УДК 519.8
ББК 22.18
П 44

Подиновский В. В., Ногин В. Д. **Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.** — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-0812-6.

Монография, ставшая классической, посвящена оптимумам по Парето, играющим базовую роль при анализе многокритериальных задач принятия решений. В ней разбирается содержательный смысл, теоретическое и практическое значения понятия оптимального по Парето решения, подробно рассматриваются различного рода условия оптимальности, исследуются структура и свойства множества Парето, излагается теория двойственности многокритериальных задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — математиков, специалистов, применяющих математические методы анализа решений в экономике и менеджменте, технике и энергетике, транспорте и строительстве, информатике и военном деле, при автоматизации управления и проектирования, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Она будет служить хорошим руководством для всех, кто уже использует теорию многокритериальной оптимизации в своей научной и педагогической работе или пока только еще готовится стать квалифицированным специалистом в области системного анализа, исследования операций и поддержки принятия решений.

ISBN 978-5-9221-0812-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию

Читателю предлагается второе издание книги В. В. Подиновского и В. Д. Ногина «Парето-оптимальные решения многокритериальных задач», впервые выпущенной издательством Физматлит в 1982 г. Книга посвящена теоретическим основам многокритериальной оптимизации, т. е. теории важного класса задач выбора решений (вариантов действий, стратегий, планов), характеризуемых наличием нескольких критериев выбора и большим или бесконечным числом возможных вариантов решений.

В большинстве сложных и ответственных задач принятия решений приходится учитывать различные аспекты и последствия возможных вариантов действий: экономические, социальные, политические, технические, экологические и иные. Поэтому далеко не всегда возможно представить задачи поиска наиболее подходящего варианта действий в классической математической форме решения задачи оптимизации, т. е. максимизации или же минимизации целевой функции (единственного критерия выбора). В связи с этим возникли и получили широкое распространение *многокритериальные постановки* задачи выбора решения, основанные на явном признании наличия нескольких различных (как принято говорить, частных) критериев выбора. Анализ проблем выбора варианта действий в многокритериальной постановке не так прост, как в случае единственного критерия, когда достаточно решить математическую задачу поиска оптимального решения — необходимы специальные подходы, методы и процедуры.

Сейчас это положение не вызывает вопросов и является общепринятым. Однако так было не всегда. В середине XX в., когда на́чало интенсивно развиваться научно-прикладное направление методов выбора стратегий, получившее наименование «Исследование операций», считалось, что математическая модель операции должна представляться именно в форме задачи оптимизации единственного критерия (одной целевой функции). Задачи, которые естественным образом оказывались многокритериальными, рассматривались как сформулированные не до конца. Поэтому первоначально, в пятидесятых–шестидесятых годах прошлого века, практически все подходы и методы, предлагавшиеся для работы с такими задачами, основывались на одной и той же идее: свести исходную многокритериальную проблему к однокритериальной. Наиболее известным из них является метод «свертывания» всех критериев в один обобщенный, или агрегированный (чаще всего им служит линейная свертка, т. е. сумма произведений исходных критериев на их коэффициенты «важности»). Кроме того, большое распространение получили метод выделения среди исходных критериев главного и назначения требуемых уровней для всех остальных, а также метод целевого программирования (оптимальным считается такой вариант действий, для которого вектор значений всех критериев наиболее близок к целевому множеству). Эти методы, по своей сути, являются эвристическими, они не имеют строго научного обоснования и опираются на здравый смысл и накопленный опыт лица, принимающего решение (ЛПР), на основе предпочтений которого и должны свертываться отдельные (частные) критерии или назначаться ограничения, целевые точки и т. д. Затем появились и математически обоснованные методы, в том числе методы построения функций полезности (ценности), описывающих предпочтения ЛПР. Однако такие методы крайне сложны и трудоемки для ЛПР *), а потому возможности их практического применения весьма ограничены.

Постепенно стало ясно, что рассмотренный путь решения многокритериальных задач является далеко не универсальным. Начали появляться иные подходы, создаваться иные методы. Большие надежды возлагались на итеративные методы, которые предполагают не одноэтапный, а пошаговый поиск варианта действий в многокритериальной задаче. Они реализуются в виде интерактивных процедур, т. е. диалоговых процедур «человек–компьютер», в которых компьютер на каждом шаге решает некоторую задачу однокритериальной оптимизации и находит некоторый вариант действий, а ЛПР реагирует на полученное решение этой задачи, меняя ее параметры с целью поиска более предпочтительного варианта. В процессе такого диалога ЛПР начинает лучше понимать суть поставленной анализируемой задачи и ее особенности, свои предпочтения и возможности выбора. Как показала жизнь, такие методы также имеют ограниченные возможности практического применения, поскольку участие в длительных интерактивных процедурах, в которых требуется отвечать на

*) См., например, *О. И. Ларичев.* Теория и методы принятия решений. — М.: Логос, 2002.

сложные вопросы о собственных предпочтениях, также затруднительно для ЛПР **).

Альтернативный подход к поддержке ЛПР в процессе выбора предпочтительных решений состоит в построении совокупности всех «разумных» вариантов действий и информировании ЛПР об этих вариантах. Человек сам должен указать наиболее предпочтительное решение среди разумных вариантов. При этом возникает вопрос о том, что можно понимать под «разумным» вариантом действий, а также как найти совокупность «разумных» вариантов и проинформировать ЛПР об этой совокупности. Теория принятия решений при многих критериях рассматривает эти вопросы. Таким образом, она является основой методов аппроксимации совокупности «разумных» вариантов и ее представления ЛПР, которые получают все более широкое распространение в последние годы.

Остановимся теперь на объекте исследования теории многокритериальной оптимизации — совокупности «разумных» вариантов действий. В этой теории для формулировки концепции «разумного» варианта действий используется понятие *оптимальности по Парето*, или, как стали говорить в последнее время, *оптимальности по Эджворту–Парето*, названной так в честь Ф. Эджворта и В. Парето (Francis Edgeworth, 1845–1926; Vilfredo Pareto, 1848–1923), которые ввели это понятие и использовали его в экономических и социологических исследованиях. Это понятие несложно: *некоторый возможный* (или, как принято говорить, *допустимый*) *вариант действий является оптимальным по Парето, если при замене его любым другим допустимым вариантом нельзя добиться улучшения значения хотя бы одного из критериев, не ухудшив при этом значения какого-то другого.* Только среди таких вариантов и надлежит выбирать наиболее предпочтительный.

Совокупность таких вариантов действий принято называть множеством парето-оптимальных решений. Каждое из парето-оптимальных решений порождает вектор значений критериев, который обладает простым геометрическим свойством: он лежит на границе множества критериальных векторов, которые могут быть получены при использовании всех допустимых вариантов действия (множества достижимых критериальных векторов или, как принято говорить в книге, множества достижимых критери-

**) См. там же.

альных оценок). Таким образом, совокупность парето-оптимальных решений порождает часть границы множества достижимых критериальных векторов, которую принято называть *паретовой границей*. Ее анализ имеет и большое прикладное значение, поскольку аппроксимация паретовой границы является основой современных методов многокритериальной оптимизации. Паретова граница является основным объектом теоретического исследования в настоящей книге.

В годы, предшествующие первому изданию этой книги, возник массовый интерес к анализу многокритериальных задач и начали публиковаться научные статьи, посвященные этой проблематике. В этих статьях нередко «переоткрывались» результаты, уже известные по работам в математической экономике и теории неантагонистических игр, а в прикладных работах встречались и явные ошибки. Поэтому появление монографии, написанной на высоком научном уровне и содержащей основные теоретические результаты в области многокритериальной оптимизации, явилось важной вехой в становлении и развитии теории принятия решений при многих критериях. Книга не только подвела итоги развития теории к началу 80-х годов, но и во многом явилась пионерской, так как содержала ряд новых и оригинальных идей и результатов, ранее не публиковавшихся. Она позволила научным работникам иметь, по существу, энциклопедию по теории многокритериальной оптимизации, а преподавателям — учебное пособие для преподавания в вузах этой теории и методов, использующих ее результаты.

Хотя со времени первого выхода в свет книги В. В. Подиновского и В. Д. Ногина прошло почти четверть века и за этот период получен ряд новых результатов, книга по-прежнему вызывает большой интерес научных работников и преподавателей. Это связано, прежде всего, с отсутствием новой книги (как в России, так и за рубежом), которая превзошла бы книгу В. В. Подиновского и В. Д. Ногина своей полнотой и ясностью изложения. Авторы книг по методам многокритериальной оптимизации, изданных за последние четверть века, в учебниках обычно ограничиваются отдельными (зачастую не самыми важными) свойствами задач, а в монографиях рассматривают только те их аспекты, которые важны для самих авторов. Поэтому на книгу В. В. Подиновского и В. Д. Ногина имеются ссылки практически во всех русскоязычных работах, посвященных многокритериальным задачам; она хорошо известна специалистам и за рубежом, которые также часто ссылаются на нее. Книга входит в списки основной литературы программ подготовки аспирантов самых различных специальностей, а также в списки дополнительной литературы для студентов многих направлений обучения. Это объясняется тем, что она содержит теоретические результаты, которые остаются базовыми и со временем не теряют своей ценности, а также тем, что написана строгим и ясным языком. Поэтому переиздание книги В. В. Подиновского и В. Д. Ногина представляется вполне закономерным. Книга долго еще будет служить хорошим руководством для всех, кто уже использует теорию многокритериальной оптимизации в своей научной и педагогической работе или пока только еще готовится стать квалифицированным специалистом в области исследования операций и анализа решений.

Краткий обзор основных результатов по парето-оптимальности, полученных после выхода первого издания книги В. В. Подиновского и В. Д. Ногина, дан в нашем добавлении ко второму ее изданию.

Заведующий кафедрой «Исследование операций»
ф-та вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М. В. Ломоносова,
академик РАН

П. С. Краснощеков

Заведующий сектором Вычислительного центра РАН
д. ф.-м. н.

А. В. Лотов

Основные обозначения

$\{x \in A \mid \pi(x)\}$ — совокупность элементов x множества A, для которых выполнено $\pi(x)$.

$\varnothing$ — пустое множество.

$|A|$ — число элементов конечного множества A.

$A \times B$ — декартово произведение множеств A и B.

$h\colon A \to B$ — отображение h множества A во множество B.

E — множество вещественных чисел.

$\mathrm{Ent}[q]$ — целая часть числа q.

E^m — евклидово m-мерное пространство.

$0_{(m)} = (0, 0, \ldots, 0)$ — нулевой вектор пространства E^m.

Для векторов y, z из E^m:

$\langle y, z\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i z_i$ — скалярное произведение y и z;

$||y|| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$ — норма y;

$y \geqq z \leftrightarrow y_i \geqq z_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$;

$y \geq z \leftrightarrow y \geqq z$ и $\exists i\colon y_i > z_i$;

$y > z \leftrightarrow y_i > z_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

$y \overset{=}{>} z \leftrightarrow y = z$ или $y_i > z_i$ хотя бы при одном $i = 1, 2, \ldots, m$;

$E^m_{>} = \{y \in E^m \mid y > 0_{(m)}\}$ — положительный ортант пространства E^m;

$E^m_{\geqq} = \{y \in E^m \mid y \geqq 0_{(m)}\}$ — неотрицательный ортант пространства E^m.

Для множества $A \subseteq E^m$:

$\overline{A}$ — замыкание множества A;

$\mathrm{int}\, A$ — внутренность множества A;

$\mathrm{Fr}\, A$ — граница множества A;

$\mathrm{ri}\, A$ — относительная внутренность выпуклого множества A;

$\mathrm{conv}\, A$ — выпуклая оболочка множества A;

$\overline{\mathrm{conv}}\, A$ — замыкание выпуклой оболочки A;

A° — поляра выпуклого конуса A;

$0^{+}(A)$ — рецессивный конус выпуклого множества A;

$T(A; y^*)$ — касательный конус ко множеству A в точке y^*;

$\mathrm{Max}\, A$ $(\mathrm{Min}\, A)$ — множество максимальных (минимальных) элементов множества A, частично упорядоченного отношением $\geq$.

Для множеств $A, B \subseteq E^m$:

$A + B = \{y \in E^m \mid y = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$;

$A - B = \{y \in E^m \mid y = a - b,\ a \in A,\ b \in B\}$;

X — множество (допустимых) решений;

$f_1, f_2, \ldots, f_m$ — критерии (целевые функции);

$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество номеров критериев;

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ — векторный критерий;

$g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ — вектор-функция ограничений (задана на множестве $D \subseteq E^n$);

$J(x^0) = \{j \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid g_j(x^0) = 0\}$ — множество номеров активных ограничений в x^0;

Y_i — шкала критерия f_i;

$Y^\times = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$;

$\widehat{Y}$ — множество (векторных) оценок;

$Y = f(X) = \{y \in E^m \mid y = f(x),\ x \in X\}$ — множество достижимых (векторных) оценок;

$Y_* = Y - E^m_{\geqq} = \bigcup\limits_{y \in Y} \{z \in E^m \mid y \geqq z\}$;

$\approx_f$, $\gtrsim_f$, $\succ_f$, $\sim_f$ — отношения в X, индуцированные с помощью f отношениями $\geqq$, $\geq$, $>$, $=$ соответственно ($x' \approx_f x''$ при $f(x') \geqq f(x'')$ и т. д.);

$P(Y) = \mathrm{Max}Y\ \ (P_f(X))$ — множество эффективных, оптимальных по Парето оценок (решений);

$S(Y)\,(S_f(X))$ — множество слабо эффективных, оптимальных по Слейтеру оценок (решений);

$G(Y)\,(G_f(X))$ — множество собственно эффективных, оптимальных по Джоффриону оценок (решений);

$B(Y)\ (B_f(X))$ — множество подлинно эффективных, оптимальных по Борвейну оценок (решений);

$$\mathrm{M} = \left\{\mu \in E^m_{>} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\right\};$$

$$\overline{\mathrm{M}} = \left\{\mu \in E^m_{\geqq} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\right\};$$

■ — конец доказательства.

Г Л А В А 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1.1. Общие сведения о многокритериальных задачах оптимизации

1. Концепция принятия (выработки) решения в качестве первичного элемента деятельности рассматривает *решение* как сознательный выбор одной из ряда альтернатив, называемых, в зависимости от их конкретного содержания, стратегиями, планами, вариантами и т. п. Этот выбор производит лицо, принимающее решение и стремящееся к достижению определенных целей. В роли такого лица выступают отдельные люди или группы людей, обладающие правами выбора решения и несущие ответственность за его последствия.

Применение математических методов при принятии решений предполагает построение подходящей математической модели, формализованно представляющей проблемную ситуацию, т. е. ситуацию выбора решения. Для задач принятия решений (задач оптимизации) в условиях определенности, когда случайные и неопределенные факторы отсутствуют, компонентами такой модели являются множество X всех (альтернативных) *решений*, из которых и надлежит произвести выбор одного наилучшего, или *оптимального решения*, и описание предпочтений лица, принимающего решение. Для того чтобы была обеспечена возможность (свобода) выбора, множество X должно содержать не менее двух решений.

2. В *многокритериальной задаче оптимизации* сравнение решений по предпочтительности осуществляется не непосредственно, а при помощи заданных на X числовых функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, называемых *критериями* (а также показателями качества или эффективности, критериальными функциями, целевыми функциями и т. п.). Предполагается, что $m \geqq 2$: при $m = 1$ задача оптимизации является *однокритериальной*.

Для каждого критерия f_i на числовой прямой E указывается подмножество Y_i, из которого он принимает свои значения. Практически множество Y_i (которое, допуская вольность речи, часто называют шкалой *) критерия f_i) определяется в соответствии с содержательным смыслом этого критерия. Например, если заведомо известно, что критерий f_1 положителен или неотрицателен (характеризует массу, стоимость и т. п.), то можно принять $Y_1 = (0, +\infty)$ или $Y_1 = [0, +\infty)$. Если значения f_2 ограничены снизу и сверху некоторыми естественными границами a и b, то $Y_2 = [a, b]$ (так, если f_2 — израсходованная доля запаса ресурсов, то $Y_2 = [0, 1]$). Если значениями f_3 могут служить лишь нуль и натуральные числа (скажем, если f_3 определяется в результате подсчета количества некоторых объектов), то $Y_3 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Если на значения f_4 нет никаких смысловых ограничений, то $Y_4 = (-\infty, +\infty) = E$ и т. п.

Критерии f_i, называемые *частными*, (а также локальными), образуют *векторный критерий* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Считается, что каждое решение x полностью характеризуется соответствующей (*векторной*) *оценкой*, т. е. вектором $f(x)$. Поэтому выбор оптимального решения из множества всех решений X сводится к выбору оптимальной оценки из множества достижимых оценок

$$Y = f(X) = \big\{y \in E^m \mid y = f(x), x \in X\big\},$$

где E^m — m-мерное числовое пространство, называемое критериальным. При необходимости это пространство будет считаться евклидовым, т. е. снабженным метрикой

$$||y - y'|| = \langle y - y', y - y'\rangle^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - y_i')^2\right]^{1/2}.$$

В реальных задачах множество Y часто построить весьма сложно, а то и невозможно. Поэтому в рассмотрение вводится некоторое более широкое множество $\widehat{Y} \subseteq E^m$, векторам из которого можно придать содержательный смысл. Чаще всего это множество $\widehat{Y} \supseteq Y$ всех (достижимых, т. е. из Y, и гипотетических) оценок является многомерным параллелепипедом $Y^\times = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$. Иногда $\widehat{Y}$ получается из $Y^\times$ при помощи тех или иных ограничений, направленных на удаление лишенных смысла или же заведомо недостижимых векторов.

---

*) В математической теории измерений понятие шкалы непосредственно связывается с понятием допустимого преобразования критерия (см. п. 2).

Введение в рассмотрение множества $\widehat{Y}$ дает ряд преимуществ. Например, возникает возможность исследования не одной, а сразу целого семейства задач, для каждой из которых множество достижимых оценок входит в $\widehat{Y}$. В частности, становится возможным изучать характер зависимости оптимального решения от тех или иных параметров задачи.

Далее решения всегда будут обозначаться буквой x, часто снабжаемой различными индексами, а соответствующие им оценки — буквой y с теми же индексами, например: $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$ и т. п. Если данная векторная оценка y^0 является достижимой и ей соответствует несколько решений, то под x^0 будет пониматься (если нет специальных оговорок) произвольное из этих решений (т. е. любое решение, удовлетворяющее равенству $f(x^0) = y^0$).

