Таблица 38

	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(2,2)	$\boxed{(0, 2, 1)}$	$\boxed{(0, 2, 1)}$	$\boxed{(0, 2, 1)}$	$\boxed{(0, 2, 1)}$	$\boxed{(1, 2, 1)}$	$\boxed{(1, 2, 1)}$
	$\boxed{(0, 2, 1)}$	(0, 1, 1)	(0, 0, 1)	(0, 2, 0)	$\boxed{(1, 1, 0)}$	(1, 0, 0)
(3,2)	(0, 1, 1)	(0, 1, 1)	(0, 1, 1)	$\boxed{(1, 1, 1)}$	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)
	$\boxed{(0, 2, 1)}$	(0, 1, 1)	(0, 0, 1)	$\boxed{(1, 2, 0)}$	(1, 1, 0)	(1, 0, 0)
(4,2)	(0, 0, 1)	(0, 0, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(1, 0, 1)	(1, 0, 1)
	$\boxed{(0, 2, 1)}$	(0, 1, 1)	(0, 0, 1)	$\boxed{(1, 2, 0)}$	(1, 1, 0)	(1, 0, 0)
(2,3)	(0, 2, 0)	$\boxed{(1, 2, 0)}$	$\boxed{(1, 2, 0)}$	(0, 2, 0)	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)
	$\boxed{(0, 2, 1)}$	$\boxed{(1, 1, 1)}$	(1, 0, 1)	(0, 2, 0)	(1, 1, 0)	(1, 0, 0)
(3,3)	$\boxed{(1, 1, 0)}$	(1, 1, 0)	(1, 1, 0)	(1, 1, 0)	(1, 1, 0)	(1, 1, 0)
	$\boxed{(1, 2, 1)}$	(1, 1, 1)	(1, 0, 1)	(1, 2, 0)	(1, 1, 0)	$\boxed{(2, 0, 0)}$
(4,3)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)
	$\boxed{(1, 2, 1)}$	(1, 1, 1)	(1, 0, 1)	(1, 2, 0)	$\boxed{(2, 1, 0)}$	(2, 0, 0)

шой размерности равновесные ситуации можно найти (разумеется, если таковые имеются) непосредственно по таблице ее функции реализации и диаграммам отношений порядка игроков (как в изложенном выше примере). Однако в более сложных случаях (в частности, для игр с бесконечным множеством ситуаций) такой способ не приемлем. Здесь мы рассмотрим один важный метод сведéния задачи нахождения ситуаций равновесия игры с упорядоченными исходами к той же задаче для более простой игры с упорядоченными исходами. Этот метод связан с понятием гомоморфизма игр с упорядоченными исходами, которое вводится так.

Каждая игра двух игроков с упорядоченными исходами может быть задана в виде следующей шестерки объектов:

$$G=\langle X, Y, A, \omega_1, \omega_2, F\rangle, \qquad (52)$$

где X — множество стратегий игрока 1; Y — множество стратегий игрока 2; A — множество исходов; ω_1 и ω_2 — отношения порядка на A, выражающие предпочтения игроков 1 и 2; F — функция реализации (функция реализации сопоставляет каждой ситуации игры

11*

определяемый ею исход; формально F есть отображение $X \times Y$ в A).

Пусть теперь, кроме игры G, имеется еще одна игра с упорядоченными исходами тех же игроков

$G^1 = \langle X^1, Y^1, A^1, \omega^1_1, \omega_2^1, F^1 \rangle$

и заданы отображения множеств стратегий игроков из игры G в игру G^1: $\varphi: X \to X^1$, $\psi: Y \to Y^1$. Будем говорить, что пара отображений (φ, ψ) является **гомоморфизмом** игры G в игру G^1, если для любых двух ситуаций (x, y), (x', y') игры G выполняется для $k=1, 2$

$$F(x, y) \overset{\omega_k}{\geqslant} F(x', y') \Rightarrow F^1(\varphi(x), \psi(y)) \overset{\omega^1_k}{\geqslant} F^1(\varphi(x'), \psi(y')). \tag{53}$$

Условие (53) означает, что если в игре G k-й игрок предпочитает одну ситуацию другой, то это предпочтение «перейдет» у него на образы этих ситуаций в игру G^1. Если φ является отображением на множество X^1, а ψ — отображением на множество Y^1, то будем говорить, что (φ, ψ) есть гомоморфизм игры G на игру G^1; если выполняется условие

$$F(x, y) \overset{\omega_k}{>} F(x', y') \Rightarrow F^1(\varphi(x), \psi(y)) \overset{\omega^1_k}{>} F^1(\varphi(x'), \psi(y')), \tag{54}$$

то гомоморфизм называется **строгим**; если для гомоморфизма (φ, ψ) выполнена импликация

$$F^1(\varphi(x), \psi(y)) \overset{\omega^1_k}{>} F^1(\varphi(x'), \psi(y')) \Rightarrow F(x, y) \overset{\omega_k}{>} F(x', y'), \tag{55}$$

то такой гомоморфизм называется **сильным**.