3. В задачах принятия индивидуальных решений критерии служат для выражения «интенсивности» существенных свойств (признаков) решений. Например, при сравнении некоторых изделий могут использоваться такие критерии, как масса, стоимость, дата выпуска, внешний (товарный) вид и т. п. В задачах принятия групповых решений критерий f_i характеризует «качество» (или предпочтительность) решений с точки зрения индивида i, входящего в группу $\{1, 2, \ldots, m\}$. Например, если решений конечное число и индивид i все их проранжировал (упорядочил по предпочтительности), то можно принять $f_i(x') = 1$ для наиболее предпочтительного решения x', $f_i(x'') = 2$ — для следующего по предпочтительности решения x'' и т. д.

По своему характеру критерии делятся на количественные и качественные. Грубо говоря, критерий является количественным, когда его значения имеет смысл сравнивать, указывая, на сколько или во сколько раз одно значение больше другого, и качественным, когда такие сравнения бессмысленны. Примером количественного критерия f_i является масса. Если фиксирована единица измерения массы, то можно говорить о том, во сколько раз (или же на сколько) одно изделие тяжелее другого: отношение весов изделий не изменяется после перехода к другой единице измерения, т. е. после преобразования f_i в kf_i где $k > 0$. Понятно, что всякое другое преобразование (не являющееся умножением на положительное число) может привести к изменению исходного соотношения значений f_i.

В разобранном примере допустимыми преобразованиями критерия f_i являются все положительные линейные преобразования, и только они. В общем случае функцию φ называют допустимым преобразованием критерия f_i, если функция $\varphi(f_i)$ вновь оказывается критерием, измеряющим (задающим) то же свойство. При замене f_i на $f'_i = \varphi(f_i)$ множество Y_i изменяется на $Y'_i = \varphi(Y_i)$.

Таким образом, с каждым критерием связывают множество допустимых преобразований Φ и говорят, что этот критерий имеет шкалу типа Φ, или что измерение производится в шкале типа Φ. Обычно множество Φ естественно вводится вместе с заданием критерия, но иногда определение типа шкалы оказывается самостоятельной, достаточно сложной задачей.

В вышеприведенном примере $\Phi = \Phi_0 = \{\varphi \mid \varphi(z) = kz, k > 0\}$. Шкала такого типа называется *шкалой отношений*, так как сохраняются отношения величин: $kz^1/kz^2 = z^1/z^2 = C$ (C — const).

Распространенным является и случай измерения в шкале типа $\Phi_\text{и} = \{\varphi \mid \varphi(z) = kz + l, k > 0\}$. Здесь допустимыми преобразованиями являются умножение на положительное число k и добавление произвольного числа l. Такая шкала называется *шкалой интервалов*. Это название объясняется свойством сохранения отношений интервалов:

$$\frac{z^1 - z^2}{z^3 - z^4} = \frac{(kz^1 + l) - (kz^2 + l)}{(kz^3 + l) - (kz^4 + l)} = C \quad (C \text{ — const}).$$

Примером критерия, имеющего шкалу интервалов, служит «дата выпуска изделия»: для измерения времени необходимо фиксировать масштаб и начало отсчета.

Шкала является тем более совершенной, чем уже множество Φ допустимых преобразований. Критерии, имеющие шкалу, не менее совершенную, чем интервальная, называются *количественными*. В большинстве случаев количественные критерии соответствуют объективным измерениям объективных («физических») свойств. Однако весьма широко распространены и критерии с менее совершенными шкалами, чем шкала интервалов.

Наименее совершенной шкалой критериев, встречающейся в зачах оптимизации, является *порядковая* шкала, для которой множество допустимых преобразований $\Phi_\text{п}$ состоит из всех монотонно возрастающих функций: $\Phi_\text{п} = \{\varphi \mid z^1 > z^2 \to \varphi(z^1) > \varphi(z^2)\}$. Критерии, имеющие порядковую шкалу, называются *качественными*. Значения качественного критерия имеет смысл сравнивать только по отношениям «больше», «меньше» и «равно» — они сохраняются при монотонных преобразованиях. Но выяснять, во сколько раз или на сколько одно значение больше другого, бессмысленно. Критерий с порядковой шкалой естественным образом возникает в тех случаях, когда решения ранжируются, т. е. располагаются по возрастанию или убыванию интенсивности некоторого свойства, а затем им приписываются числа таким образом, чтобы большей интенсивности соответствовало большее (или, наоборот, меньшее) число. Обычно такие ранжирования получаются при субъективных «измерениях», например отражают мнение i-го индивида о предпочтительности решений.

Весьма часто субъективные измерения выполняются и в *балльных* шкалах. Например, эксперты могут оценивать в баллах внешний вид изделия. Критерии с балльными шкалами занимают «промежуточное» положение между количественными и качественными критериями.

Утверждение о значениях критериев с заданными типами шкал называется осмысленным, или адекватным, если его истинность не изменяется после применения к критериям любых допустимых преобразований, определяемых типами шкал. Поэтому для анализа и решения практической многокритериальной задачи оптимизации следует применять только те определения и понятия, методы и процедуры, которые приводят к получению адекватных выводов и рекомендаций.

Например, широко известным является метод решения многокритериальных задач, основанный на «свертывании» векторного критерия f в одну функцию — *обобщенный* (или *агрегированный*) критерий $F(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Нетрудно убедиться в том, что этот метод не пригоден для решения задач с качественными критериями. Возьмем наиболее распространенный обобщенный критерий — линейную «свертку» $F_\Sigma = \sum\limits_{t=1}^{m} \mu_i f_i$, где μ_i — некоторые положительные числа, характеризующие относительную важность критериев (коэффициенты важности). Пусть, например, $m = 2$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $f(x') = (2, 8)$, $f(x'') = (1, 27)$. Тогда F_Σ указывает, что x'' лучше, чем x', так как $2 + 8 < 1 + 27$. Однако если к первому критерию применить допустимое преобразование $\varphi_1(z) = z^5$, а ко второму $\varphi_2(z) = z^{1/3}$ (т. е. f_1 заменить на f_1^5, а f_2 — на $f_2^{1/3}$), то вывод окажется противоположным, ибо $32 + 2 > 1 + 3$.

Для более подробного ознакомления с вопросами измерений в шкалах различных типов можно обратиться к книге [56]. Строгое и полное изложение математической теории измерений имеется в монографиях [75, 89].

4. Как уже указывалось, выделение оптимального решения из множества X должно быть произведено на основе предпочтений лица, принимающего решение. Эти предпочтения должны быть описаны формализованно при помощи критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$. В теории принятия решений разработаны специальные общие способы описания предпочтений. Для удобства читателя в следующем параграфе приводятся все используемые в дальнейшем сведения, касающиеся описания предпочтений и определения оптимальных решений. Более подробно эти вопросы освещены, например, в книгах [56, 103].

5. В последующих главах основное внимание будет уделено конечномерным многокритериальным задачам, т. е. задачам, в которых X — подмножество пространства E^n. В таких задачах множество X обычно выделяется из некоторого более широкого множества $D \subseteq E^n$ при помощи специальных ограничений, которые чаще всего представляются в виде неравенств:

$$X = \{x \in D \mid g_1(x) \geqq 0, \ldots, g_k(x) \geqq 0\}, \tag{1}$$

где g_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ — числовые функции, определенные на D и составляющие *вектор-функцию ограничений* $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$. При этом считается, что и критерии $f_1, f_2, \ldots, f_m$ также определены на D.

В роли множества D обычно выступает либо все пространство E^n, либо некоторое его специфическое подмножество, например неотрицательный ортант $E^n_{\geqq}$, образуемый всеми векторами с неотрицательными компонентами: $E^n_{\geqq} = \{x \in E^n \mid x_1 \geqq 0, \ldots \ldots, x_n \geqq 0\}$. Практически множество D выделяется из E^n при помощи самых простых и очевидных ограничений на переменные x_i. Так, если x_i — потребное количество ресурса i-го типа, то $x_i \geqq 0$ и можно принять $D = E^n_{\geqq}$.

6. В зависимости от структуры множества X (или же D) и свойств функций f_i (а также g_j) для удобства исследования выделяют различные классы многокритериальных задач. Так, если множество X (D) содержит конечное число элементов, то задача называется *конечной*, а если X (D) *исчислимо*, т. е. конечно или же счетно, то — *дискретной*. В частности, если у каждого вектора x из X (D) все компоненты x_i — целые числа, то задача называется *целочисленной*. А если векторы, образующие X (D), булевы (т. е. состоят из нулей и единиц), то и сама задача называется *булевой*.

Если X (или D) выпукло, а все f_i (и g_j) — вогнутые функции, то задача называется *вогнутой*. В частности, если X — полиэдральное множество (т. е. «вырезано» из E^n конечной системой линейных неравенств и равенств), а все f_i линейны, то многокритериальная задача является *линейной*.

В специальный класс выделяются также задачи, в которых все функции f_i (и g_j) дифференцируемы (иногда требуется непрерывная дифференцируемость). При этом обычно предполагается, что множество D — открытое (например, в его роли выступает само пространство E^n или положительный ортант $E^n_> = \operatorname{int} E^n_{\geqq} = \{x \in E^n \mid x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$ или же что $X \subseteq \operatorname{int} D$.

§ 1.2. Отношения предпочтения, функции ценности и выбора

1. Достаточно общим и хорошо разработанным является способ описания предпочтений на «языке» бинарных отношений. Вообще бинарные отношения могут быть использованы и практически применяются для описания не только предпочтений, но и попарных связей самого различного характера между объектами произвольной природы.

Как известно, *бинарным отношением* ρ *на* (или во) множестве A называется подмножество множества $A^2 = A \times A$, т. е. совокупность упорядоченных пар (a, b), где $a, b \in A$. Если $(a, b) \in \rho$, то говорят, что a и b находятся в отношении ρ, и этот факт записывают так: $a\rho b$.

Можно вводить в рассмотрение и n-арные отношения как подмножества множества A^n. Однако мы будем иметь дело только с бинарными отношениями, и поэтому для краткости прилагательное «бинарное» часто будем опускать.

К бинарным отношениям как ко множествам применимы все теоретико-множественные операции, в том числе операции пересечения $\cap$, объединения $\cup$, образования разности $\setminus$ и другие. Для отношений вводятся и специфические операции. Так, под ρ^{-1} понимается отношение, *обратное* к ρ, которое определяется следующим образом:

$$\rho^{-1} = \{(a, b) \in A^2 \mid (b, a) \in \rho\},$$

т. е. пара (a, b) включается в ρ^{-1} тогда и только тогда, когда пара (b, a) входит в ρ.

Пусть $B \subset A$. Отношение $\rho_B = \{(a, b) \in \rho \mid a, b \in B\}$ называется *сужением* ρ на B.

Отношение ρ называется *рефлексивным*, если $(a, a) \in \rho$ для всякого $a \in A$, и *иррефлексивным*, если $(a, a) \notin \rho$, т. е. $a\rho a$ не верно ни для одного $a \in A$.

Отношение ρ называется *симметричным*, если из $(a, b) \in \rho$ следует $(b, a) \in \rho$, *асимметричным*, если $(a, b) \in \rho$ влечет $(b, a) \notin \rho$, и *антисимметричным*, если из $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$ вытекает $a = b$. Асимметричное отношение является, очевидно, и иррефлексивным.

Отношение ρ называется *транзитивным*, если из $a\rho b$ и $b\rho c$ следует $a\rho c$.

Элементы a и b из A называются *сравнимыми* по ρ, если справедливо $a\rho b$ или $b\rho a$, и *несравнимыми* по ρ в противном случае (когда неверно ни $a\rho b$, ни $b\rho a$). Отношение ρ называется *полным* (или *связным*), если любые $a, b \in A$ сравнимы (в том числе при $a = b$). Отношение, не являющееся полным, называется *частичным* (или несвязным).

Например, отношение $\geqq$ («не меньше») на множестве действительных чисел рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и полно, а отношение $>$ («больше») иррефлексивно, асимметрично, транзитивно, но не является полным (так как $a > a$ неверно).

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *эквивалентностью.* Примером эквивалентности служит отношение равенства $=$ векторов из E^m. Эквивалентности играют большую роль в математике. Это объясняется тем, что они тесно связаны с разбиениями множеств. Совокупность $\{A_j\}$ непустых подмножеств множества A называется его *разбиением*, если они попарно не пересекаются ($A_j \cap A_l = \varnothing$ при $j \neq l$) и в совокупности составляют все A (т. е. ($\bigcup\limits_j A_j = A$). Сами A_j называются *классами разбиения.*

Если ρ — эквивалентность, то она порождает разбиение A следующим образом: a и b относятся к одному классу (называемому *классом эквивалентности*) в том и только том случае, если $(a, b) \in \rho$. Обратно, если дано разбиение $\{A_j\}$ множества A, то отношение ρ, определяемое так: $(a, b) \in \rho$ тогда и только тогда, когда a и b относятся к одному и тому же классу разбиения, оказывается эквивалентностью.

Иррефлексивное транзитивное (а потому и асимметричное) отношение называется *строгим* (*частичным*) *порядком*, а рефлексивное и транзитивное отношение — (*частичным*) *квазипорядком* (или предпорядком). Антисимметричный квазипорядок называется (*частичным*) *порядком*.

Рассмотрим отношения $\geqq$, $\geq$, $>$ и $\overset{\equiv}{>}$, определяемые на E^m следующим образом:

$a \geqq b \leftrightarrow a_i \geqq b_i, i = 1, 2, \ldots, m$;

$a \geq b \leftrightarrow a \geqq b$ и $a \neq b$ (т. е. справедливы m неравенств $a_i \geqq b_i$, причем хотя бы одно из них — строгое);

$a > b \leftrightarrow a_i > b_i, i = 1, 2, \ldots, m$;

$a \overset{\equiv}{>} b \leftrightarrow a = b$ или $a_i > b_i$ хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Легко видеть, что отношение $\geqq$ является частичным порядком, $\geq$ и $>$ — строгие частичные порядки, а $\overset{\equiv}{>}$ рефлексивно (но не является ни симметричным, ни транзитивным).

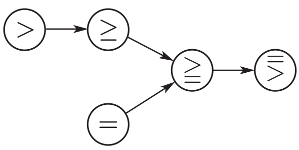

Рис. 1

Взаимосвязь этих четырех отношений и отношения равенства представлена схемой на рис. 1. Согласно этой схеме, например, из $a > b$ следует, что верно также $a \geq b$, $a \geqq b$ и $a \overset{\equiv}{>} b$, так что $> \subset \geq \subset \geqq \subset \overset{\equiv}{>}$. Заметим еще, что $\geqq$ есть объединение $\geq$ и $=$. Полезно иметь в виду также, что $a \overset{\equiv}{>} b$ верно тогда и только тогда, когда $b \geq a$ неверно.

В дальнейшем используется следующее утверждение [67].

Лемма 1. *$a \overset{\equiv}{>} b$ тогда и только тогда, когда $\langle \mu, a \rangle \geqq \langle \mu, b \rangle$ для некоторого вектора μ из множества*

$$\mathrm{M} = \left\{ \mu \in E^m \mid \mu_1 > 0, \ldots, \mu_m > 0, \ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\}. \qquad (1)$$

Для доказательства леммы предположим вначале, что $a \overset{\equiv}{>} b$. Если $a = b$, то $\langle \mu, a \rangle = \langle \mu, b \rangle$ при любом $\mu \in \mathrm{M}$. Пусть $a_j > b_j$. Определим число

$$t = \max\{p, q\} \geqq 0,$$

где $p = \sum\limits_{i \neq j} |a_i|$, $q = \sum\limits_{i \neq j} |b_i|$.

Если $t = 0$, то $\langle \mu, a \rangle > \langle \mu, b \rangle$ при всяком $\mu \in \mathrm{M}$. Если $t > 0$, то пусть

$$r = \frac{a_j - b_j}{2t} > 0.$$

Имеем

$$a_j - b_j = 2tr \geqq r(p + q),$$

откуда

$$a_j - rp \geqq b_j + rq,$$

$$a_j + r\sum_{i\neq j} a_i \geqq b_j + r\sum_{i\neq j} b_i,$$

так что $\langle\mu, a\rangle \geqq \langle\mu, b\rangle$ при $\mu_j = 1/[1 + r(m-1)]$, и $\mu_i = r/[1 + r(m-1)]$ при остальных $i \neq j$.

Пусть теперь $a \overset{=}{>} b$ неверно, так что справедливо $b \geq a$. Но тогда, очевидно, $\langle\mu, b\rangle > \langle\mu, a\rangle$ для любого $\mu \in \mathrm{M}$. ■

Пусть ψ — функция, отображающая A во множество U, на котором задано отношение δ. Это отношение индуцирует на A отношение ρ следующим образом: $(a, b) \in \rho \leftrightarrow (\psi(a), \psi(b)) \in \delta$. Нетрудно проверить, что если δ рефлексивно (иррефлексивно, симметрично, транзитивно), то таким же будет и ρ. Следовательно, если δ — эквивалентность (квазипорядок, строгий порядок), то и ρ будет отношением такого же типа.

2. Для описания предпочтений широко используются следующие бинарные отношения, вводимые на множестве A сравниваемых объектов (в многокритериальных задачах такими множествами, как указывалось в § 1.1, являются множество решений X и множество всех оценок $\widehat{Y}$).

Отношение (*строгого*) *предпочтения* P: aPb означает, что объект a (строго) предпочтительнее, чем b.

Отношение безразличия I: aIb означает, что объекты a и b одинаковы по предпочтительности (если выбор ограничить двумя этими объектами, то безразлично, какой из них взять) *).

Отношение нестрогого предпочтения R: aRb означает, что объект a не менее предпочтителен, чем b, т. е. имеет место aPb или же aIb; формально R есть объединение P и I: $R = P \cup I$.

Отношения предпочтения всегда должны обладать следующими свойствами: P асимметрично (и иррефлексивно); I рефлексивно и симметрично, R рефлексивно; P и I не пересекаются (не может быть одновременно aPb и aIb). Полезно иметь в виду, что P и I восстанавливаются по R:

aIb, когда одновременно aRb и bRa, т. е. $I = R \cap R^{-1}$;

aPb, когда aRb верно, но bRa неверно: $P = R \backslash R^{-1} = R \backslash I$.

---

*) Введение обозначений P и I связано с английскими словами латинского происхождения *preference* (предпочтение) и *indifference* (безразличие).

Таким образом, I есть «симметричная часть», а P — «асимметричная часть» R.

В общем случае отношения R, P и I нетранзитивны. Если же R оказывается транзитивным, то транзитивными будут P и I; в этом случае R — квазипорядок, P — строгий порядок, I — эквивалентность, причем P транзитивно по I: из aPb и bIc, а также из aIb и bPc, следует aPc.

3. Пусть в A задано отношение нестрогого предпочтения R (порождающее, как указывалось выше, отношения P и I), и пусть B — подмножество A. Объект (элемент) $a^* \in B$ называется *наилучшим* (оптимальным) по R (в B), если он не менее предпочтителен, чем любой другой из B, т. е. если a^*Ra справедливо для любого $a \in B$. Наилучший объект единствен с точностью до эквивалентности I, т. е. если b^* — также наилучший в B, то a^*Ib^*. Если необходимо произвести выбор одного объекта из B, то можно взять любой из наилучших объектов (если они в B есть). Если R — порядок, то наилучший объект единствен.

К сожалению, если отношение R не является связным квазипорядком, то наилучших элементов может не оказаться даже в конечном множестве B. Например, если $B = \{a, b, c\}$ и $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c)\}$, то в B наилучшего элемента нет (a и b не сравнимы по R). Поэтому приходится использовать более слабое понятие максимального объекта. Для дальнейшего это определение удобно ввести применительно к общему случаю: не предполагая, что объект входит в B.

Объект $a^0 \in A$ называется *максимальным по P относительно B*, если в B не существует объекта a, строго более предпочтительного, чем a^0, т. е. если aPa^0 не имеет места ни при каком $a \in B$ *). Если объект a^0 принадлежит B, то его называют максимальным по P в B. В разобранном только что примере максимальными (в B) являются объекты a и b. Легко проверить, что наилучший в B объект является и максимальным. Обратное утверждение, разумеется, неверно.

Обозначим множество максимальных по P объектов из B через $\mathrm{Max}_P B$. Это множество *внутренне устойчиво* в том смысле, что если $a, b \in \mathrm{Max}_P B$, то не может быть ни aPb, ни bPa. Это

*) Используются также наименования «неподчиненный», «недоминируемый» и др. Если объект (элемент) $a \in B$ не является максимальным (т. е. существует $b \in B$ такой, что bPa), то он называется подчиненным (объекту b) или доминируемым (объектом b).

множество называется *внешне устойчивым* [62], если для всякого объекта $a \in B$, который не является максимальным, найдется более предпочтительный максимальный объект, т. е. будет $a^0 Pa$ для некоторого $a^0 \in \mathrm{Max}_P B$. Внешне (и, разумеется, внутренне) устойчивое множество $\mathrm{Max}_P B$ называется *ядром отношения* P в B [244] *).

Понятие устойчивости имеет большое значение. Действительно, если множество $\mathrm{Max}_P B$ внешне устойчиво, то оптимальный (т. е. тот, который будет считаться наилучшим после более полного выявления предпочтений лица, принимающего решение) объект должен быть выбран из этого множества. Если же $\mathrm{Max}_P B$ внешне устойчивым не является, то для утверждения о том, что выбор следует ограничить рамками этого множества, вообще говоря, нет оснований. Несложно проверить, что если R — квазипорядок, а множество B конечно, то множество $\mathrm{Max}_P B$ непусто и, более того, внешне устойчиво; при этом $\mathrm{Max}_P B$ можно построить путем «прямого перебора», сравнивая каждый объект из B с остальными и выбирая все максимальные. Таким образом, если R — квазипорядок, то множество $\mathrm{Max}_P B$ может не быть внешне устойчивым (в частности, быть пустым) лишь при бесконечном B. Различного рода условия непустоты и внешней устойчивости множества максимальных элементов приводятся в работах [9, 49, 117, 201, 236].

Примечание 1. Выше рассматривалась задача выбора одного оптимального объекта. Однако существуют задачи, в которых требуется выбрать не один наилучший, а несколько лучших объектов, или упорядочить все объекты по предпочтительности и т. п. Для таких задач понятия максимального объекта и ядра теряют свое значение. Например, если требуется выбрать r лучших объектов («конкурсная» задача), то уже нельзя утверждать, что все они должны быть максимальными по P. Простейший пример: $B = \{a, b, c\}$, $P = \{(a, c)\}$. Здесь $\mathrm{Max}_P B = \{a, b\}$. Однако если требуется выбрать два лучших объекта, то отбрасывать c нельзя: если принимающий решение дополнительно сообщит, что c предпочтительнее, чем b, то искомыми окажутся объекты a и c. Для задач, в которых необходимо отобрать установленное число r лучших объектов, целесообразно применять понятие r-максимального по P объекта [82].

*) В теории игр внутренне и внешне устойчивое подмножество называется решением Неймана–Моргенштерна (НМ-решением), а ядром принято называть множество максимальных элементов.

Примечание 2. Часто используются также понятия наихудшего и минимального объектов. Объект $a_* \in B$ называется *наихудшим в* B, если для любого $a \in B$ верно aRa_*. Объект $a_0 \in A$ называется *минимальным по* P относительно B, если ни для одного $a \in B$ не выполняется a_0Pa. Множество минимальных по P объектов из B обозначим через $\operatorname{Min}_P B$.

4. Числовая функция ψ, определенная на A, называется *возрастающей* (*неубывающей*) *по* P, если aPb влечет $\psi(a) > \psi(b)$ (соответственно $\psi(a) \geqq \psi(b)$) для любых $a, b \in A$. В дальнейшем будет использовано следующее утверждение (см., например, [30, 77]).

Лемма 2. *Пусть $B \subseteq A$ и $a^0 \in B$ доставляет неубывающей по P на B функции ψ наибольшее на B значение. Для того чтобы объект a^0 был максимальным по P, достаточно выполнения одного из следующих условий:*

ψ возрастает по P на B;

a^0 — единственная точка максимума ψ на B.

Доказательство. Действительно, предположим, что a^0 не является максимальным по P, так что в B найдется другой объект a такой, что aPa^0. Но тогда должно быть $\psi(a) \geqq \psi(a^0)$, причем это неравенство строгое, если ψ возрастает по P. Но строгое неравенство противоречит тому, что a^0 — точка максимума ψ, а нестрогое — единственности этой точки максимума. ■

Подмножество $B \subseteq A$ назовем *замкнутым сверху по* R (по P) относительно A, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ из aRb (aPb) следует $a \in B$. В дальнейшем оказываются полезными следующие легко проверяемые утверждения.

Лемма 3. *Если подмножества $B_j \subseteq A$, $j \in J$, замкнуты сверху по R (по P) относительно A, то таким же свойством обладает и $B = \bigcap\limits_{j \in J} B_j$.*

Лемма 4. *Если ψ не убывает по P на A, то для любого числа t подмножество $B = \{a \in A \mid \psi(a) \geqq t\}$ замкнуто сверху по P относительно A.*

Лемма 5. *Пусть $B \subseteq A$ замкнуто сверху по P относительно A. Тогда объект $a \in B$ максимален по P относительно B тогда и только тогда, когда он максимален по P относительно A.*

Говорят, что полный квазипорядок R на A представляет числовая функция ψ, если aRb верно тогда и только тогда, когда $\psi(a) \geqq \psi(b)$. Функцию ψ, представляющую отношение нестрогого предпочтения, называют *функцией ценности*, а также функцией полезности *). Это название сохранилось с того времени, когда считали, что каждому объекту присуща некоторая объективная ценность (полезность), которую и отражают предпочтения людей. С современной точки зрения функция ценности является лишь «технически удобным» средством описания предпочтений: субъекту приписывается такая числовая функция, которая как бы максимизируется его действиями. Понятно, что функция ценности является качественным критерием: она определена с точностью до произвольного возрастающего преобразования. Условия существования функции ценности приведены в [56, 99]. Здесь отметим лишь тот факт, что функция ценности существует для любого полного квазипорядка, когда множество A исчислимо, т. е. конечно или счетно.

Если на множестве A определена функция ценности ψ, представляющая отношение нестрогого предпочтения R, то для любого $B \subseteq A$, очевидно,

$$\mathrm{Max}_P B = \left\{ b \in B \mid \psi(b) = \max_{a \in B} \psi(a) \right\},$$

причем все максимальные по P объекты из B являются наилучшими.

5. Характерной особенностью «языка» бинарных отношений является допущение о том, что результат сопоставления по предпочтению двух объектов не зависит от состава всего множества выбора A. Однако в целом ряде случаев такая зависимость имеет место, и для ее учета приходится обращаться к более богатому «языку» описания предпочтений, основанному на использовании функций выбора.

Пусть $\mathfrak{A}$ — фиксированная совокупность непустых подмножеств множества A. *Функцией выбора* (на $\mathfrak{A}$) называется отображение C, сопоставляющее всякому множеству $B \in \mathfrak{A}$ подмножество $C(B) \subseteq B$. В том частном случае, когда задано отношение строгого предпочтения P, функцию выбора можно определить равенством $C(B) = \mathrm{Max}_P B$, $B \subseteq \mathfrak{A}$. Вопрос о введении бинарного отношения предпочтения по заданной функции выбора оказывается значительно более тонким [56, 221]. Аппарат функций выбора является основой интенсивно развивающейся общей теории выбора [1].

*) Чаще функцией полезности называют такую функцию, математическое ожидание которой представляет отношение нестрогого предпочтения во множестве вероятностных распределений, рассматриваемых на A.

§ 1.3. Независимость критериев по предпочтению. Многокритериальные задачи максимизации

1. В многокритериальной задаче каждое решение $x \in X$ полностью характеризуется своей оценкой $y = f(x)$, и поэтому выбор оптимального решения сводится к выбору оптимальной оценки из множества Y всех достижимых оценок. В связи с этим описание предпочтений лица, принимающего решение, первоначально осуществляется во множестве всех оценок $\widehat{Y}$. Такое описание практически обычно производится при помощи бинарных отношений предпочтения или функции ценности.

При полном отсутствии информации (кроме перечня критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$) о предпочтениях лица, принимающего решение, во множестве $\widehat{Y}$ можно ввести лишь отношение безразличия, являющееся отношением равенства ($=$) оценок как векторов из E^m (при этом отношение нестрогого предпочтения совпадает с $=$, а отношение строгого предпочтения оказывается пустым). Отношение безразличия $=$ индуцирует отношение безразличия $\sim_f$ во множестве решений: $x \sim_f x'$, когда $f(x) = f(x')$, т. е. решения, имеющие равные оценки, одинаковы по предпочтительности. Отношение $\sim_f$ является эквивалентностью и разбивает множество X на классы, состоящие из одинаковых по предпочтительности решений.

Таким образом, если задача является нетривиальной, т. е. если множество Y включает более одной оценки, то выбор оптимального решения без информации о предпочтениях лица, принимающего решение, невозможен.

2. В однокритериальных задачах (при $m = 1$) полная информация подобного рода обычно состоит в указании направления предпочтительного изменения оценок на множестве $\widehat{Y} = Y$, являющемся подмножеством числовой прямой. Это объясняется тем, что в большинстве прикладных задач в качестве критерия выбираются такие функции, для которых либо большее значение всегда предпочтительнее меньшего, либо, наоборот, меньшее значение предпочтительнее большего.

В первом случае критерий часто имеет смысл прибыли, дохода и т. п., выражает степень достижения поставленной цели (например, процент выполнения планового задания) или же отражает «технические» характеристики, которые желательно увеличивать (скажем, удобство работы оператора, которое оценивается экспертами в баллах).

Во втором случае критерий имеет смысл издержек, расхода ресурсов и т. п. или же описывает «технические» характеристики, которые желательно минимизировать (например, загрязнение окружающей среды).

Поскольку второй случай легко сводится к первому, например, заменой f_1 на $-f_1$, то в обоих случаях однокритериальная задача может быть сформулирована в виде задачи максимизации, т. е. задачи, в которой бо́льшие значения критерия предпочтительнее меньших. В задаче максимизации критерия f_1 отношение строгого предпочтения на $\widehat{Y}$ является обычным отношением «больше» ($>$) между числами. Таким образом, критерий f_1 в задаче максимизации играет роль функции ценности: любые два решения x, x'

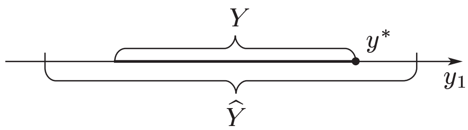

Рис. 2

оказываются сравнимыми по предпочтительности, и лучшим из них является то, для которого значение критерия больше. Следовательно, оптимальной оценкой y^* является наибольшая в Y (см. рис. 2), а оптимальным является любое решение $x^* \in X$, максимизирующее f_1 на X:

$$f_1(x^*) = \max_{x \in X} f_1(x) = y^*.$$

Если такое решение не существует, то вводится в рассмотрение максимизирующая последовательность решений $\{x^{*r}\} \subseteq X$, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{r \to \infty} f_1(x^{*r}) = \sup_{x \in X} f_1(x).$$

Если критерий ограничен на Y сверху, то для любого $\varepsilon > 0$ (т. е. для любой заданной точности) найдется такое число N, что при любом $r > N$ будет справедливо неравенство

$$\sup_{x \in X} f_1(x) - f_1(x^{*r}) \leqq \varepsilon.$$

Заметим, что в прикладных задачах нединамического характера неограниченность критерия сверху или снизу обычно является признаком наличия ошибки в построенной математической модели проблемной ситуации (например, не учтена ограниченность ресурсов).

Легко видеть, что определение оптимального решения адекватно для критерия f_1, имеющего всего лишь порядковую шкалу. Определение максимизирующей последовательности адекватно, когда допустимы непрерывные монотонные преобразования этого критерия.

Не следует думать, что всякая однокритериальная задача легко представляется в виде задачи максимизации путем задания единого направления возрастания предпочтений. Иногда для этого требуется более полная информация о предпочтениях. Для иллюстрации разберем следующий пример [94]. Пусть f_1 — время исполнения заказа, причем для клиента нежелательно как исполнение с запозданием относительно установленного срока t^*, так

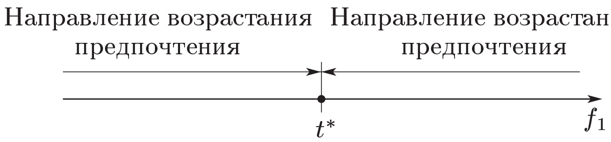

Рис. 3

и досрочное исполнение. В этом случае на шкале Y_1 имеются два направления возрастания предпочтений (рис. 3), и необходима дополнительная информация для сопоставления отклонений $f_1 - t^*$ разных знаков. В частности, если установлено, что отклонения, различающиеся лишь знаками, одинаковы по предпочтительности, то исходную задачу можно свести к задаче минимизации нового критерия $|f_1 - t^*|$.

3. В многокритериальных задачах сравниваются по предпочтительности векторные оценки, т. е. значения векторного критерия $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Естественно, что наиболее просто сопоставлять по предпочтительности те векторные оценки, которые отличаются друг от друга лишь одной компонентой. Поэтому информация о предпочтительности изменения значения одного частного критерия при фиксированных значениях всех остальных критериев является наиболее доступной и достоверной, и именно ее целесообразно получать в первую очередь и использовать для анализа задачи.

В общем случае значения критерия f_l могут по-разному соотноситься по предпочтительности в зависимости от того, какие значения фиксированы у всех остальных критериев. Иначе говоря, для чисел s и t из Y_l может оказаться, например, что оценка $(y_1, \ldots, y_{l-1}, s, y_{l+1}, \ldots, y_m)$ предпочтительнее, чем $(y_1, \ldots \ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1}, \ldots, y_m)$, однако $(y'_1, \ldots, y'_{l-1}, s, y'_{l+1}, \ldots, y'_m)$ менее предпочтительна по сравнению с $(y'_1, \ldots, y'_{l-1}, t, y'_{l+1}, \ldots \ldots, y'_m)$. И тогда сказать, какое из значений s или t критерия f_l предпочтительнее, не указывая значений остальных критериев, невозможно.

Критерий f_l, для которого имеет место указанное положение, называется *зависимым по предпочтению* от остальных. Например, если f_l и f_2 — длина и ширина комнаты, а f_3 — высота потолка, то с точки зрения жильца f_3 зависит по предпочтению от $\{f_1, f_2\}$. Еще пример: каждый из критериев f_1 (температура воздуха) и f_2 (его влажность) зависят по предпочтению один от другого (имеется в виду комфортность для человека).

Однако гораздо чаще встречаются такие критерии, для которых можно упорядочить по предпочтению все их значения без рассмотрения значений остальных критериев. Примерами являются уже упоминавшиеся критерии дохода, издержек и т. п. Такие критерии называются независимыми по предпочтению от остальных [181]. Более точно, критерий f_1 *независим по предпочтению* от остальных $m-1$ критериев, если для любых четырех оценок вида

$$\begin{aligned}&(y_1, \ldots, y_{l-1}, s, y_{l+1}, \ldots, y_m), \quad (y_1, \ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1}, \ldots, y_m),\\ &(y'_1, \ldots, y'_{l-1}, s, y'_{l+1}, \ldots, y_m), \quad (y'_1, \ldots, y'_{l-1}, t, y'_{l+1}, \ldots, y'_m)\end{aligned}$$

из соотношения

$$(y_1, \ldots, y_{l-1}, s, y_{l+1}, \ldots, y_m) R (y_1, \ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1}, \ldots, y_m)$$

всегда следует

$$(y'_1, \ldots, y'_{l-1}, s, y'_{l+1}, \ldots, y'_m) R (y'_1, \ldots, y'_{l-1}, t, y'_{l+1}, \ldots, y'_m).$$

Если критерий f_l независим по предпочтению от совокупности остальных, то на множестве Y_l можно ввести отношение нестрогого предпочтения R_l, полагая $s R_l t$, когда

$$(y_1, \ldots, y_{l-1}, s, y_{l+1}, \ldots, y_m) R (y_1, \ldots, y_{l-1}, t, y_{l+1}, \ldots, y_m)$$

для некоторых двух (а значит, и любых двух) оценок такого вида. Кроме того, и на множестве $\widehat{Y}$ можно ввести отношение нестрогого предпочтения $R_{(l)}$, полагая $y R_{(l)} y'$, когда $y_i = y'_i$ для всех $i \neq l$ и $y_l R_l y'_l$.