Непосредственно проверяется, что между ситуациями равновесия игр, находящихся в отношении гомоморфности, существует связь, выражаемая следующим образом.

Предложение 18.

1. *Если (φ, ψ) — гомоморфизм игры G на игру G^1, то образ всякой особой ситуации равновесия игры G является особой ситуацией равновесия игры G^1.*

2. *Если (φ, ψ) — строгий гомоморфизм игры G в игру G^1, то прообраз всякой ситуации равновесия игры G^1 есть ситуация равновесия игры G.*

3. *Если (φ, ψ) — сильный гомоморфизм игры G на игру G^1, то образ всякой ситуации равновесия игры G есть ситуация равновесия игры G^1.*

Утверждения 1 и 3, гарантирующие «переход» равновесных ситуаций игры на ее гомоморфный образ, можно использовать при поиске ситуаций равновесия игры G для сужения области поиска; утверждение 2 позволяет «перенести» ситуации равновесия в игру G из ее гомоморфного образа. Правда, чтобы воспользоваться этим приемом, надо построить для заданной игры G новую игру G^1, на которую из нее существует гомоморфизм. Отсюда понятно, что весьма важной является задача описания для игры с упорядоченными исходами всех ее гомоморфных образов; оказывается, что решение этой задачи тесно связано с построением на множестве исходов игры стабильных отношений эквивалентности (см. § 15), удовлетворяющих некоторым условиям, и состоит в следующем.

Пусть G — игра с упорядоченными исходами вида (52). Возьмем произвольные отношения эквивалентности на множествах стратегий игроков: ε_1 — эквивалентность на X, ε_2 — эквивалентность на Y. Пара отношений эквивалентности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ определяет следующее отношение неразличимости ξ на множестве исходов игры: два исхода неразличимы тогда и только тогда, когда они являются реализациями ситуаций, k-е компоненты которых при $k=1, 2$ находятся в отношении эквивалентности ε_k. Формально условие $(a_1, a_2) \in \xi$ означает, что $a_1 = F(x_1, y_1)$, $a_2 = F(x_2, y_2)$, причем $x_1 \overset{\varepsilon_1}{\equiv} x_2$, $y_1 \overset{\varepsilon_2}{\equiv} y_2$. Вообще, отношение неразличимости ξ может не быть отношением эквивалентности (но всегда является отношением толерантности).

Пусть ε — любая эквивалентность на множестве исходов A, которая содержит отношение неразличимости ξ и является стабильной относительно порядков ω_1 и ω_2. Построим теперь игру G^* игроков 1 и 2 следующим образом. Множеством стратегий игрока 1 в игре G^* является фактор-множество $X/_{\varepsilon_1}$; множеством стратегий игрока 2 — фактор-множеств $Y/_{\varepsilon_2}$, множеством исходов—фактор-множество $A/_{\varepsilon}$; отношение порядка, выражающее предпочтения игрока $k=1, 2$ в игре G^*, есть $\widehat{|\omega_k/_{\varepsilon}|}$. (Напомним, что $\widehat{|\omega_k/_{\varepsilon}|}$ представляет собой отношение достижимости, построенное для фактор-отношения $\omega_k/_{\varepsilon}$; так как эквивалентность ε стабильна в упорядоченном множестве (A, ω_k), то фактор-отношение $\omega_k/_{\varepsilon}$ удовлетворяет условию отсутствия контуров и по предложению 7 отношение $\widehat{|\omega_k/_{\varepsilon}|}$ будет отношением порядка на $A/_{\varepsilon}$.) Наконец, функция реализации F^* для игры G^* определяется так. Пусть $C = (C_1, C_2)$, где $C_1 \in X/_{\varepsilon_1}$, $C_2 \in Y/_{\varepsilon_2}$. Выберем произвольно из классов C_1 и C_2 — по элементу: $x \in C_1$ $y \in C_2$ и положим $F^*(C_1, C_2)$ — тот класс эквивалентности ε, куда попадает исход $F(x, y)$, (Приведенное определение функции F^* корректно, так как оно не зависит от выбора „представителей“ из классов C_1 и C_2. В самом деле, если $x' \in C_1$, $y' \in C_2$ — другие „представители“ этих классов, то выполняется $x' \overset{\varepsilon_1}{\equiv} x$ и $y' \overset{\varepsilon_2}{\equiv} y$, значит, $(F(x, y), F(x', y')) \in \xi$, а так как $\xi \subset \varepsilon$, то $F(x', y') \overset{\varepsilon}{\equiv} F(x, y)$. Получаем, что исход $F(x', y')$ попадает в тот же класс эквивалентности ε, что и исход $F(x, y)$.) Построенную игру назовем **факторизацией** игры G, короче, **фактор-игрой**. Обозначим через φ_{ε_1} отображение, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет содержащий его класс эквивалентности ε_1, ψ_{ε_2} — отображение, которое каждому элементу $y \in Y$ сопоставляет содержащий его класс эквивалентности ε_2. Справедливо