Задачи, в которых все критерии независимы по предпочтению, т. е. каждый критерий независим по предпочтению от совокупности всех остальных, а отношением нестрогого предпочтения на множестве значений каждого критерия является отношение $\geqq$ («не меньше»), называются *многокритериальными задачами максимизации.* В таких задачах по каждому критерию желательно иметь возможно большее значение, или, как говорят, каждый критерий желательно максимизировать. Если же в задаче каждый критерий желательно минимизировать, то она называется *многокритериальной задачей минимизации.*

В дальнейшем, за исключением особо оговариваемых случаев, будут рассматриваться многокритериальные задачи максимизации.

Примечание. В ряде работ критерием называется показатель, независимый по предпочтению от совокупности всех остальных показателей, а под многокритериальными понимаются задачи, в которых все показатели независимы по предпочтению.

§ 1.4. Эффективные и слабо эффективные оценки и решения

1. В многокритериальной задаче максимизации из двух векторных оценок, отличающихся лишь одной компонентой, предпочтительнее та, у которой такая компонента больше. А что можно сказать о векторных оценках y и y', для которых выполняются неравенства

$$y_i \geqq y'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m? \tag{1}$$

Разберем вначале случай многокритериальной задачи принятия индивидуального решения. Допустим, что предпочтения принимающего решение описываются отношением нестрогого предпочтения R на $\widehat{Y}$, причем известно, что оно не только рефлексивно, но и транзитивное (т. е. является квазипорядком). Считая, что $\widehat{Y} = Y_1 \times \ldots \times Y_m$, можно записать следующие соотношения для векторных оценок, последовательно используя отношение $\geqq$ для их компонент:

$$\begin{gathered}(y_1, y_2, \ldots, y_m) R (y'_1, y_2, \ldots, y_m),\\ (y'_1, y_2, \ldots, y_m) R (y'_1, y'_2, y_3, \ldots, y_m),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (y'_1, \ldots, y'_{m-1}, y_m) R (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m).\end{gathered}$$

На основании этих соотношений и транзитивности R приходим к заключению, что верно yRy', т. е. векторная оценка y не менее предпочтительна, чем y'.

Если утверждать, что R транзитивно, нельзя, или если $\widehat{Y}$ не представляется прямым произведением $Y_1 \times \ldots \times Y_m$, то формальным путем прийти к сформулированному утверждению yRy' вообще говоря, нельзя. Однако в любом случае оно представляется настолько естественным, что во всех моделях принятия индивидуальных решений вводится как аксиома. Принятие этой аксиомы, называемой часто (сильной) аксиомой Парето, означает введение во множестве оценок $\widehat{Y}$ отношения нестрогого предпочтения, совпадающего с (частичным) порядком $\geqq$ для векторов из E^m *).

Отношению нестрогого предпочтения $\geqq$ соответствуют отношение безразличия $=$ и отношение строгого предпочтения $\geq$ ($y \geq y'$ означает, как указано в § 1.2, что справедливы неравенства (1), причем хотя бы одно из них является строгим).

2. Разберем теперь случай многокритериальной задачи принятия группового решения, когда f_i является функцией ценности индивида i **), входящего в группу $\{1, 2, \ldots, m\}$, так что $f_i(x) \geqq f_i(x')$ означает, что решение x не хуже, чем x' с точки зрения i. В такой задаче отношение предпочтения на множестве оценок $\widehat{Y}$ должно отражать «групповое мнение», агрегирующее индивидуальные. Если $y = y'$, т. е. $f(x) = f(x')$, то вывод о равенстве x и x' по предпочтительности может быть сделан и для группы в целом. Остается рассмотреть вопрос: если в (1) хотя бы одно неравенство строгое, то следует ли считать, что решение x предпочтительнее, чем x'?

Пожалуй, положительный ответ на последний вопрос можно дать не во всех реальных ситуациях. Действительно, если строгое неравенство в (1) всего одно, то это означает, что x предпочтительнее, чем x', лишь для одного члена группы, а для всех остальных оба решения равноценны. Но в некоторых ситуациях может оказаться, что «одного голоса» слишком мало, и тогда группа в целом не обязательно должна считать x предпочтительнее, чем x'.

По-видимому, в разных ситуациях итог сравнения оценок y и y' может зависеть от того, сколько строгих неравенств выполняет-

---

*) Точнее, с его сужением на $\widehat{Y}$. Однако ради простоты записи здесь и в дальнейшем сужения отношений $\geqq$, $\geq$ и других обозначаются так же, как и сами эти отношения.

**) Возможен и более общий случай, когда члены группы «имеют» по несколько критериев.

ся в (1). Однако самым слабым является допущение, состоящее в том, что y для всей группы предпочтительнее y', если в (1) все неравенства строгие. Это допущение, принимаемое почти во всех известных моделях групповых решений (и называемое (слабой) аксиомой Парето), вводит на $\widehat{Y}$ отношение строгого предпочтения, совпадающее с отношением $>$ для векторов из E^m (точнее, с его сужением на $\widehat{Y}$): $y > y'$ верно тогда и только тогда, когда $y_i > y'_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом, в зависимости от специфики задачи отношение строгого предпочтения P может вводиться по-разному, однако оно обязательно будет включать отношение $>$. Различными могут быть также отношения нестрогого предпочтения и безразличия. Вопросы задания всех этих отношений достаточно сложны и являются предметом исследования теории групповых решений [53, 56, 96, 109, 221].

3. Итак, для многокритериальных задач максимизации на множестве $\widehat{Y}$ введены отношение нестрогого предпочтения $\geqq$, два отношения строгого предпочтения $\geq$ и $>$ и отношение безразличия $=$. В соответствии с общим определением (§ 1.2) оценка $y^* \in Y$ называется наилучшей по $\geqq$ (в Y), если для любой оценки $y \in Y$ справедливо $y^* \geqq y$. Так как отношение $\geqq$ является (частичным) порядком, то может существовать только одна такая точка y^* (рис. 4) *).

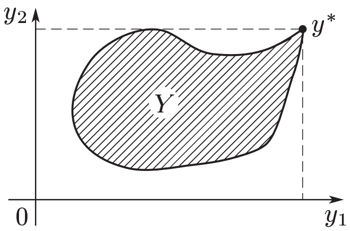

Рис. 4

4. Если в практической многокритериальной задаче существует наибольшая по $\geqq$ достижимая оценка y^*, то именно ее и следует считать оптимальной. К сожалению, такой случай реализуется исключительно редко: как правило, оценка y^* не существует **). Это связано с тем, что порядок $\geq$ не является полным. Например, если $y_i > y'_i$, но $y_j < y'_j$, то y и y' по $\geqq$ не сравнимы. Поэтому, в зависимости от существа задачи, приходится использовать оценки, максимальные по $\geq$ или по $>$ (см. § 1.2).

Оценка $y^0 \in Y$ называется максимальной по $\geq$ (по $>$) относительно Y, если не существует оценки $y \in Y$ такой, что $y \geq y^0$

*) На этом и последующих рисунках множество $\widehat{Y}$ не изображено (можно считать, что $\widehat{Y}$ — все пространство E^2).

**) Условия существования наибольшей по $\geqq$ точки см. в статье [122] и указанной там литературе.

($y > y^0$). Для этих оценок обычно используются специальные названия. Оценка, максимальная по $\geq$, называется *эффективной* *), а также *оптимальной по Парето*, *Парето-оптимальной*, *оптимумом Парето*. Множество всех таких оценок из Y, обозначаемое далее через $P(Y)$, называется *эффективным*, или *множеством Парето*.

Оценка, максимальная по $>$, называется *слабо эффективной*, а также *слабо оптимальной по Парето*, *слабым оптимумом Парето*, *оптимальной по Слейтеру* **). Множество всех таких оценок из Y будем обозначать через $S(Y)$ и называть *слабо эффективным*.

Поскольку $y > y'$ влечет $y \geq y'$, то всякая эффективная относительно Y векторная оценка и слабо эффективна, так что $P(Y) \subseteq S(Y)$. Действительно, если y^0 не является слабо эффективной, то для некоторой $y \in Y$ будет выполняться $y > y^0$, а поэтому и $y \geq y^0$, так что y^0 не может быть эффективной.

При $m = 2$ $P(Y)$ является, образно говоря, северо-восточной границей множества Y (без тех ее частей, которые параллельны одной из координатных осей или лежат в достаточно крутых и глубоких провалах), а $S(Y)$ может дополнительно включать в себя вертикальные и горизонтальные участки границы, прилегающие к $P(Y)$. Так, на рис. 5 множество $P(Y)$ (эффективная граница Y) образовано кривыми bc, de (без точек d и e) и hp, а $S(Y)$ состоит из

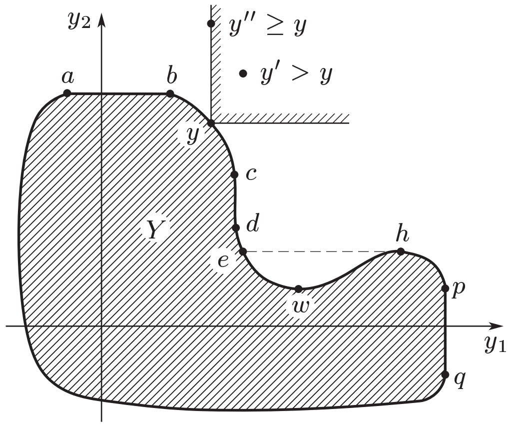

Рис. 5

*) Термины «эффективный» и «f-эффективный» (см. ниже) введены Т. Купмансом [184].

**) Термин «максимальный в смысле Слейтера» введен Л. Гурвичем [30].

двух частей — $abcde$ (включая e) и hpq. В этом легко убедиться, если заметить, что точки, лучшие, чем y, в смысле $\geq$, заполняют прямой угол, стороны которого параллельны осям координат, а вершиной служит точка y (сама y исключается); а точки, лучшие, чем y, в смысле $>$, составляют внутренность этого же угла.

5. Отношения $\geqq$, $\geq$ и $>$, определенные на множестве оценок, порождают аналогичные по смыслу отношения $\gtrapprox_f$, $\gtrsim_f$ и $\succ_f$ во множестве решений. Например, $x \gtrsim_f x' \leftrightarrow f(x) \geq f(x')$. Отношение $\gtrapprox_f$ является (частичным) квазипорядком, а $\gtrsim_f$ и $\succ_f$ — строгими (частичными) порядками. Напомним, что отношение безразличия $\sim_f$, порожденное отношением равенства $=$, является эквивалентностью (см. § 1.3).

Решению, наибольшему по $\gtrapprox_f$, соответствует наибольшая по $\geqq$ оценка из Y. Следовательно, наибольшее по $\gtrapprox_f$ решение обращает в максимум на X каждый из критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Такие решения, как уже отмечалось, безусловно могут считаться оптимальными, однако практически они почти никогда не существуют.

Решению, максимальному по $\gtrsim_f$ (по $\succ_f$), соответствует максимальная по $\geq$ (по $>$) оценка в Y. Обычно для этих решений используются наименования, аналогичные названиям соответствующих оценок. В дальнейшем будут использоваться термины «эффективное» и «слабо эффективное», а также «оптимальное по Парето» и «слабо оптимальное по Парето» решения (заметим, что иногда такие решения называют f-эффективными и слабо f-эффективными соответственно).

Итак, решение $x^0 \in X$ *эффективно*, если не существует решения $x \in X$ такого, что $x \gtrsim_f x^0$, т. е. для которого $f(x) \geq f(x^0)$. Решение $x^0 \in X$ *слабо эффективно*, если не существует решения $x \in X$ такого, что $x \succ_f x^0$, т. е. $f(x) > f(x^0)$. Множество эффективных решений будет обозначаться через $P_f(X)$, а слабо эффективных — через $S_f(X)$. Разумеется, $P_f(X) \subseteq S_f(X)$. Отметим, что задача построения множества $P_f(X)$ названа в работах [41, 187] задачей векторной максимизации.

Примечание 1. В соответствии с общими соображениями, изложенными в примечании 1 к § 1.2, понятие эффективного решения теряет свое значение, когда требуется выбрать несколько лучших решений.

6. Согласно определению внешней устойчивости, данному в § 1.2, множество эффективных оценок $P(Y)$ (слабо эффективных оценок $S(Y)$) называется *внешне устойчивым*, если для любого $y \in Y \backslash P(Y)$ (соответственно для $y \in Y \backslash S(Y)$) найдется такая оценка $y^0 \in P(Y)$ (соответственно $y^0 \in S(Y)$), что $y^0 \geq y$ (соответственно $y^0 > y$). Естественно, можно говорить и о внешне устойчивом множестве эффективных (слабо эффективных) решений как о множестве решений, которому соответствует внешне устойчивое множество эффективных (слабо эффективных) оценок.

В дальнейшем удобнее использовать несколько иное определение внешней устойчивости множества эффективных оценок: *множество $P(Y)$ внешне устойчиво, если для любого $y \in Y$ найдется $y^0 \in P(Y)$ такой, что $y^0 \geqq y$*. Легко видеть, что данное определение эквивалентно вышеприведенному *).

Действительно, пусть $P(Y)$ внешне устойчиво в смысле первого из рассмотренных определений. Возьмем произвольную оценку $y \in Y$. Если $y \in P(Y)$, то верно $y^0 \geqq y$ для $y^0 = y$. Если же $y \notin P(Y)$, то существует такая оценка $y^0 \in P(Y)$, что $y^0 \geq y$, так что верно и $y^0 \geqq y$. Пусть теперь, наоборот, $P(Y)$ внешне устойчиво в смысле второго определения. Выберем произвольную оценку $y \in Y \backslash P(Y)$. Для нее найдется оценка $y^0 \in P(Y)$ такая, что $y^0 \geqq y$. Но так как y не эффективна, а y^0 эффективна, то $y^0 \geq y$. ■

Согласно сделанному в § 1.2 замечанию о существовании ядра квазипорядка на конечном множестве, можно утверждать, что если множество Y состоит из конечного числа оценок, то множества эффективных и слабо эффективных оценок и решений являются внешне устойчивыми. Если же Y бесконечно, то указанные множества могут не быть внешне устойчивыми. Однако при обычных для оптимизационных задач предположениях (X — компакт, а все f_i полунепрерывны сверху) эти множества оказы- ваются внешне устойчивыми (см. § 3.2).

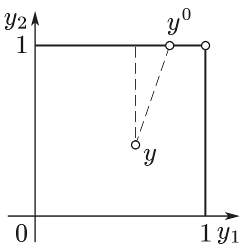

Рис. 6

Пример 1. Пусть Y — единичный квадрат, из которого «выколота» правая верхняя вершина (рис. 6). Для этого Y множество $P(Y)$, очевидно, пусто, а $S(Y)$ образуется верхней и правой сторонами квадрата (без точки $(1, 1)$). Множество $S(Y)$ внешне устойчиво: каждой точке $y \in Y$, у которой $y_1, y_2 < 1$, можно поставить в соответствие, например, точку $y^0 = \left(\dfrac{y_1 + 1}{2}, 1\right)$, причем $y^0 > y$.

*) Следовательно, внешняя устойчивость множества $P(Y)$ означает, что частично упорядоченное (отношением $\geqq$) множество Y конфинально с $P(Y)$ (см. [50], т. 1, с. 33).

В связи с изложенным представляет интерес вопрос о том, когда внешняя устойчивость множества $P(Y)$ равносильна аналогичному свойству множества $S(Y)$? Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Если множество $P(Y)$ внешне устойчиво, то внешне устойчивым является и $S(Y)$. В том случае, когда множество $R(y) = \{y' \in Y \mid y' \geqq y\}$ замкнуто и ограничено при любом $y \in S(Y)$, из внешней устойчивости $S(Y)$ следует внешняя устойчивость $P(Y)$.*

Доказательство. Пусть $P(Y)$ внешне устойчиво. Возьмем произвольную оценку $y \in Y \backslash S(Y)$. Для нее существует $y' \in S(Y)$ такая, что $y' > y$. Для y', в свою очередь, существует эффективная оценка y'' такая, что $y'' \geqq y'$. Следовательно, $y'' > y$. А так как $P(Y) \subseteq S(Y)$, то $y'' \in S(Y)$.

Для доказательства второй части теоремы также возьмем произвольную оценку $y^* \in Y$. Если $y^* \in P(Y)$, то $y^0 \geqq y^*$ при $y^0 = y^*$. Если $y^* \notin S(Y)$, то для некоторой оценки $y^0 \in Y$ верно $y^0 \geq y^*$. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $y^* \notin P(Y)$, но $y^* \in S(Y)$. Благодаря компактности множества $R(y^*)$ функция $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ достигает на нем максимума в некоторой точке y^0. Предположив противное, легко убедиться в том, что $y^0 \in P(Y)$ (этот вывод прямо следует из лемм 2.4–2.6, так как множество $R(y^*)$ замкнуто сверху по $\geq$ относительно Y). Кроме того, в силу определения $R(y^*)$ справедливо $y^0 \geqq y^*$. ■

7. Пусть R — произвольный квазипорядок на множестве X. Векторный критерий f, определенный на X, представляет квазипорядок R, если отношение $\gtrapprox_f$ совпадает с R. При каких условиях существует векторный критерий, представляющий произвольный квазипорядок? Какова минимальная размерность такого критерия? Как его построить? Исследование этих вопросов имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Например, указание представляющего критерия может оказаться экономным способом задания квазипорядка. Однако перечисленные вопросы не имеют прямого отношения к теме книги, и поэтому мы их разбирать не будем. Заинтересованный читатель может обратиться к соответствующей литературе [60, 74, 123, 170, 190].

8. Один из способов задания отношений предпочтения в многокритериальных задачах состоит в следующем: в пространстве E^m выделяется некоторый конус Ω (*конус доминирования*), и полагается, что $yR^{\Omega}y'$, когда $y - y' \in \Omega$. Понятно, что при $\Omega = E^m_{\geqq}$ получается отношение $\geqq$, а при $\Omega = E^m_{>}$ — отношение $>$. Следовательно, многокритериальная задача максимизации является частным случаем задачи оптимизации по конусу [30, 246].

Рассмотрим случай, когда конус Ω является полиэдральным (многогранным): $\Omega = \{y \in E^m \mid By \geqq 0_{(l)}\}$, где B — числовая матрица размерности $l \times m$. Для такого конуса включение $y - y' \in \Omega$ равносильно тому, что $B(y - y') \geqq 0_{(l)}$, т. е. $By \geqq By'$. Следовательно, исходная задача с векторным критерием f, в которой предпочтения задаются при помощи полиэдрального конуса, после введения нового векторного критерия $f^B = (f_1^B, f_2^B, \ldots, f_l^B) = Bf$ оказывается «обычной» многокритериальной задачей максимизации [150, 247].