Предложение 19.

1. *Пара отображений* $(\varphi_{\varepsilon_1}, \psi_{\varepsilon_2})$ *является гомоморфизмом игры G на фактор-игру G^** (этот гомоморфизм будем в дальнейшем называть **каноническим**).

2. *Если все классы эквивалентности ε дискретны относительно порядков* ω_1 и ω_2, *то канонический гомоморфизм будет строгим.*

3. *Если эквивалентность ε сильно стабильна относительно порядков* ω_1 и ω_2, *то канонический гомоморфизм будет сильным.*

(Имеет место также следующее важное обстоятельство: оказывается, что каждая игра, являющаяся гомоморфным образом игры G, может быть получена — с точностью до изоморфизма — с помощью факторизации игры G, а также доупорядочений в фактор-игре отношений порядка игроков. Доказательство этого факта, а также предложения 19 получается на основе теорем 3—5, доказанных в § 15.)

Итак, для построения факторизации игры G вида (52) надо:

а) задать для каждого игрока $k=1, 2$ какое-нибудь отношение эквивалентности ε_k на множестве его стратегий;

б) построить определяемое парой $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ отношение неразличимости ξ на множестве исходов игры;

в) взять любое отношение эквивалентности ε на множестве исходов игры, содержащее отношение неразличимости ξ и являющееся стабильным относительно порядков ω_1 и ω_2;

г) профакторизовать множества стратегий игроков по эквивалентностям ε_1 и ε_2 соответственно, а множество исходов игры — по эквивалентности ε;

д) задать отношения порядка игроков в виде отношений достижимости для фактор-отношений $\omega_1/_\varepsilon$ и $\omega_2/_\varepsilon$ и определить функцию реализации F^*, как указано выше (стр. 157).

Если требуется построить фактор-игру, удовлетворяющую дополнительному условию, связанному со свойством канонического гомоморфизма игры на фактор-игру, то технически удобнее построение факторизации начать с построения эквивалентности ε на множестве исходов. Например, если мы хотим получить такую фактор-игру, для которой канонический гомоморфизм игры на фактор-игру был бы строгим, то надо вначале построить такое отношение эквивалентности ε на множестве A, чтобы, во-первых, ε было стабильном относительно порядков ω_k и, во-вторых, чтобы каждый класс эквивалентности ε был дискретным подмножеством в упорядоченном множестве (A, ω_k) для $k=1, 2$. Далее надо подобрать такие эквивалентности ε_1 на X и ε_2 на Y, чтобы определяемое парой $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ отношение неразличимости включалось в отношение ε (такие эквиваленты всегда имеются, поскольку, можно в качестве ε_1 и ε_2 взять тождественные отношения).

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров построения факторизаций игр с упорядоченными исходами, проводимых для нахождения их ситуаций равновесия.

Пример 30. Пусть дана игра с упорядоченными исходами, в которой $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ — множество стратегий игрока 1, $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ — множество стратегий игрока 2, $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n\}$ — множество исходов, функция реализации задана табл. 39, отношение порядка ω_1, выражающее предпочтения игрока 1, задано диаграммой рис. 68, отношение порядка ω_2 есть обратное отношение: $\omega_2=\omega_1^{-1}$(последнее условие означает, что игра является антагонистической). Как мы знаем из § 15, п. 2, отображение h, которое каждому элементу упорядоченного множества сопоставляет его высоту, является строго изотонным, значит, эквивалентность ε по этому отображению стабильна и ее классы являются дискретными подмножествами (на рис. 68 классы эквивалентности ε обведены замкнутой линией).

Подберем теперь эквивалентность ε_1 на X и эквивалентность ε_2 на Y так, чтобы определяемое парой $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ отношение неразличимости включалось бы в отношение ε; в данном случае это условие сводится к тому, что любые два

Таблица 39

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	a	b	f	f	n
x_2	b	a	f	g	m
x_3	a	a	g	h	m
x_4	k	l	f	f	k
x_5	l	l	g	h	k
x_6	m	n	c	d	g

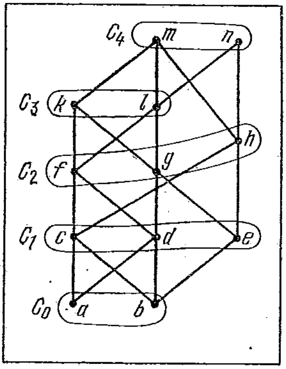


Рис. 68.

Таблица 40

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	C_0	C_2	C_4
X_2	C_3	C_2	C_3
X_3	C_4	C_1	C_2

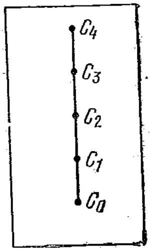


Рис. 69.

исхода, являющиеся реализациями ситуаций, у которых первые компоненты эквивалентны относительно ε_1, а вторые — относительно ε_2, имели бы одинаковую высоту. Например, в качестве ε_1 можно взять эквивалентность, определяемую классами $X_1=\{x_1, x_2, x_3\}$, $X_2=\{x_4, x_5\}$, $X_3=\{x_6\}$, а в качестве ε_2 — эквивалентность, определяемую классами $Y_1=\{y_1, y_2\}$, $Y_2=\{y_3, y_4\}$, $Y_3=\{y_5\}$. В результате получаем фактор-игру, таблица функции реализации которой представлена табл. 40, а диаграмма отношений порядка — на рис. 69. Согласно предложению 19(2), канонический гомоморфизм игры на фактор-игру будет строгим. В фактор-игре ситуация (X_2, Y_2) — единственная ситуация равновесия; по предложению 18(2) ситуации (x_4, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_3), (x_5, y_4), составляющие ее прообраз, будут ситуациями равновесия в первоначальной игре.

Приведем еще пример построения сильного гомоморфизма игры на фактор-игру.

Пример 31 (совместный выбор проекта). Две стороны A и B должны совместно выбрать один вариант проекта из имеющихся восьми вариантов a, b, c, d, e, f, g, h (скажем, сторонами могут быть два государства, заключающих договор; две спортивные команды, выбирающие формулу состязаний; заказчик и подрядчик и т. п.). Выбор варианта проводится в два этапа: на первом этапе каждая сторона независимо от другой выдвигает свой вариант из указанного выше списка; на втором этапе из двух представленных вариантов выбирается

Таблица 41

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	c	d	a	a	a	a
b	a	b	c	d	b	b	b	b
c	c	c	c	d	e	f	g	h
d	d	d	d	d	e	f	g	h
e	a	b	e	e	e	f	g	e
f	a	b	f	f	f	f	f	h
g	a	b	g	g	g	f	g	g
h	a	b	h	h	e	h	g	h

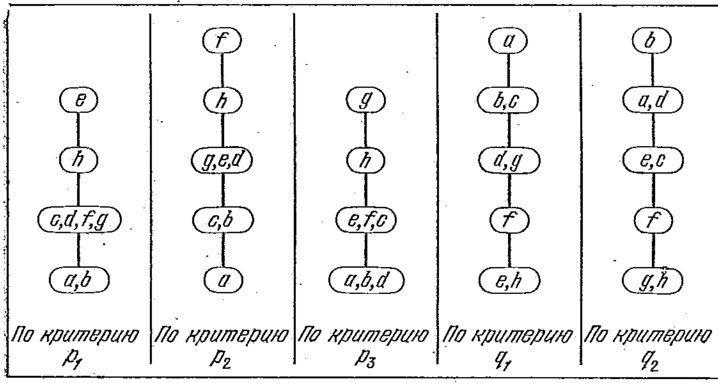


Рис. 70

один. Предполагается, что на втором этапе выбор варианта производится некоторым механизмом, на действие которого стороны A и B не могут оказать никакого влияния, однако каждая сторона, после того как узнает результат выбора на втором этапе, имеет право отказаться от первоначально выбранного ею варианта и заменить его другим. Предположим, что стороны оценивают варианты проекта по некоторым критериям: сторона A — по критериям p_1, p_2, p_3, сторона B — по критериям q_1 и q_2, причем результаты оценок вариантов по каждому из этих критериев представлены в форме ранжирований на рис. 70 (замкнутой линией обведены варианты, являющиеся равноценными по данному критерию). Пусть задана таблица, которая показывает механизм выбора варианта на втором этапе (табл. 41). Поставим вопрос: какие варианты будут реализуемыми при таком способе выбора?