9. Определение (слабо) эффективного решения является «статическим» в том смысле, что основывается на попарном сравнении решений и не связывается с вопросом о том, возможно ли «плавно» перейти от одного решения к другому, более предпочтительному, инфинитезимально («с положительной скоростью»), увеличивая каждый критерий. А возможность осуществления такого перехода в некоторых моделях представляет большой интерес. Примером является модель чистого обмена, в которой каждый потребитель участвует в обмене, стремясь составить себе набор товаров наибольшей полезности, т. е. формально — максимизировать свою функцию ценности. Такого рода модели рассматривали еще в XIX в. Ф. Эджворт и В. Парето. Эффективным в модели обмена является состояние (распределение товаров между потребителями), которое не может быть улучшено путем перераспределения товаров ни для одного из участников без «ущемления интересов» некоторых других участников. Следовательно, оптимальность по Парето отражает идею экономического равновесия: если состояние не является эффективным, то будет происходить торговля, которая приведет к эффективному состоянию.

Если процесс обмена рассматривать как последовательность мелких сделок, выгодных всем участникам, то формализованно его можно описать гладкой кривой, при движении вдоль которой все критерии инфинитезимально увеличиваются. Тогда можно выделить состояния, из которых не выходит ни одной гладкой кривой такого типа. Такие состояния были названы С. Смейлом критическими точками Парето. Ясно, что множество таких точек (критическое множество Парето) включает все множество слабо эффективных точек, но в общем случае шире последнего (из-за «локального характера» определения критической точки Парето). Так, на рис. 5 в критическое множество Парето, помимо всех слабо эффективных, будут входить решения, оценки которых лежат на участке границы ew, исключая w.

Определение критической точки Парето является обобщением стационарной (критической) точки гладкой функции (т. е. точки, в которой ее градиент обращается в нуль). Подробное рассмотрение описанного «динамического» подхода к определению оптимальности по Парето выходит за рамки данной книги; заинтересованному читателю следует обратиться к работам С. Смейла [95, 223].

10. Множества эффективных и слабо эффективных оценок были выделены из Y на основе некоторых простых характерных свойств отношений предпочтения. Однако эти множества целесообразно рассматривать и в более общей ситуации, когда предполагается лишь, что предпочтения описываются функцией выбора C, определенной на достаточно «богатом» наборе W подмножеств множества $\widehat{Y}$ (разумеется, $Y \in W$).

В рассматриваемом случае многокритериальная задача максимизации определяется следующим условием: *если оценки* $y', y'' \in Z$, $Z \in W$, *таковы, что* $y''_j > y'_j$ *и* $y''_i = y'_i$ *для всех* $m-1$ *остальных* $i \in M$, *то* $y' \notin C(Z)$.

Аксиома Парето в сильном (слабом) варианте формулируется следующим образом: *если для оценки* $y' \in Z$, $Z \in W$, *во множестве* Z *найдется оценка* y'' *такая, что* $y''_i \geqq y_i$ *при всех* $i \in M$, *причем хотя бы одно неравенство строгое* (*соответственно,* $y''_i > y'_i$ *при всех* $i \in M$), *то* $y' \notin C(Z)$.

Эта аксиома, из которой вытекает, что $C(Y) \subseteq P(Y)$ (соответственно $C(Y) \subseteq S(Y)$), часто используется при описании предпочтений функциями выбора [53, 96].

§ 1.5. Теоретическое и практическое значения понятия эффективного решения *)

1. Понятие эффективного решения является прямым обобщением понятия точки максимума числовой функции на случай нескольких функций. Как правило, в прикладных многокритери-

*) В дальнейшем ради краткости термин «эффективное решение» будет также использоваться и в неформальном контексте как обобщающий для эффективных и слабо эффективных (а впоследствии и для собственно и подлинно эффективных) решений.

альных задачах множество таких решений оказывается непустым и, более того, внешне устойчивым (см. § 1.4), и поэтому оптимальные решения должны выбираться именно среди эффективных. Однако если в однокритериальной задаче в качестве оптимального можно брать любое решение, максимизирующее критерий (так как все они эквивалентны), то в многокритериальной задаче обычно множество эффективных решений оказывается весьма богатым неэквивалентными (и содержательно существенно разными) решениями, и для осмысленного выбора оптимального решения необходимо привлечь более полную информацию о предпочтениях. И тем не менее понятие эффективного решения по целому ряду причин играет важнейшую роль в теории многокритериальной оптимизации и практике ее использования.

2. Хотя эффективное решение обычно далеко не единственно, но все-таки множество эффективных решений значительно у́же, чем исходное множество всех решений. Так, на рис. 5 множество эффективных оценок является лишь частью границы множества всех достижимых оценок. Поэтому построение множества эффективных решений (или их оценок) является одним из первых этапов большого числа процедур (особенно интерактивных, т. е. человеко-машинных) и методов многокритериальной оптимизации (см., например, [47, 73, 88]). А некоторые интерактивные методы предусматривают последовательное перемещение от одного эффективного решения к другому, более предпочтительному.

3. В случаях наличия лишь двух или трех критериев множество эффективных оценок можно изобразить графически. Поэтому при анализе двух-, а иногда и трехкритериальных задач, нередко удобнее всего выбирать оптимальное решение непосредственно на основе рассмотрения графика эффективных оценок (см., в частности, [33, 133, 135]). Указанный подход лежит, например, в основе метода «стоимость–эффективность» [8].

Один из вариантов этого метода, широко применяемого для решения задач выбора лучшего из нескольких конкурирующих образцов системы, в общих чертах состоит в следующем.

а) Каждый образец x оценивается по двум критериям: стоимости создания (производства) С и эффективности выполнения поставленных перед системой задач Э. Значения этих критериев рассчитываются по специально разрабатываемым методикам.

б) Строится график оценок, соответствующих всем рассматриваемым образцам системы, а из него выделяются те образцы, из которых и должен быть выбран один — оптимальный образец.

Пример такого графика приведен на рис. 7. Поскольку критерий С желательно минимизировать, а критерий Э — максимизировать, то, например, образец *4* предпочтительнее образца *2* (последний имеет меньшую эффективность и в то же время бо́льшую стоимость). Таким образом, из шести представленных образцов лишь три (первый, третий и четвертый) могут претендовать на роль лучшего. В разбираемом методе эти образцы называют недоминируемыми (общий термин «эффективный» неудобен из-за аналогичного названия критерия Э).

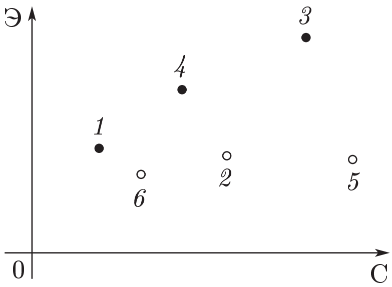

Рис. 7

в) Окончательный выбор оптимального образца производится эвристически (на основании опыта, интуиции, неформализуемых соображений) лицом, принимающим решение, в результате анализа построенного графика, который наглядно показывает, какой ценой (увеличением стоимости) достигается приращение эффективности при переходе от одного недоминируемого образца к другому.

Обобщением рассмотренного метода является метод «стоимость–эффективность–время», в котором наряду с двумя перечисленными ранее вводится еще критерий T — время, необходимое для организации выпуска того или иного образца системы. В этом случае график векторных оценок оказывается пространственным и изображается в наиболее наглядной плоской проекции или же представляется несколькими плоскими сечениями. Общий подход к выбору оптимального образца остается прежним.

4. Сужение множества выбора до множества эффективных решений (или некоторого его подмножества) важно не только само по себе, но еще и потому, что на более узком подмножестве могут выполняться различного рода упрощающие дальнейший анализ допущения о предпочтениях (например, о виде функции ценности), которые заведомо несправедливы для множества всех решений. Кроме того, эффективные решения могут обладать интересными и практически важными свойствами, не присущими остальным решениям. Это обстоятельство хорошо известно и давно используется в математической экономике и теории игр. Много примеров такого рода можно найти, например, в работах [28, 33, 41, 51, 63].

Здесь же мы ограничимся рассмотрением одного сравнительно простого, но содержательного примера, связанного с линейной моделью производства.

Пусть имеется n отраслей, занятых производством n предметов потребления (продуктов). Каждая отрасль может производить только один продукт, но при помощи нескольких производственных (технологических) процессов. Обозначим через Λ_i множество производственных процессов, доступных i-й отрасли; множества Λ_i считаются конечными, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если принять общее количество трудовых ресурсов («труда») за единицу, то интенсивность работы i-й отрасли можно охарактеризовать величиной $u_i \geqq 0$, указывающей долю имеющихся трудовых ресурсов, которая используется в этой отрасли. Ясно, что при полном использовании трудовых ресурсов $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 1$. Вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, компоненты которого неотрицательны и в сумме равны единице, называется осуществимым.

Пусть $a_{ij}^{\lambda_i}$ — количество j-го продукта, производимое i-й отраслью, когда она функционирует с единичным уровнем интенсивности ($u_i = 1$) и применяется производственный процесс $\lambda_i \in \Lambda_i$. Предполагается, что $a_{ij}^{\lambda_i} \leqq 0$, если $i \neq j$, но $a_{ii}^{\lambda_i} > 0$. Отрицательные $a_{ij}^{\lambda_i}$ можно интерпретировать как количество материалов (продуктов), расходуемых в производстве. Поэтому указанное предположение о знаках $a_{ij}^{\lambda_i}$ и означает, что каждая отрасль может использовать все материалы, в то время как производит она только один продукт.

Вектор $a_i^{\lambda_i} = (a_{i1}^{\lambda_i}, a_{i2}^{\lambda_i}, \ldots, a_{in}^{\lambda_i})$ принято называть вектор-процессом i-й отрасли. Каждому производственному процессу λ_i соответствует свой вектор-процесс.

Если для каждой отрасли выбран производственный процесс, т. е. если фиксирован набор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, то чистый выпуск продукта j всей системой будет равен $c_j = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^{\lambda_i}$. Квадратную матрицу, строками которой являются вектор-процессы $a_i^{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будем обозначать через A^λ. Тогда j-я компонента вектора $c = uA^\lambda$ представляет чистый выпуск продукта j для фиксированного набора λ и осуществимого вектора u.

Пусть $\mathscr{A}$ — множество матриц A^λ, каждая из которых соответствует определенному набору $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, в котором

$\lambda_i \in \Lambda_i$. Вектор (векторная оценка) $c = c(c_1, \ldots, c_n)$ называется реализуемым (или достижимым), если $c = uA^\lambda$ для некоторой матрицы A^λ и осуществимого вектора u.

Особый интерес представляют реализуемые векторы c, компоненты которых положительны. В самом деле, если существует реализуемый вектор c, причем $c_j > 0$, то это означает, что можно так организовать производство всех продуктов (т. е. назначить такие λ_i и u_i), что каждая отрасль будет производить продукта больше, чем его требуется для потребления всеми остальными отраслями системы, так что все продукты будут производиться в избытке и их можно будет использовать вне системы.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию разобранной модели. Каждый вектор-процесс $a_i^{\lambda_i}$ можно представить в виде точки пространства E^n. Матрице A^λ соответствует n таких точек (по одной для каждой отрасли). Вектор

$$c = uA^\lambda = \left(\sum_{i=1}^n u_i a_{i1}^{\lambda_i}, \ldots, \sum_{i=1}^n u_i a_{in}^{\lambda_i}\right)^{\lambda_t} = \sum_{i=1}^n u_i a^{\lambda_i}$$

является, очевидно, точкой выпуклой оболочки n вектор-процессов $a_i^{\lambda_i}$. И наоборот, каждая точка выпуклой оболочки этих вектор-процессов будет реализуемым вектором c. Таким образом, множество реализуемых векторов c является объединением выпуклых оболочек векторов $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_n^{\lambda_n}$, образующих матрицы $A^\lambda \in \mathscr{A}$ (каждой такой матрице соответствует определенная выпуклая оболочка).

Для иллюстрации рассмотрим простейший пример с условными числовыми данными.

Пример 1. Пусть

$$n = 2; \quad \Lambda_1 = \{1, 2\}; \quad \Lambda_2 = \{1, 2, 3\};$$
$$a_1^1 = (2, -1); \quad a_1^2 = (5/2, -2);$$
$$a_2^1 = (-1, 1/2); \quad a_2^2 = (-2, 3); \quad a_2^3 = (-4, 4).$$

Здесь каждой матрице $A^\lambda = \begin{pmatrix} a_1^{\lambda_1} \\ a_2^{\lambda_2} \end{pmatrix}$ соответствует выпуклая оболочка, являющаяся отрезком, соединяющим точки $a_1^{\lambda_1}$ и $a_2^{\lambda_2}$. Все такие выпуклые оболочки (отрезки) изображены на рис. 8. Задача наилучшего использования производственных и трудовых ресурсов применительно к нашей модели заключается в том, чтобы обеспечить по возможности наибольший выпуск

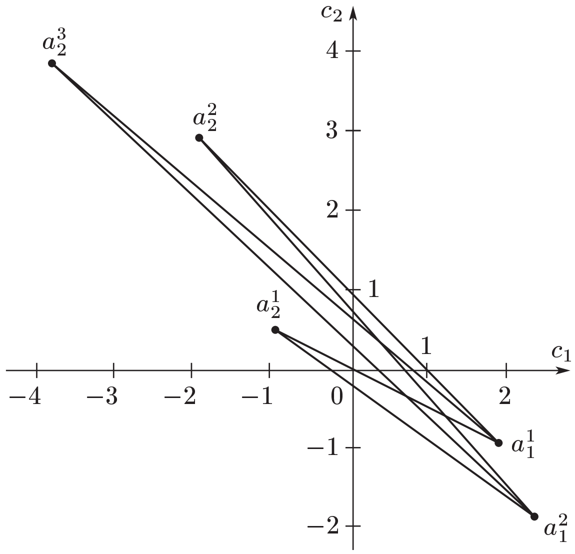

Рис. 8

всех n продуктов, производимых отраслями. План $x = \{\lambda, u\}$, где λ — набор производственных процессов $(\lambda_i \in \Lambda_i)$, u — осуществимый вектор, характеризуется здесь векторным критерием $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$, где c_j — чистый выпуск j-го продукта.

В соответствии с § 1.4 план x^* называется эффективным, если не существует осуществимого вектора u и матрицы A^λ, для которых $c_j(x) \geqq c_i(x^*)$, причем по крайней мере одно из этих неравенств — строгое. Вектор $c(x^*)$, соответствующий эффективному плану x^*, также называется эффективным.

Структура эффективных векторов с положительными компонентами характеризуется следующим утверждением.

Если существует реализуемый вектор с положительными компонентами, то все эффективные векторы с положительными компонентами лежат в выпуклой оболочке вектор-процессов $a_i^{\lambda_i'}$, *составляющих матрицу* $A^{\lambda'} \in \mathscr{A}$, *и каждая точка этой выпуклой оболочки, лежащая в положительном ортанте, является эффективным вектором.*

Доказательство можно найти в книге [41].

Таким образом, оказывается, что если имеется допустимый план, обеспечивающий выпуск каждого продукта с избытком, то для каждой отрасли имеется определенный производственный процесс (входящий в набор λ'), позволяющий получить все эффективные векторы с положительными компонентами лишь за счет перераспределения трудовых ресурсов. Иными словами, любой эффективный план, обеспечивающий выпуск каждого продукта с избытком, либо имеет вид $\{\lambda', u\}$, где u — некоторый осуществимый вектор, либо эквивалентен плану указанного вида. Сформулированное утверждение составляет содержание известной в математической экономике теоремы Самуэльсона о замещении. Подчеркнем, что этот результат получается лишь на основании анализа свойств множества эффективных планов, без решения вопроса о выборе конкретного «оптимального» плана.

В приведенном выше числовом примере $\lambda' = (1, 2)$ и любой эффективный план, обеспечивающий выпуск каждого продукта с избытком, является парой $\{\lambda', u\}$, где $u = (u_1, u_2)$, $1/2 < u_1 < 3/4$, $u_2 = 1 - u_1$. Из рис. 2 можно также усмотреть, что сформулированное утверждение о структуре множества эффективных векторов с положительными компонентами справедливо в силу независимости выбора производственного процесса $\lambda_i \in \Lambda_i$ для каждой i-й отрасли.

5. Большинство методов многокритериальной оптимизации предусматривает выделение оптимального решения непосредственно из множества всех решений. В связи с этим полезно проанализировать методы, чтобы выяснить, всегда ли они приводят к получению эффективного решения, и если нет, то специально предусмотреть возможность улучшения выделяемого решения до эффективного.

Для иллюстрации разберем следующий пример. В статье [106] был изложен оригинальный метод многокритериальной оптимизации для линейных задач, формально состоящий в следующем: вначале находятся точки максимума $x^i \in X$ каждого критерия f_i в отдельности, а затем оптимальное решение x^0 получается как такая выпуклая линейная комбинация точек x^i (т. е. как точка вида

$$x^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \text{где} \quad \lambda_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\Bigr),$$

для которой максимальное из нормированных отклонении значений критериев f_i от соответствующих максимумов $y_i^* = f_i(x^i)$ минимально, т. е.

$$\max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x^0)}{|y_i^*|} = \min_{\lambda} \max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x^{(\lambda)})}{|y_i^*|},$$

где $M = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Указанное определение оптимального решения имеет существенные недостатки. Во-первых, если некоторый критерий имеет несколько точек максимума на X, то не ясно, какую из них следует использовать: каждой x^i будет соответствовать «свое» решение x^0. Во-вторых, полученное указанным путем оптимальное решение, как правило, не будет не только эффективным, но и слабо эффективным. Все это хорошо видно на рис. 9.

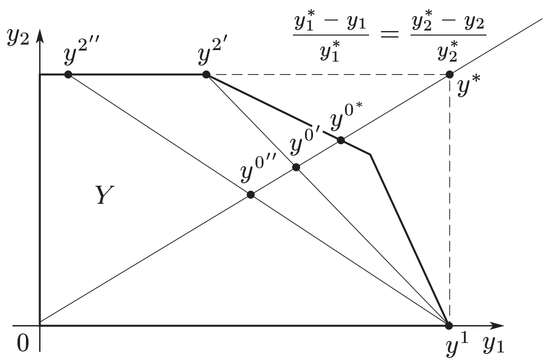

Рис. 9

В статье [217], а затем и в целом ряде других работ разобранное определение было усовершенствовано: оптимальным предложено считать решение x^{0*}, определяемое из условия

$$\max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x^{0*})}{|y_i^*|} = \min_{x \in X} \max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x)}{|y_i^*|}.$$

В § 2.1 будет показано, что решение x^{0*} всегда слабо эффективно, а если оно единственно (с точностью до эквивалентности $\sim_f$), то и эффективно. Легко проверить также, что если x^0 не является слабо эффективным, то $x^{0*} \succ_f x^0$. Это положение иллюстрирует тот же рис. 9.