Так как каждая сторона обладает „правом вето", осуществляемым отказом от первоначально выбранного варианта и заменой его другим, то реализуемым может быть не всякий вариант. Например, вариант f не реализуем, так как во всякой строке табл. 41, где стоит f, есть также один из вариантов a, b, c, d, любой из которых лучше, чем f по обоим критериям q_1 и q_2 стороны B (см. рис. 70). Поэтому, если на втором этапе «пройдет» вариант f, сторона B откажется от своего первоначального выбора, заменив его таким, который приводит к одному из вариантов a, b, c, d.

Рассмотрим теперь описанную задачу как игру игроков A и B, для которой табл. 41 является таблицей функции реализации, в качестве предпочтений игроков на множестве исходов $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ взяты абсолютные предпочтения для векторного критерия (компонентами векторного критерия для игрока A являются p_1, p_2, p_3, а для игрока B — q_1 и q_2; на рис. 71 даны диаграммы отношений порядка ω_1 и ω_2, выражающих предпочтения игроков A и B). Естественно считать, что каждая из сторон будет использовать свое «право вето» в том случае, когда она может, заменив первоначально выбранный ею вариант другим, получить в качестве итогового такой вариант, который не хуже полученного ранее по

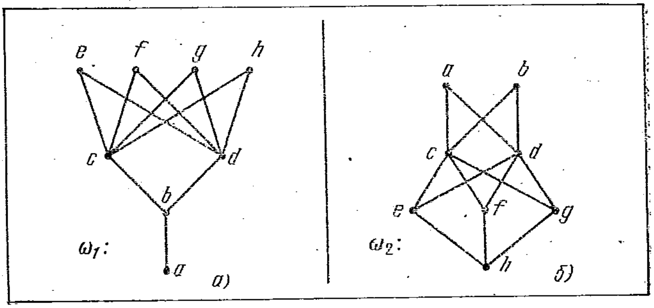


Рис. 71.

всем показателям, входящим в ее векторный критерий. Таким образом, всякий реализуемый вариант должен быть исходом в ситуации равновесия в построенной игре.

Найдем ситуации равновесия этой игры с упорядоченными исходами с помощью метода факторизации. Непосредственно проверяется, что отношение эквивалентности ε, определяемое классами $C_1=\{a, b\}$, $C_2=\{c, d\}$, $C_3=\{e, f, g, h\}$, является сильно стабильным относительно порядков ω_1 и ω_2; кроме того, оно содержит отношение неразличимости, соответствующее разбиению стратегий игроков на классы C_1, C_2, C_3. Поэтому можно построить фактор-игру (таблица ее функции реализации и диаграммы отношений порядка игроков приведены ниже, табл. 42, рис. 72), причем согласно предложению 19(3), канонический гомоморфизм игры на фактор-игру будет сильным. В фактор-игре имеется единственная ситуация равновесия (C_2, C_1); по предложению 18(3), ситуации равновесия первоначальной игры могут быть только в прообразе ситуации (C_2, C_1), т. е. среди ситуаций (c, a), (c, b), (d, a), (d, b). Непосредственной проверкой убеждаемся, что все они являются ситуациями равновесия.

Итак, в приведенной схеме выбора вариантов реализуемыми вариантами могут быть только c и d; сторона A должна выбрать один из вариантов c или d, а сторона B — один из вариантов a

Таблица 42

	C_1	C_2	C_3
C_1	C_1	C_2	C_1
C_2	C_2	C_2	C_3
C_3	C_1	C_3	C_3

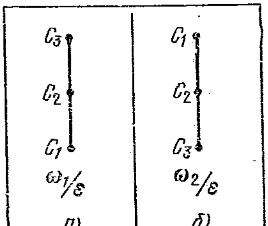


Рис. 72.

или b. Все остальные совместные выборы неустойчивы, так как они будут «разрушаться» одной из сторон.