6. Понятие эффективного решения позволяет не только усовершенствовать некоторые методы многокритериальной оптимизации, но и лучше понять их сущность, а тем самым и уточнить области их практического приложения.

Для примера разберем широко известный метод многокритериальной оптимизации — метод главного критерия. Этот метод состоит в том, что исходная многокритериальная задача сводится к задаче оптимизации по одному критерию f_l, который объявляется главным, или основным, при условии, что значения всех остальных (второстепенных) критериев должны быть не меньше некоторых установленных величин («требуемых уровней», «пороговых значений» и т. п.) t_i, т. е. к задаче

$$f_l(x) \to \max \\ x \in X; \quad f_i(x) \geqq t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad i \neq l. \tag{1}$$

Оптимальным считается всякое решение x^0 этой задачи. Заметим, что такое решение всегда является слабо эффективным, а если оно единственно (с точностью до эквивалентности $\sim_f$), то и эффективным (см. § 2.1). Для лучшего уяснения существа этого метода воспользуемся следующим простым свойством эффективных решений, которое легко установить рассуждением «от противного» (см. теорему 2.1.5):

если решение x^0 эффективно, то оно является единственным (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решением задачи (1) при любом фиксированном $l \in M$ и $t_i = f_l(x^0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $i \neq l$.

Сформулированное утверждение, иллюстрируемое рис. 10 (для $m = 2$, $l = 1$), сразу позволяет сделать следующий вывод: выбор любого эффективного решения x^0 формально эквивалентен назначению в задаче (1) $t_i = f_i(x^0)$ для всех i, причем в качестве главного можно выбрать любой критерий. Это означает, что предварительный выбор одного из критериев в качестве главного еще никак не уменьшает свободы выбора оптимального решения, так что название «главный критерий» весьма условно. Следовательно, вопрос о выборе главного критерия следует решать так, чтобы облегчить назначение величин t_i для ограничений на остальные критерии.

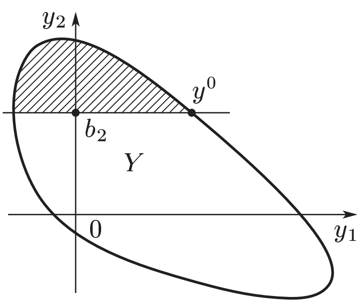

Рис. 10

Практически обычно указывают серию «наборов» $\{t_i\}$ пороговых значений, и для каждого «набора» решают задачу (1) (если t_i слишком велики, то ограничения в (1) могут оказаться несовместными). Далее на основании анализа полученной серии значений производят окончательное назначение величин t_i, чем и определяется выбор оптимального решения.

Процедура назначения серии пороговых величин ограничений и расчета соответствующих значений критериев фактически производится с целью получения представления о наиболее важной области множества (слабо) эффективных оценок при помощи ряда отдельных точек. А затем полученная информация обеспечивает эвристический выбор оптимального решения. Следовательно, метод главного критерия стоит практически применять лишь в тех случаях, когда имеются соображения о примерных значениях величин t_i (или довольно узких пределах для этих величин), позволяющие ограничиться рассмотрением сравнительно небольшой части всего множества (слабо) эффективных решений.

Сформулированное свойство эффективных решений дает возможность аналогичным образом исследовать и предложенный Е. С. Вентцель метод последовательных уступок (см. [85]).

7. Выше было показано, что понятие эффективности (оптимальности по Парето) играет фундаментальную роль для многокритериальных задач принятия индивидуального решения. Это понятие является весьма важным и для задач, представимых в форме многокритериальных, в том числе задач принятия индивидуального решения в условиях риска и неопределенности (при конечном множестве возможных состояний «природы»). Для игровых задач (особенно для кооперативных игр, групповых решений и арбитражных схем) велика роль также и понятия слабой эффективности: в большинстве аксиоматических систем, введенных для определения понятия оптимального решения, требуется, чтобы это решение было слабо оптимальным по Парето (или же слабая оптимальность по Парето, т. е. слабая эффективность, является следствием других аксиом). Мы не будем иллюстрировать указанные положения и отсылаем заинтересованного читателя к соответствующей литературе [16, 53, 56, 96]. Подчеркнем лишь тот факт, что понятие слабой эффективности может оказаться полезным и для задач принятия индивидуального решения.

Действительно, в сложных практических задачах формирование набора критериев является достаточно трудной проблемой. Поэтому один из подходов к построению векторного критерия состоит в том, чтобы вначале составить по возможности наиболее полный перечень критериев, и лишь потом (возможно, в процессе анализа и решения задачи) исключить из рассмотрения «лишние» (несущественные) критерии. В связи с этим возникает вопрос: в каком отношении находятся множество решений, эффективных по полному набору критериев, и множество решений, эффективных по оставшемуся набору. Оказывается, что они могут находиться в общем положении. Это подтверждает следующий простой пример.

Пример 2. Пусть множество X — это плоский пятиугольник (рис. 11), а полный набор критериев состоит из $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$. Для этого набора множество эффективных решений — отрезок AB. Если же отбросить второй критерий, то множество эффективных решений по f_1 — это отрезок BC. Интересно отметить, что если из X «выколоть» точку B, то множества решений, эффективных соответственно по (f_1, f_2) и по f_1, также «лишатся» этой точки и не будут пересекаться.

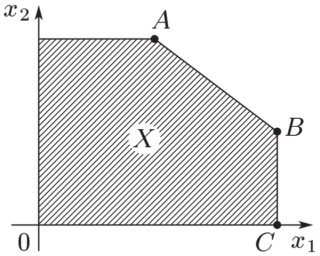

Рис. 11

В то же время, как нетрудно проверить, *всякое решение, слабо эффективное по сокращенному набору критериев, является слабо эффективным и по полному набору.* А поскольку всякое эффективное решение и слабо эффективно, то приходим к такому выводу: после построения наиболее широкого набора критериев, который в дальнейшем может подвергнуться сокращению, следует выделять именно множество слабо эффективных решений, так как если некоторые критерии будут отброшены, то выделенное множество будет содержать все исходные решения, эффективные по окончательно принятому набору критериев.

8. Все вышеизложенное показывает, что понятие эффективного решения действительно оказывается фундаментальным для теории и практики многокритериальной оптимизации. Остается еще заметить, что эффективные решения обладают рядом оригинальных (не присущих точкам максимума числовой функции) свойств, и поэтому представляют интерес и с чисто математической точки зрения.

§ 1.6. Собственно и подлинно эффективные решения

1. Исследования показывают, что среди эффективных могут встретиться оценки (решения), оказывающиеся в определенном смысле аномальными.

Пример 1. $Y = \left\{y \in E^2 \mid y_1 \leqq -(y_2)^2\right\}$. Эффективные оценки образуют часть параболы $y_1 = -(y_2)^2$, лежащую во втором квадранте (рис. 12). К эффективным относится и оценка $y^0 = (0, 0)$. Разности координат эффективных оценок y и y^0 оказываются

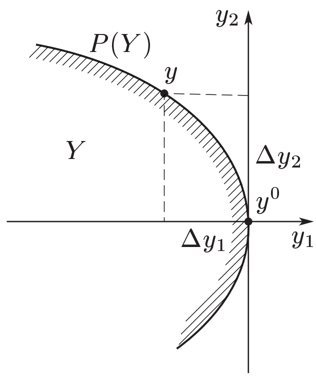

Рис. 12

равными величинам $\Delta y_2 = y_2 - y_2^0 = y_2 > 0$ и $\Delta y_1 = y_1 - y_1^0 = -(\Delta y_2)^2 < 0$. Следовательно, если перейти из точки y^0 в достаточно близкую к ней эффективную точку y, то будет получен выигрыш первого порядка малости по второму критерию за счет проигрыша второго порядка малости по первому критерию. Если критерий f_1 не считать несравненно более важным, чем f_2, то, по-видимому, естественно согласиться на некоторое увеличение f_2, допустив на порядок меньше потери по f_1. Таким образом, оценка y^0 является аномальной: она неустойчива в указанном смысле, и поэтому соответствующее ей решение не может, вообще говоря, претендовать на оптимальное.

Рассмотренный пример показывает, что иногда имеет смысл специально выделять эффективные оценки (и решения), которые лишены подобных нежелательных свойств. Первое определение такого рода эффективных решений, названных собственно эффективными (*proper efficient*), было дано Х. Куном и А. Таккером [187]. Однако оно было сформулировано для дифференцируемого случая и связано со специальными условиями регулярности, позволившими получить необходимые условия оптимальности. Для общего случая определение собственной эффективности было предложено А. Джоффрионом [161].

Эффективная оценка y^0 называется *собственно эффективной*, или *оптимальной по Джоффриону*, если существует такое положительное число θ, что для любых $i \in M$, $y \in Y$, для которых выполняется неравенство

$$y_i > y_i^0, \tag{1}$$

найдется $j \in M$ такое, что

$$y_j < y_j^0 \tag{2}$$

и выполняется неравенство

$$(y_i - y_i^0)/(y_j^0 - y_j) \leqq \theta. \tag{3}$$

Заметим, что поскольку y^0 эффективна, то если существует оценка y, для которой при некотором i выполняется неравенство (1), то обязательно найдется номер j, для которого будет справедливо неравенство (2). Поэтому смысл приведенного определения заключается в требовании существования числа θ, для которого при указанных условиях выполняется (3).

Решения, которым соответствуют собственно эффективные оценки, также называются собственно эффективными, или оптимальными по Джоффриону. Множество всех таких решений (оценок) будем обозначать через $G_f(X)$ $(G(Y))$. Так, в примере 1 множество $G(Y)$ — это верхняя ветвь параболы $y_1 = -(y_2)^2$ (без вершины y^0).

Пример 2. Наилучшая по $\geqq$ оценка $y^0 \in Y$ является собственно эффективной, так как $y^0 \geqq y$ для всех $y \in Y$ и неравенство (1) не выполняется. Следовательно, решение, обращающее в максимум одновременно каждый из критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$ собственно эффективно. В частности, в однокритериальных задачах любое оптимальное решение и собственно эффективно.

Пример 3. Если множество Y конечно, то всякая эффективная оценка является и собственно эффективной. Действительно, в случае конечного Y множество $P(Y)$ внешне устойчиво (§ 1.4). Следовательно, если эффективная оценка y^0 единственна, то она является наилучшей по $\geqq$, и потому собственно эффективной (пример 2). Если же $P(Y)$ содержит более одной оценки, то искомое положительное число θ можно задать равенством

$$\theta = \max\left\{ \frac{y_i - y_i^0}{y_j^0 - y_j} \;\middle|\; y \in Y, \quad i, j \in M, \quad i \neq j; \quad y_i > y_i^0, \quad y_j < y_j^0 \right\}.$$

Итак, если Y конечно (а для этого достаточно конечности множества X), то понятия эффективности и собственной эффективности равносильны.

Эффективная оценка, не являющаяся собственно эффективной, называется *несобственно эффективной*. Аналогичная терминология вводится и для решений.

В соответствии с определением, если y^0 несобственно эффективна, то это означает следующее: для любого сколь угодно большого $\theta > 0$ найдутся такие $i \in M$, $y \in Y$, удовлетворяющие (1), что для всякого j, для которого выполняется (2), будет справедливо неравенство

$$(y_i - y_i^0)/(y_j^0 - y_j) > \theta. \tag{4}$$

Возьмем бесконечно возрастающую последовательность положительных чисел $\{\theta_r\}$: $\lim\limits_{r\to\infty} \theta_r = +\infty$. Если y^0 несобственно эффективна, то каждому $r = 1, 2, \ldots$ можно поставить в соответствие номер $i(r)$, для которого при некотором $y \in Y$ справедливо неравенство (1). Так как множество M конечно, то в последовательности $\{i(r)\}$ по крайней мере один номер i повторяется бесконечное число раз. Пусть этому номеру соответствует последовательность индексов $\{r_l\}$. Таким образом, для любого члена бесконечно возрастающей последовательности $\{\theta_{r_l}\}$ существует такая оценка $y \in Y$, у которой $y_i > y_i^0$, и при любом j, удовлетворяющем (2), выполняется неравенство (4) с $\theta = \theta_{r_l}$.

Изложенное означает, что переходом от несобственно эффективного решения к некоторому другому можно обеспечить приращение по крайней мере по одному частному критерию за счет потерь более высокого порядка малости по всем тем критериям, значения которых уменьшатся. Иными словами, несобственно эффективные решения в указанном смысле аномальны (неустойчивы).

Примечание 1. Как уже указывалось, понятия собственно эффективных оценок и решений не имеет смысла вводить в тех случаях, когда одни критерии несравненно важнее других. Задачи, в которых критерии упорядочены по важности (и перенумерованы) так, что каждый предыдущий несравненно важнее, чем все последующие, называются лексикографическими задачами оптимизации, так как в таких задачах отношение нестрогого предпочтения является лексикографическим порядком $\geqq^{\text{lex}}$. Этот порядок задается следующим образом: $y \geqq^{\text{lex}} y'$, когда выполнено одно из условий:

$$
\begin{aligned}
1)&\ y_1 > y_1';\\
2)&\ y_1 = y_1', \quad y_2 > y_2';\\
&\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m)&\ y_i = y_i', \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad y_m > y_m';\\
m+1)&\ y = y'.
\end{aligned}
$$

Отношение $\geqq^{\text{lex}}$, являющееся полным, упорядочивает оценки подобно тому, как располагаются слова в словаре, этим объясняется происхождение прилагательного «лексикографический». Из определения видно, что в лексикографической задаче следует добиваться сколь угодно малого приращения более важного критерия за счет сколь угодно больших потерь по всем остальным, менее важным критериям. Именно поэтому лексикографически оптимальная (наилучшая по $\geqq^{\text{lex}}$) оценка не обязана быть собственно эффективной, хотя, как легко убедиться, она обязательно является эффективной. Так, в примере 1 (рис. 12) оценка y^0 лексикографически оптимальна и эффективна, но не является собственно эффективной.

Лексикографические задачи оптимизации обстоятельно рассматриваются в [85].

2. В § 4 было указано, что задача многокритериальной оптимизации является специальным случаем задачи оптимизации относительно конуса. Однако понятие собственной эффективности (по Джоффриону) существенно использует «координатный» характер отношения $\geqq$ и поэтому на более общий случай оптимизации относительно конуса прямо не переносится. В связи с этим Борвейн [124] предложил общее определение собственной эффективности, которое мы сформулируем здесь применительно к многокритериальной задаче оптимизации.

Для этого понадобится понятие касательного конуса. *Касательным конусом* $T(A, y^0)$ ко множеству $A \subseteq E^m$ в точке $y^0 \in \overline{A}$ называется множество всех векторов из E^m, которые являются предельными точками вида $w = \lim\limits_{r\to\infty} t_r(y^r - y^0)$, где $\{t_r\}$ — последовательность неотрицательных чисел, а $\{y^r\}$ — последовательность точек из A, сходящаяся к y^0.

На рис. 13 представлены касательные конусы ко множеству $A \subset E^2$ в трех его граничных точках. Заметим, что для внутренней

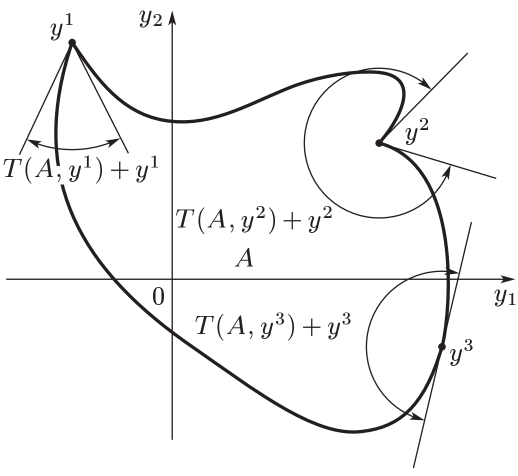

Рис. 13

точки множества A касательным конусом является все пространство E^m. Касательный конус $T(A, y^0)$ представляет один из видов аппроксимации множества A в точке y^0. Нетрудно проверить, что касательный конус действительно является конусом с вершиной в начале координат, и притом замкнутым.

Теперь можно сформулировать определение собственной эффективности по Борвейну, которую будем называть подлинной эффективностью (при этом полагаем $\widehat{Y} = E^m$).

Оценка $y^0 \in Y$ называется *подлинно эффективной*, или *оптимальной по Борвейну*, если она эффективна и

$$T(Y_*, y^0) \cap E^m_{\geqq} = \{0_{(m)}\}, \tag{5}$$

где

$$Y_* = Y - E^m_{\geqq} = \big\{z \in E^m \mid z = y - e,\ y \in Y,\ e \in E^m_{\geqq}\big\}. \tag{6}$$

Решения, оценки которых подлинно эффективны, также называются *подлинно эффективными*. Множество всех таких решений (оценок) будем обозначать через $B_f(X)$ (соответственно, $B(Y)$). Согласно определению подлинной эффективности $B(Y) \subseteq P(Y)$ и $B_f(X) \subseteq P_f(X)$.

Пример 4. Для примера 1 $Y_* = Y \cup \big\{y \in E^2 \mid y_1 \leqq 0,\ y_2 \leqq 0\big\}$. Здесь каждая эффективная оценка, кроме y^0, подлинно эффективна (так что $B(Y) \subset P(Y)$).

Теорема 1. *Собственно эффективная оценка является и подлинно эффективной.*

Доказательство. Пусть $y^0 \in G(Y)$, но $y^0 \notin B(Y)$, т. е. существует вектор $a \in T(Y_*, y^0)$, все компоненты которого неотрицательны и по крайней мере одна, скажем a_l, положительна.