Остановимся вкратце на вопросе *существования* ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами. В общем случае даже в игре, в которой предпочтения игроков заданы их функциями выигрыша, может не существовать ситуаций равновесия, однако, как мы видели в конце § 6, всегда существуют ситуации равновесия в смешанном расширении такой игры. Аналогично обстоит дело и для игр, в которых предпочтения игроков заданы отношениями порядка. Смешанное расширение игры с упорядоченными исходами определяется следующим образом. Рассмотрим игру G с упорядоченными исходами вида (52). В смешанном расширении игры G множествами стратегий игроков 1 и 2 являются множества вероятностных мер на X и на Y соответственно. Предположим, что игрок 1 выбрал вероятностную меру $p \in \mathscr{P}(X)$, а игрок 2 — вероятностную меру $q \in \mathscr{P}(Y)$. Если игроки производят свой выбор независимо, то вероятность выбора ситуации (x, y) равна произведению $p(x) \cdot q(y)$. Так как разные ситуации могут привести к одному исходу и разные ситуации несовместны, то для определения вероятности наступления $a \in A$ надо просуммировать вероятности всех ситуаций, ведущих к исходу a; таким образом, обозначая через $F_{pq}(a)$ вероятность наступления исхода a при выборе игроками 1 и 2 смешанных стратегий p и q, получаем

$$F_{pq}(a) = \sum_{F(x, y) = a} p(x) \cdot q(y). \tag{56}$$

Итак, задание вероятностных мер на множествах стратегий игроков определяет вероятностную меру на множестве исходов игры. Далее, так как отношения порядка ω_1 и ω_2, выражающие предпочтения игроков 1 и 2 на множестве исходов A, можно продолжить с множества A на множество $\mathscr{P}(A)$ вероятностных мер на A (способом, изложенным в § 18, п. 1), то мы приходим к игре с упорядоченными исходами

$$\bar{G} = \langle \mathscr{P}(X),\ \mathscr{P}(Y),\ \mathscr{P}(A),\ \bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2,\ \bar{F} \rangle,$$

где $\mathscr{P}(X)$ — множество вероятностных мер на X; $\mathscr{P}(Y)$ — множество вероятностных мер на Y; $\mathscr{P}(A)$ — множество вероятностных мер на A; $\bar{\omega}_1$ — продолжение порядка ω_1 на $\mathscr{P}(A)$; $\bar{\omega}_2$ — продолжение порядка ω_2 на $\mathscr{P}(A)$; $\bar{F}$ — отображение, которое каждой паре вероятностных мер $(p, q) \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$ ставит в соответствие вероятностную меру $F_{pq} \in \mathscr{P}(A)$, определяемую равенством (56).

Игра $\bar{G}$ называется смешанным расширением игры G. Оказывается, что *для любой игры с упорядоченными исходами существуют ситуации равновесия в ее смешанном расширении*. Далее, множество всех ситуаций равновесия игры $\bar{G}$ можно описать следующим образом. Предположим, что в игре G каждый из игроков произвел «очисливание» исходов в соответствии со своим предпочтением. Формально такое «очисливание» задается введением строго изотонных отображений $h_1, h_2 : A \to R$

$$a_1 \overset{\omega_1}{>} a_2 \Rightarrow h_1(a_1) > h_1(a_2); \qquad a_1 \overset{\omega_2}{>} a_2 \Rightarrow h_2(a_1) > h_2(a_2).$$

Построим теперь на базе игры G игру $G_{(h_1, h_2)}$, в которой выигрыш игрока в ситуации (x, y) равен результату «очисливания» им соответствующего исхода:

$$G_{(h_1, h_2)} = \langle X, Y, F \cdot h_1, F \cdot h_2 \rangle.$$

Таким образом, в игре $G_{(h_1, h_2)}$ те же самые множества стратегий игроков, что и в игре G, но она является игрой с функциями выигрыша игроков. В смешанном расширении игры $G_{(h_1, h_2)}$ по теореме Нэша (см. конец § 6) существуют ситуации равновесия; автором показано, что *всякая ситуация равновесия в смешанном расширении игры* $G_{(h_1, h_2)}$ *является ситуацией равновесия игры* $\overline{G}$ *и, обратно, для каждой ситуации равновесия* (p, q) *игры* $\overline{G}$ *можно так подобрать „очисливания"* h_1 *и* h_2, *что* (p, q) *окажется ситуацией равновесия в смешанном расширении игры* $G_{(h_1, h_2)}$.

Далее, описанный в этом параграфе аппарат факторизации игр можно использовать не только для нахождения ситуаций равновесия игры G, но и для ее смешанного расширения; эта возможность основана на следующем обстоятельстве. Заметим вначале, что если, вообще, U и V — два конечных множества и задано отображение $f: U \to V$, то каждая вероятностная мера μ на U определяет вероятностную меру μ_f на V следующим образом: для любого $v \in V$ значение функции $\mu_f(v)$ есть сумма значений $\mu(u)$ по тем $u \in U$, которые отображаются в v, т. е.

$$\mu_f(v) = \sum_{f(u)=v} \mu(u).$$

Таким образом, отображение $f: U \to V$ продолжается до отображения $\tilde{f}: \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$, где $\tilde{f}(\mu) = \mu_f$.