Пусть $t_r(y^r - b^r - y^0) \to a$, где $b^r \in E^m_{\geqq}$, $t_r \geqq 0$, $y^r - b^r \to y^0$, $y^r \in Y$. Поскольку множество M конечно, то, при необходимости перейдя к подпоследовательности, можно считать, что множество

$$\widetilde{M} = \{i \in M \mid y_i^r < y_i^0\}$$

постоянно для всех r (оно непусто, так как $y^0 \in P(Y)$). Кроме того, так как $a_l > 0$, то без ограничения общности все числа t_r можно считать положительными. Возьмем произвольное $\theta > 0$. Тогда для достаточно большого числа N при любом $r \geqq N$ будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &y_l^r - y_l^0 \geqq a_l/2t_r, \\ &y_i^r - y_i^0 \geqq -a_l/2\theta t_r, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad i \neq l. \end{aligned}$$

Поэтому для каждого $i \in \widetilde{M}$

$$0 < y_i^0 - y_i^r \leqq a_l/2\theta t_r.$$

Следовательно, для каждого $r \geqq N$ и любого $i \in \widetilde{M}$

$$\frac{y_l^r - y_l^0}{y_i^0 - y_i^r} \geqq \frac{2a_l\theta t_r}{2a_l t_r} = \theta,$$

а это противоречит $y^0 \in G(Y)$. ■

Теорема 1 показывает, что $G(Y) \subseteq B(Y)$ и $G_f(X) \subseteq B_f(X)$. В примере 1 несобственно эффективная оценка y^0 не является и подлинно эффективной, так что $G(Y) = B(Y)$. Однако возможно и строгое включение $G(Y) \subset B(Y)$.

Пример 5. $Y = \{y \in E^2 \mid y_2 = 1/y_1, y_1 > 0\}$. Здесь каждая оценка эффективна и, очевидно, подлинно эффективна (так что $Y = P(Y) = B(Y)$), но не является собственно эффективной ($G(Y) = \varnothing$). Действительно, для y и $y^t = (t, 1/t)$, где $t > y_1$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_1^t - y_1}{y_2 - y_2^t} = +\infty.$$

Следует отметить, что переход из произвольной точки y в достаточно близкую точку $y + \Delta y$ дает уменьшение и увеличение критериев одинакового порядка малости.

Этот пример подводит к выводу о том, что понятие собственной эффективности излишне «жесткое»: оно «выбраковывает» и такие эффективные решения, которые вполне могут «претендовать» на оптимальные. Поэтому определение Борвейна представляет и самостоятельный интерес для многокритериальных задач оптимизации.

3. Выше были введены понятия эффективности нескольких типов и установлена определенная взаимосвязь между ними, схематически представленная на рис. 14. Этой схеме соответствуют следующие включения для множеств оценок и решений, эффективных в различных смыслах:

$$\begin{gathered} G(Y) \subseteq B(Y) \subseteq P(Y) \subseteq S(Y), \\ G_f(X) \subseteq B_f(X) \subseteq P_f(X) \subseteq S_f(X). \end{gathered} \tag{7}$$

Примеры, приведенные в этом и предыдущих параграфах, показывают, что каждое из этих включений, вообще говоря, строгое.

В связи с этим большой интерес представляет вопрос о том, при каких условиях (в каких случаях) понятия эффективности

Рис. 14

различного типа оказываются эквивалентными, а множества соответствующих оценок и решений — равными. Это объясняется тем, что анализ условий совпадения решений, эффективных в различных смыслах, позволяет оценить степень взаимной близости понятий эффективности разных типов, а также дает возможность прямого переноса того или иного результата, полученного для эффективных решений одного типа, на другой. В примере 3 было показано, что для задач с конечным множеством допустимых решений понятия эффективности и собственной эффективности, а значит, и подлинной эффективности совпадают. В дальнейших главах исследование поставленного вопроса будет продолжено. Здесь мы докажем лишь одно утверждение, которое понадобится в следующей главе (см., например, [4, 77]).

Теорема 2. *Если множество X выпукло, а вектор-функция f строго квазивогнута* *), *то*

$$S_f(X) = P_f(X), \quad S(Y) = P(Y).$$

Доказательство. Учитывая включения (7), остается проверить, что $S_f(X) \subseteq P_f(X)$. Предположим, что $x^0 \in S_f(X)$, но $x^0 \notin P_f(X)$, т. е. существует $x' \in X$ такое, что верно $f(x') \geq f(x^0)$. В силу строгой квазивогнутости f для точки $x = (x' + x^0)/2 \in X$ должно выполняться $f(x) > f(x^0)$, что противоречит слабой эффективности x^0. ■

*) Определение строго квазивогнутой функции приведено в § 2.2.

§ 1.7. Эффективные последовательности оценок и решений

1. Как известно, далеко не у всякой однокритериальной задачи существуют оптимальные решения. Много таких примеров можно найти в теории оптимального управления (см., например, [52]). Поэтому естественно ожидать, что встречаются и многокритериальные задачи, в которых множество слабо эффективных решений не является внешне устойчивым, а то и вовсе пусто.

Пример 1. Пусть управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot z_1(t) = \sin 2\pi x_1(t), && z_1(0) = 0,\\
&\dot z_2(t) = \cos 2\pi x_1(t), && z_2(0) = 0,\\
&\dot z_3(t) = \sin 2\pi x_2(t), && z_3(0) = 0,\\
&\dot z_4(t) = \cos 2\pi x_2(t), && z_4(0) = 0,\\
&\dot z_5(t) = 1 - z_1^2(t) - z_2^2(t), && z_5(0) = 0,\\
&\dot z_6(t) = 1 - \dot z_3^2(t) - \dot z_4^2(t), && z_6(0) = 0,
\end{aligned}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — выбираемые независимо друг от друга управления — кусочно-непрерывные функции, определенные на отрезке $[0, 1]$. Критерии f_i и f_2 определяются следующим образом:

$$f_1 = e^{z_5(1)} \cos\left[3\pi\left(z_6(1) - \frac{2}{3}\right)\right],$$

$$f_2 = e^{z_5(1)} \sin\left[3\pi\left(z_6(1) - \frac{2}{3}\right)\right].$$

Выясним вначале, какие значения $z_5(1)$ и $z_6(1)$ могут быть достигнуты. Поскольку при любом управлении $x_1(t)$ обе координаты $z_1(t)$ и $z_2(t)$ не могут одновременно тождественно равняться нулю, то $z_5(1) < 1$. Однако можно получить значение $z_5(1)$, сколь угодно близкое к 1. Действительно, пусть $x_1(t) = kt$, где $k > 0$. Найдем соответствующие значения $z_1(t)$, $i = 1, 2, 5$:

$$z_1(t) = \frac{1}{2\pi k}(1 - \cos 2\pi kt), \quad z_2(t) = \frac{1}{2\pi k}\sin 2\pi kt,$$

$$z_5(t) = \left[1 - \frac{1}{2\pi^2 k^2}\right]t + \frac{1}{4\pi^3 k^3}\sin 2\pi kt.$$

Следовательно,

$$z_5(1) = 1 - 1/(2\pi^2 k^2),$$

и при неограниченном росте k это значение стремится к единице.

Минимальное значение $z_5(t)$ можно получить при любом постоянном управлении $x_1(t) \equiv a$, и это значение равно $2/3$. Любое значение между $2/3$ и 1 можно достичь, надлежащим образом комбинируя на $[0, 1]$ рассмотренные управления.

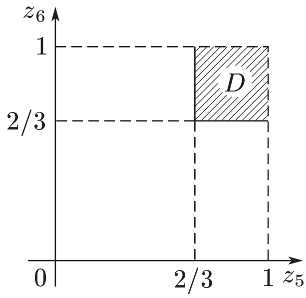

Рис. 15

Аналогичные рассуждения показывают, что множеством возможных значений $z_6(1)$ является интервал $[2/3, 1)$. Поскольку $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выбираются независимо друг от друга, то множество достижимости по координатам z_5, z_6 при $t = 1$ есть незамкнутый квадрат D, изображенный на рис. 15.

Поэтому множество Y возможных значений векторного критерия (f_1, f_2) оказывается незамкнутой фигурой, представленной на рис. 16. В этом можно убедиться, если ввести комплексную переменную $z_5 + iz_6$ и рассмотреть функцию

$$f_1 + if_2 = e^w,$$

где $w = z_5 + i3\pi(z_6 - 2/3)$, которая задает конформное отображение D на Y.

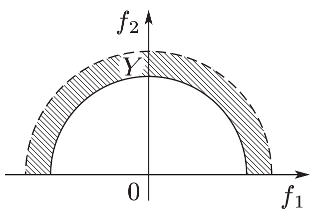

Рис. 16

Рис. 16 наглядно показывает, что множество эффективных оценок $P(Y)$ (и слабо эффективных оценок $S(Y)$) здесь является пустым.

2. Для однокритериальных задач, в которых оптимальное решение не существует, приходится использовать понятие максимизирующей последовательности (см. § 1.3). Это понятие оказывается полезным и в тех случаях, когда оптимальное решение существует, так как позволяет анализировать итеративные методы оптимизации, широко применяемые для решения прикладных задач.

Естественно, что понятие максимизирующей последовательности целесообразно обобщить и на многокритериальные задачи. Это можно сделать при помощи понятия ε-эффективной оценки, где $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$ [77, 78].

Оценка $y^0 \in Y$ называется *ε-максимальной* (по $\geq$ относительно Y), или *ε-эффективной*, если не существует оценки $y \in Y$ такой, что $y \geq y^0 + \varepsilon$. Отметим, что *ε-эффективной* при любом $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$ является произвольная эффективная оценка.

Последовательность оценок $\{y^k\} \subseteq Y$ называется *эффективной*, если либо $\lim\limits_{k\to\infty} y_i^k = +\infty$ для каждого $i \in M$, либо для любого ненулевого вектора $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$ существует такое число N, что для всякого $k > N$ оценка y^k будет ε-эффективной. Например, последовательность, состоящая из эффективных оценок, эффективна. Поэтому эффективная последовательность может не быть сходящейся.

3. Соответствующие определения сразу вводятся и для решений:

решение $x^0 \in X$ называется *ε-эффективным*, если его оценка y^0 является *ε-эффективной*;

последовательность решений $\{x^k\} \subseteq X$ называется *эффективной*, если соответствующая ей последовательность оценок $\{y^k\}$ эффективна.

Свойства эффективных последовательностей оценок и решений подробно разбираются в § 2.7.

§ 1.8. Эквивалентные векторные критерии

1. При изучении ряда вопросов многокритериальной оптимизации и, в частности, при выделении множеств (слабо) эффективных решений используется по существу не сам векторный критерий f, а порождаемые им отношения предпочтения $\succsim_f$, $\succ_f$ и отношение безразличия $\sim_f$ во множестве решений X. Поэтому, например, если для нескольких векторных критериев f^1, $f^2, \ldots$ соответствующие отношения $\succsim_{f^1}, \succsim_{f^2}, \ldots$ (или же $\succ_{f^1}, \succ_{f^2}, \ldots$) совпадают, то для отыскания эффективных (слабо эффективных) решений можно использовать тот из критериев, который наиболее удобен в вычислительном отношении. В обычных, однокритериальных задачах оптимизации такой подход используется широко и плодотворно.

Эти соображения указывают на целесообразность введения следующего определения, в котором через $\eqslantgtr$ ($\widetilde{\succ}_f$) обозначается отношение в $\widehat{Y}$ (соответственно в X), являющееся объединением $>$ и $=$ (соответственно $\succ_f$ и $\sim_f$) *)).

*) Новые обозначения введены здесь для упрощения записи, и отношения $\eqslantgtr$ и $\widetilde{\succ}_f$ не обязательно интерпретировать как отношения нестрогого предпочтения, например, в задачах группового выбора (см. § 1.4).

Векторные критерии $f^1 = (f_1^1, f_2^1, \ldots, f_{m_1}^1)$ и $f^2 = (f_1^2, f_2^2, \ldots$ $\ldots, f_{m_2}^2)$, определенные на X, называются *эквивалентными* по $\gtrapprox$ (по $\succeq$), если порождаемые ими в X отношения $\gtrapprox_{f^1}$ и $\gtrapprox_{f^2}$ ($\succeq_{f^1}$ и $\succeq_{f^2}$) совпадают, т. е. если для любых x, $x' \in X$ верно $f^1(x) \geqq f^1(x')$ (соответственно $f^1(x) \geqslant f^1(x')$)) тогда и только тогда, когда $f^2(x) \geqq f^2(x')$ (соответственно $f^2(x) \geqslant f^2(x')$).

Из этого определения следует, что эквивалентные по $\gtrapprox$ (по $\succeq$) критерии порождают в X одни и те же отношения строгого предпочтения $\gtrsim_f$ ($\succ_f$) и безразличия $\sim_f$. Поэтому, в частности, им соответствует одно и то же множество эффективных (слабо эффективных) решений.

Предположим, что критерий f' получен из f перестановкой частных критериев. Очевидно, f и f' эквивалентны и по $\gtrapprox$, и по $\succeq$. Следовательно, множества $P_f(X)$ и $S_f(X)$ инвариантны относительно перенумерации частных критериев. Подчеркнем, что речь идет об инвариантности этих множеств именно в целом: выбираемое по некоторым соображениям эффективное или слабо эффективное решение таким свойством, вообще говоря, не обладает (например, лексикографически оптимальное решение всегда эффективно, однако после перенумерации критериев, оставаясь эффективным, оно может не быть лексикографически оптимальным). Заметим, что надлежащим образом сформулированные свойства независимости или же зависимости выбора решений от нумерации критериев лежат в основе аксиоматической теории важности критериев [82, 96].

Приведем несколько известных простых утверждений (см., например, [77]), позволяющих в ряде случаев решать вопрос об эквивалентности векторных критериев, а также строить новые критерии, эквивалентные данному.

Лемма 1. *Если критерии f^1 и f^2 эквивалентны по $\gtrapprox$ или $\succeq$, то эквивалентны в том же смысле и критерии $f' = (f_1^1, f_2^1, \ldots$ $\ldots, f_m^1, \psi)$ и $f'' = (f_1^2, f_2^2, \ldots, f_m^2, \psi)$, где ψ — произвольная числовая функция, определенная на X.*

Лемма 2. *Пусть ζ — возрастающая на Y_j числовая функция; тогда критерии $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ и $f' = (f_1, f_2, \ldots, f_{j-1},$ $\zeta(f_j), f_{j+1}, \ldots, f_m)$ эквивалентны по $\gtrapprox$ и $\succ$.*

Лемма 3. *Если $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — неубывающая по $\geq$ (возрастающая по $>$) на Y числовая функция, то критерии $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ и $f' = (f_1, \ldots, f_m, \varphi(f_1, \ldots, f_m))$ эквивалентны по $\gtrapprox$ (по $\succeq$).*

В справедливости этих лемм легко убедиться, исходя непосредственно из определений отношений $\gtrapprox_f$ и $\overset{\sim}{\succ}_f$. Докажем, например, лемму 3.

Пусть $f(x) \geqq f(x')$. Если φ — неубывающая по $\geq$ функция, то при этом $\varphi(f(x)) \geqq \varphi(f(x'))$, так что $f'(x) \geqq f'(x')$. Если же $f(x) > f(x')$ и φ возрастает по $>$, то $\varphi(f(x)) > \varphi(f(x'))$, и поэтому также $f'(x) > f'(x')$. Пусть теперь $f'(x) \geqq f'(x')$. Тогда $f(x) \geqq f(x')$. А если $f'(x) > f'(x')$, то $f(x) > f(x')$. ■

Лемма 1 показывает, что если была установлена эквивалентность критериев f^1 и f^2, а затем оказалось, что многокритериальная модель принятия решений неадекватна реальной проблемной ситуации и необходимо добавить еще один или несколько частных критериев, которые также желательно максимизировать, то «расширенные» векторные критерии вновь окажутся эквивалентными.

Лемма 2 говорит о том, что отношения $\gtrapprox_f$ и $\overset{\sim}{\succ}_f$ не изменяются при произвольных монотонных преобразованиях частных критериев. Практически это означает, что отношения $\sim_f$, $\succsim_f$ и $\succ_f$ (а потому и множества $P_f(X)$ и $S_f(X)$) можно вводить в любых многокритериальных задачах максимизации как с количественными, так и с качественными критериями (т. е. допустимо, чтобы шкалы частных критериев были всего лишь порядковыми).

Монотонные преобразования можно использовать и для приведения частных критериев к более удобному виду, облегчающему анализ задачи и построение множеств $P_f(X)$, $S_f(X)$. Например, критерий $f_i(x) = \exp\Big[-\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j)^2\Big]$ не является вогнутым на E^n, но его можно заменить на вогнутую функцию $-\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j)^2$ (так как функция $\ln t$ возрастает на $(0, +\infty)$). Критерий $f_i(x) = -|\xi(x)|$, где ξ — дифференцируемая функция, терпит «излом» при $\xi(x) = 0$, но вместо него можно использовать гладкую функцию $-\xi^2(x)$ (ибо $-t^2$ возрастает на $(-\infty, 0]$).

Отметим еще, что любой критерий f_i можно заменить на $kf_i + l$ (где $k > 0$), a^{f_i} $(a > 1)$, b^{-f_i} $(0 < b < 1)$ или на f_i^c (c — нечеткое положительное число). Если критерий f_i положителен на X, то вместо него можно взять $f_i^\alpha (\alpha > 0)$, $-1/f_i$ или $\log_\beta f_i$ $(\beta > 1)$, а неотрицательный критерий f_i можно преобразовать в f_i^μ $(\mu > 0)$. Указанные преобразования плодотворно применяются к критериям в обычных экстремальных задачах.

Для практического использования леммы 3 (и других утверждений, в которых говорится о неубывающих и возрастающих по $\geq$ или $>$ функциях *)) полезной оказывается

Л е м м а 4. *Если функция $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ определена на $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m \subseteq E^m$ и является неубывающей по каждой переменной y_i (возрастающей по каждой переменной y_i; неубывающей по каждой и возрастающей хотя бы по одной переменной y_i) при любых фиксированных значениях остальных переменных $y_j \in Z_j$, то она является неубывающей по $\geq$ и $>$ (возрастающей по $\geq$; возрастающей по $>$).*

Действительно, если $y \geqq y'$ и φ не убывает по каждой переменной y_i, то

$$\varphi(y) \geqq \varphi(y'_1, y_2, \ldots, y_m) \geqq \varphi(y'_1, y'_2, \ldots, y_m) \geqq \ldots \geqq \varphi(y'),$$

откуда $\varphi(y) \geqq \varphi(y')$. Если $y \geq y'$, а φ возрастает по каждой переменной y_i, то в цепочке неравенств для φ хотя бы один раз встретится $>$, и в итоге будет $\varphi(y) > \varphi(y')$. Наконец, если $y > y'$, а φ не убывает по каждой переменной y_i и возрастает хотя бы по одной y_i, то в этой цепочке опять хотя бы один раз встретится $>$, и поэтому $\varphi(y) > \varphi(y')$. ■

Например, лемма 4 показывает, что функция $\varphi(y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i y_i$, где все $\mu_i \geqq 0$, но хотя бы одно $\mu_i > 0$ (и, в частности, функция $\varphi(y) = y_j$) является неубывающей по $\geq$ и возрастающей по $>$ на E^m. Следовательно, учитывая лемму 3, при построении множеств $P_f(X)$ и $S_j(X)$ можно из нескольких повторяющихся частных критериев оставить лишь один, и можно отбросить частный критерий, являющийся линейной комбинацией с положительными коэффициентами всех или нескольких остальных критериев.