Пусть теперь имеются две игры с упорядоченными исходами

$G = \langle X, Y, A, \omega_1, \omega_2, F \rangle$, $G^1 = \langle X^1, Y^1, A^1, \omega^1_1, \omega^1_2, F^1 \rangle$.

Оказывается, что если (φ, ψ) — гомоморфизм игры G в игру G^1, то $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ — продолжения отображений φ и ψ на множества вероятностных мер, является гомоморфизмом игры $\overline{G}$ в игру $\overline{G}^1$; при этом, если гомоморфизм (φ, ψ) является строгим, то строгим будет и гомоморфизм $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$. Этот факт совместно с предложением 18 приводит к следующему результату.

Теорема 7.

1. *Если* (φ, ψ) — *гомоморфизм игры* G *на игру* G^1 *и* (p, q) — *особая ситуация равновесия в смешанном расширении игры* G, *то* (p_φ, q_ψ) — *особая ситуация равновесия в смешанном расширении игры* G^1.

2. *Если* (φ, ψ) — *строгий гомоморфизм игры* G *в игру* G^1 *и* (p_φ, q_ψ) — *ситуация равновесия в смешанном расширении игры* G^1, *то ее прообраз* (p, q) — *ситуация равновесия в смешанном расширении игры* G.

Таким образом, теорема 7 позволяет использовать метод построения гомоморфного образа игры с упорядоченными исходами, изложенный в этом параграфе, для нахождения ситуаций равновесия в ее смешанном расширении. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 32. Рассмотрим игру с упорядоченными исходами, функция реализации которой задана табл. 43, отношение порядка ω, выражающее предпочтения игрока 1, — диаграммой на рис. 73, а отношение порядка, выражающее предпочтения игрока 2, есть обратное отношение порядка ω^{-1}. В этой игре отсутствуют ситуации равновесия в чистых стратегиях. Попробуем найти для нее ситуации равновесия в смешанных стратегиях, используя метод факторизации. Пусть ε_1 — отношение эквивалентности на множестве стратегий игрока 1, определяемое классами $X_1 = \{x_1, x_3\}$, $X_2 = \{x_2, x_4\}$, ε_2 — отношение эквивалентности на множестве стратегий игрока 2, определяемое классами $Y_1 = \{y_1\}$, $Y_2 = \{y_2, y_3\}$, ε — отношение эквивалентности на множестве исходов, определяемое классами $C_1 = \{a, d\}$, $C_2 = \{e\}$, $C_3 = \{b\}$, $C_4 = \{f, c\}$.

Непосредственно проверяется, что эквивалентность ε является стабильной относительно порядка ω (а значит, и относительно порядка ω^{-1}) и содержит определяемое парой $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ отношение неразличимости, поэтому можно построить

Таблица 43

F	y_1	y_2	y_3
x_1	e	c	f
x_2	b	a	d
x_3	e	f	f
x_4	b	d	a

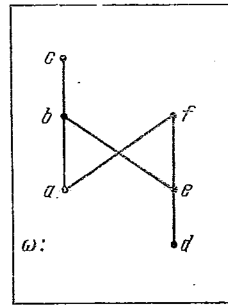


Рис. 73

фактор-игру (таблица функции реализации F^1 и диаграмма отношения порядка ω_1 для фактор-игры приведена в табл. 44 и на рис. 74). Для нахождения ситуаций равновесия в фактор-игре установим условие выполнимости неравенства

$$F^1_{p^*q} \overset{\overline{\omega_1}}{\geqslant} F^1_{pq}, \tag{57}$$

где $p=(p_1, p_2)$ — невырожденная вероятностная мера на $\{X_1, X_2\}$; $q=(q_1, q_2)$ — невырожденная вероятностная мера на $\{Y_1, Y_2\}$; $p^*=(p^*_1, p^*_2)$ — вероятностная мера на $\{X_1, X_2\}$. Условие (57) равносильно тому, что для любого подмножества X, мажорантно устойчивого относительно порядка ω_1, выполняется $F^1_{p^*q}(X) \geqslant F^1_{pq}(X)$. Полагая в последнем неравенстве $X=\{C_4\}$, а затем $X=\{C_3, C_4\}$ получаем $q_2 \geqslant q_1$. Поэтому, если $q_1 > q_2$, то

$$F^1_{p^*q} \overset{\overline{\omega_1}}{\not>} F^1_{pq}. \tag{58}$$

Аналогично находим, что для всякой вероятностной меры $q^*=(q^*_1, q^*_2)$ на $\{Y_1, Y_2\}$ выполняется

$$F^1_{pq^*} \overset{\overline{\omega_1}^{-1}}{\not>} F^1_{pq}. \tag{59}$$

Из (58) и (59) следует, что при $q_1 > q_2$ ситуация (p, q) будет ситуацией равновесия в фактор-игре. Так как все классы эквивалентности ε дискретны, то согласно предложению 19(2) канонический гомоморфизм игры на фактор-игру является строгим. По теореме 7(2) получаем тогда, что в первоначальной игре равновесной будет всякая ситуация (μ, γ), где $\mu(x_i) \neq 0$, $\nu(y_j) \neq 0$ для $i, j = 1, 2, 3, 4$ и $\nu(y_1) > \nu(y_2) + \nu(y_3)$.

Таблица 44

F^1	Y_1	Y_2
X_1	C_2	C_4
X_2	C_3	C_1

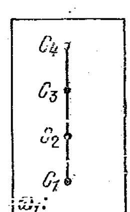


Рис. 74.

В заключение книги выскажем одно замечание общего характера. Математические модели принятия оптимальных решений при управлении сложными системами отличаются следующими двумя важными особенностями.

Во-первых, для них отсутствует единое понятие оптимальности (за исключением простейших случаев, например моделей принятия решений в условиях определенности, в которых имеется численная оценка исходов).

Во-вторых, даже при фиксированном принципе оптимальности обычно получается не одно, а множество оптимальных решений, неэквивалентных между собой, и сужение этого множества (в идеале до одного элемента) требует дополнительной информации, подчас значительной.

Эти особенности присущи уже математическим моделям принятия оптимальных решений, в которых имеется наиболее информативная—численная—оценка исходов. Переход к менее информативной характеристике исходов, осуществляемый с помощью задания отношений предпочтения исходов, как правило, увеличивает «множественность» оптимальных решений. Отсюда понятно, что, заменяя анализ сложной ситуации принятия решения рассмотрением ее математической модели, мы не можем всегда рассчитывать, при условиии адекватности этой модели реальной ситуации, на нахождение *единственного* оптимального варианта, какой бы изощренный математический аппарат мы при этом не применяли. Поэтому при принятии решения в сложной ситуации формальное исследование ее математической модели должно быть дополнено содержательным анализом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ[1]

1. **Берж К.** Теория графов и ее применения: Пер. с фран./Пер. А. А. Зыкова. — М.: ИЛ, 1962. — 319 с.
2. **Ватель И. А., Ерешко Ф. И.** Математика конфликта и сотрудничества. — М.: Знание, 1973. — 64 с.
3. **Вопросы** анализа и процедуры принятия решений: Сб. переводов/Под ред. И. Ф. Шахнова. — М.: Мир, 1976. — 228 с.
4. **Воробьев Н. Н.** Теория игр. — М.: Знание, 1976. — 64 с.
5. **Воробьев Н. Н.** Признаки делимости. — М.: Наука, 1980. — 96 с.
6. **Льюс Р. Д., Райфа Х.** Игры и решения: Пер. с англ./Пер. И. В. Соловьева. —М.: ИЛ, 1961. — 642 с.
7. **Моисеев Н. Н.** Математика — управление — экономика. — М.: Знание, 1970. — 62 с.

[1] В список включены работы, близкие по содержанию к излагаемым в настоящей книге вопросам и не требующие для чтения специальной математической подготовки.

8. **Моисеев Н. Н.** Математика ставит эксперимент. — М.: Наука, 1979. — 224 с.
9. **Нейман Дж., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
10. **Подиновский В. В.** Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Машиностроение, 1978, с. 48—82.
11. **Саати Т. Л.** Математические модели конфликтных ситуаций: Пер. с англ. Пер. Б. Г. Веселова и Г. Б. Рубальского: — М.: Сов. радио, 1977. — 304 с.
12. **Теория** прогнозирования и принятия решений: Учеб. пособие. Под ред. С. А. Саркисяна. — М.: Высшая школа, 1977, с. 223—344.
13. **Шиханович Ю. А.** Введение в современную математику. — М.: Наука, 1965. — 376 с.
14. **Шрейдер Ю. А.** Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. — 254 с.
15. **Вилкас Э. Й., Майминас Е. З.** Решения: теория, информация, моделирование. — М.: Радио и связь, 1981. — 328 с.
16. **Ларичев О. И.** Наука и искусство принятия решений. — М.: Наука, 1979. — 200 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