П р и м е ч а н и е. Интересным является вопрос о том, в какой мере достаточные условия, указанные в лемме 4, являются и необходимыми. Легко видеть, что если $\varphi(y)$ — неубывающая по $\geq$ функция на $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m$, то она не убывает и по каждой переменной. Обладает ли аналогичным свойством функция φ, возрастающая по $>$?

Рассмотрим простой пример: $m = 2$, $Z_1 = Z_2 = \{0, 1\}$, $\varphi(0, 0) = 0, \varphi(0, 1) = \varphi(1, 0) = -1, \varphi(1, 1) = 1$. Здесь φ возрастает

*) Так как $y > y'$ влечет $y \geq y'$, то функция, неубывающая (возрастающая) по $\geq$, является неубывающей (возрастающей) и но $>$.

по $>$ на $\{0,1\} \times \{0,1\}$, тем не менее по каждой переменной не является даже неубывающей.

Справедливо, однако, утверждение (см. [77]): *функция* φ, *непрерывная и возрастающая по* $>$ *на открытом множестве* $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m \subseteq E^m$, *является неубывающей по каждой переменной.*

Для доказательства допустим, что утверждение неверно, так что найдутся такие $y', y'' \in Z$, что $y'_j > y''_j$, $y'_i = y''_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq j$, однако $\varepsilon = \varphi(y'') - \varphi(y') > 0$. Возьмем такое достаточно малое $\delta > 0$, чтобы $y^\delta = (y'_1 + \delta, \ldots, y'_m + \delta) \in Z$ и $|\varphi(y^\delta) - \varphi(y')| < \varepsilon$. Тогда

$$\varphi(y^\delta) - \varphi(y'') \leqq |\varphi(y^\delta) - \varphi(y')| + \varphi(y') - \varphi(y'') < \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

Следовательно, $\varphi(y^\delta) < \varphi(y'')$, хотя $y^\delta > y''$, а это противоречит предположению о том, что φ возрастает по $>$. ■

2. Легко убедиться в том, что определение эффективной последовательности адекватно при возрастающих непрерывных преобразованиях критериев. Это объясняется тем, что в указанном определении по существу используется топологическое понятие окрестности точки в критериальном пространстве.

3. Определения собственно и подлинно эффективных решений связаны с конфигурацией множества допустимых оценок. Поэтому эти определения, как нетрудно проверить, адекватны при аффинных положительных преобразованиях критериев (при умножении на положительное число и прибавлении константы). Следовательно, понятия собственно и подлинно эффективных решений имеет смысл использовать лишь в тех задачах, в которых все критерии являются количественными.

Г Л А В А 2

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В этой главе в зависимости от свойств критериев и структуры множества допустимых решений формулируются различного рода необходимые и достаточные условия того, чтобы данное решение или данная оценка были в том или ином смысле оптимальными (эффективными). Как и в обычных экстремальных задачах, знание условий оптимальности позволяет разрабатывать методы отыскания эффективных решений и способы проверки эффективности выделенного решения. Кроме того, эти условия позволяют глубже понять природу и взаимосвязь различного типа эффективных решений, а также исследовать структуру и свойства множеств эффективных решений и оценок.

Учитывая взаимосвязь различных понятий эффективности, схематически представленную на рис. 1.14, следует иметь в виду, что условия, являющиеся достаточными для эффективности в некотором указанном смысле, оказываются достаточными и для эффективности в более широком смысле. И наоборот, условия, являющиеся необходимыми для эффективности в установленном смысле, оказываются необходимыми для эффективности в более узком смысле. Например, условие, достаточное для собственной эффективности, будет достаточным для всех трех других типов эффективности, включая слабую. А условие, необходимое для слабой эффективности, будет необходимым и для всех остальных трех типов эффективности, в том числе и для собственной.

В первом параграфе главы устанавливаются условия оптимальности для общего случая, т. е. без каких-либо ограничительных предположений о структуре множества допустимых решений и свойствах векторного критерия. В последующих пяти параграфах рассматриваются многокритериальные задачи различных классов (вогнутые, линейные и т. д.), и для них приводятся более содержательные условия оптимальности. При доказательстве этих условий оптимальности широко используются теоремы об альтернативе для систем линейных и вогнутых неравенств. Последний, седьмой, параграф посвящен обсуждению свойств эффективных последовательностей.

Поскольку в этой и всех последующих главах проводится чисто аналитическое исследование многокритериальных задач, формальная постановка и содержательный смысл которых были подробно разобраны в гл. 1, то далее широко используется и общематематическая терминология: решения и их оценки часто называются точками соответствующих множеств (X и Y), критерии f_i — функциями и т. п.

§ 2.1. Общие условия оптимальности

Здесь устанавливаются условия оптимальности без каких-либо существенных предположений относительно структуры множества допустимых решений X и свойств заданной на нем вектор-функции $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Многие из этих условий оптимальности являются переформулировками или «почти переформулировками» введенных в гл. 1 различных определений эффективности. Для простоты и наглядности изложения вначале рассматриваются условия эффективности применительно к оценкам, а затем показывается, что полученные результаты легко переносятся и на решения.

1. Начнем с рассмотрения свойств слабо эффективных оценок.

Теорема 1 (Гермейер). *Предположим, что $y^0 \in Y$ и все $y_i^0 > 0$. Оценка y^0 слабо эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in \mathrm{M}$ такой, что*

$$\min_{i \in M} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \min_{i \in M} \mu_i y_i. \tag{1}$$

Для слабо эффективной оценки $y^0 \in Y$ можно принять $\mu = \mu^0$, где $\mu^0 \in \mathrm{M}$ — вектор с компонентами

$$\mu_i^0 = \frac{\lambda^0}{y_i^0}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad \lambda^0 = 1 \Bigg/ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{y_k^0}, \tag{2}$$

и тогда

$$\max_{y \in Y} \min_{i \in M} \mu_i^0 y_i = \lambda^0.$$

Напомним, что M — это множество векторов из E^m с положительными компонентами, в сумме равными единице.

Доказательство. Из равенства (1) следует, что для любого $y \in Y$ существует номер $i \in M$ такой, что $y_i^0 \geqq y_i$. Поэтому условия (1) достаточно для слабой эффективности y_0. Докажем необходимость. Для этого возьмем вектор $\mu^0 \in$ М с компонентами, определяемыми формулами (2). Из $y^0 \in S(Y)$ следует, что для каждого $y \in Y$ существует $j \in M$, при котором выполняется неравенство $y_j^0 \geqq y_j$, а значит, и неравенство $\mu_j^0 y_j^0 \geqq \mu_j^0 y_j$. Поэтому

$$\mu_j^0 y_j^0 = \lambda^0 = \min_{i \in M} \mu_i^0 y_i^0 \geqq \min_{i \in M} \mu_i^0 y_i. \qquad \blacksquare$$

Геометрически совершенно очевидно, что $y^0 \in S(Y)$ тогда и только тогда, когда во внутренность ортанта $E^m_{\geqq}$, транслированного (сдвинутого) в точку y^0, не попадает ни одна точка из Y (см. рис. 1). Поскольку гиперповерхность $\min\limits_{i \in M} \mu_i y_i = \lambda$ при $\lambda = 0$

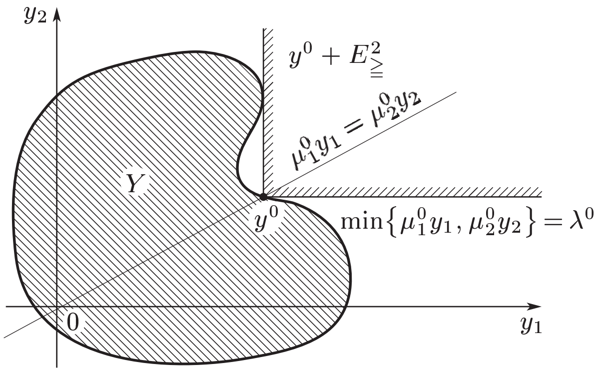

Рис. 1

и положительных μ_i представляет собой границу этого же ортанта, трансляцию которого в y^0 можно осуществить назначением подходящих значений параметров $\mu_i > 0$ и λ, то появляется возможность сформулированный геометрический факт выразить в терминах функции $\min\limits_{i \in M} \mu_i y_i$. Эта возможность и реализована в теореме 1.

Полезным обобщением теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть* $y^0 \in Y$, *а* ζ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — *возрастающие функции одной переменной, причем* $\zeta_1(y_1^0) = \zeta_2(y_2^0) = \ldots \ldots = \xi_m(y_m^0)$. *Оценка* y^0 *слабо эффективна тогда и только тогда, когда*

$$\zeta_1(y_1^0) = \max_{y \in Y} \min_{i \in M} \zeta_i(y_i). \tag{3}$$

Доказательство аналогично данному выше для теоремы 1. Из (3) для любого $y \in Y$ получаем, что при некотором $i \in M$ верно $\zeta_i(y_i^0) \geqq \zeta_i(y_i)$, а потому и $y_i^0 \geqq y_i$, так что $y^0 \in S(Y)$. Наоборот, если $y^0 \in S(Y)$, то для каждого $y \in Y$ найдется $i \in M$ такой, что $y_i^0 \geqq y_i$, откуда $\zeta_i(y_i^0) \geqq \zeta_i(y_i)$. Поэтому с учетом равенств $\zeta_1(y_1^0) = \zeta_2(y_2^0) = \ldots = \zeta_m(y_m^0)$ можно записать

$$\zeta_1(y_1^0) \geqq \min_{i \in M} \zeta_i(y_i). \qquad \blacksquare$$

Подбирая функции ζ_i того или иного подходящего вида, можно получать соответствующие конкретизации равенства (3). Например, если $y^0 \in E^m_>$, то, положив $\zeta_i(y_i) = \mu_i^0 y_i$, где μ_i^0 определяются формулой (2), приходим к теореме 1. Если же принять $\zeta_i(y_i) = y_i - y_i^0$, то получим

Следствие 1. *Оценка $y^0 \in Y$ слабо эффективна тогда и только тогда, когда*

$$\max_{y \in Y} \min_{i \in M} (y_i - y_i^0) = 0.$$

Непосредственно из леммы 1.2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функция $\varphi(y)$ возрастает по $>$ на Y, то любая ее точка максимума на Y слабо эффективна.*

Примерами функций, возрастающих по $>$ на E^m, служат $\min_{i \in M} \zeta_i(y_i)$ и $\max_{i \in M} \zeta_i(y_i)$, где все ζ_i — возрастающие на E функции (например, упоминавшиеся выше $\zeta_i = y_i - y_i^0$; $\zeta_i = \mu_i y_i$ при $\mu_i > 0$). Возрастающей по $>$ на E^m является функция $\varphi(y) = y_j$, где j — произвольный фиксированный номер из M. По теореме 3 все точки максимума на Y указанных функций слабо эффективны. Отметим еще, что функции $\min_{i \in M} \mu_i(y_i^* - y_i)$ и $\max_{i \in M} \mu_i(y_i^* - y_i)$, где $y^* \in E^m$, $\mu_i > 0$, являются убывающими по $>$ на E^m, и поэтому точки их минимума на Y слабо эффективны.

Используя полученные выше результаты и строя подмножества множества Y, замкнутые сверху по $>$ относительно Y (например, при помощи лемм 1.2.3 и 1.2.4), можно получать новые условия слабой эффективности. Приведем здесь лишь одно из общих утверждений подобного рода.

Теорема 4. *Пусть φ_0 — возрастающая по $>$, а φ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, — неубывающие по $>$ на Y функции. Если оценка*

$y^0 \in Z$, *где*

$$Z = \left\{ y \in Y \mid \varphi_j(y) \geqq t_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p \right\}, \tag{4}$$

а t_j — произвольные фиксированные числа, удовлетворяет условию

$$\varphi_0(y^0) = \max_{y \in Z} \varphi_0(y), \tag{5}$$

то она слабо эффективна.

Доказательство. По теореме 3 точка y^0 слабо эффективна относительно Z. Согласно леммам 1.2.3 и 1.2.4 множество Z замкнуто сверху по $>$ относительно Y. Поэтому, как показывает лемма 1.2.5, $y^0 \in S(Y)$. ■

Пример 1. Пусть $j \in M$, $N \subseteq M$ и точка $y^0 \in Y$ удовлетворяет неравенствам $y_i^0 \geqq t_i$, $i \in N$. Если

$$y_j^0 = \max_{y \in Z} y_j,$$

где $Z = \left\{ y \in Y \mid y_i \geqq t_i \text{ для всех } i \in N \right\}$, то, согласно теореме 4, $y^0 \in S(Y)$. Заметим, что если $N = \varnothing$, то $Z = Y$.

Приведем еще один результат, характеризующий слабо эффективные точки.

Если функция $\varphi(y)$ возрастает по $>$ на множестве $Z' = \left\{ y \in Y \mid y = y^0 \text{ или } y > y^0 \right\}$, то оценка $y^0 \in Y$ слабо эффективна тогда и только тогда, когда

$$\varphi(y^0) = \max_{y \in Z'} \varphi(y).$$

В самом деле, если $y^0 \notin S(Y)$, так что для некоторого $y^* \in Y$ справедливо неравенство $y^* > y^0$, то $y^* \in Z'$ и, кроме того, $\varphi(y^*) > \varphi(y^0)$. Поэтому y^0 не может быть точкой максимума функции φ на множестве Z'. Если же $y^0 \in S(Y)$, то $Z' = \{y^0\}$. ■

2. Перейдем к рассмотрению свойств эффективных оценок.

Теорема 5 (Подиновский). *Оценка $y^0 \in Y$ эффективна тогда и только тогда, когда для каждого $i \in M$*

$$y_i^0 = \max_{y \in Y^i} y_i, \tag{6}$$

где

$$Y^i = \left\{ y \in Y \mid y_j \geqq y_j^0, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad j \neq i \right\}. \tag{7}$$

Если $y^0 \in Y$ эффективна, то она является единственной в Y точкой, удовлетворяющей (6) при каждом $i \in M$.

Доказательство. Если для некоторого $i \in M$ найдется такая точка $y \in Y^i$, что $y_i > y_i^0$, то, согласно (7), $y_i \geq y_i^0$, так что $y_i \notin P(Y)$. Наоборот, если оценка y^0 не эффективна, то найдутся номер $i \in M$ и точка $y \in Y^i$ такие, что $y_i > y_i^0$, и тогда (6) не будет выполняться.

Пусть $y^0 \in P(Y)$. Тогда для любой точки $y' \in Y$, отличной от y^0, найдется номер $i \in M$, при котором $y_i^0 > y_i$. Поэтому y' нельзя подставить в (6) вместо y^0. ■

Для $y^0 \in Y$ введем в рассмотрение множества

$$Y^{(i)} = \left\{y \in Y \mid y_j = y_j^0,\ \ j = 1, 2, \ldots, m;\ \ j \neq i\right\}.$$

Поскольку $Y^{(i)} \subseteq Y^i$, то из теоремы 5 вытекает

Следствие 2. *Если y^0 эффективна, то $y_i^0 = \max\limits_{y \in Y^{(i)}} y_i$ для каждого $i \in M$.*

Теорема 6. *Оценка $y^0 \in Y$ эффективна в том и только в том случае, если*

$$\max_{(y,\varepsilon) \in T} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i = 0, \tag{8}$$

где

$$T = \left\{(y, \varepsilon) \in Y \times E^m_{\geqq} \mid y - \varepsilon = y^0\right\}.$$

Доказательство. Если $y^0 \in P(Y)$, то для $y \in Y$ из $y \geqq y^0$ следует $y = y^0$, и поэтому $T = \{(y^0, 0_{(m)})\}$. Наоборот, если (8) выполнено, то предположение $y^0 \notin P(Y)$ ведет к противоречию: из существования $y \in Y$ такого, что $y \geq y^0$, следует $\varepsilon^0 = y - y^0 \geq 0_{(m)}$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i^0 > 0$. ■

Из леммы 1.2.2 вытекает

Теорема 7. *Пусть функция $\varphi(y)$ не убывает по $\geq$ на Y, а y^0 — ее точка максимума на Y. Для эффективности точки y^0 достаточно выполнения одного из следующих условий:*

φ возрастает по $\geq$ на Y;

y^0 — единственная точка максимума φ на Y.

В нижеследующих примерах рассматриваются некоторые конкретные типы функций, максимизация (или минимизация) которых ведет к получению эффективных точек.

Пример 2. Функция $\varphi(y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i y_i$, где $\mu_i > 0$, является возрастающей по каждой переменной y_i на числовой прямой, и потому возрастает по $\geq$ на E^m (см. лемму 1.8.4). Поэтому любая ее точка максимума на Y эффективна.

Пример 3. Функция $\varphi(y) = \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i y_i^s \right]^{1/s}$, где $s > 0$ и $\mu_i > 0$, является возрастающей по каждой переменной y_i на множестве неотрицательных чисел, а потому возрастает по $\geq$ на $E^m_{\geqq}$. Следовательно, если y^0 — точка максимума функции $\varphi(y)$ на $Y \subset E^m_{\geqq}$, то $y^0 \in P(Y)$. Эта же функция φ при $s < 0, \mu_i > 0, i \in M$ является возрастающей по каждой переменной y_i на множестве положительных чисел, и поэтому возрастает по $\geq$ на $E^m_{>}$. Следовательно, если y^0 — точка максимума φ на $Y \subset E^m_{>}$, то она эффективна.

Пример 4. Пусть $y_i^* \geqq \sup\limits_{y \in Y} y_i$ для всех $i \in M$, а функция $\varphi(y)$ возрастает по $\geq$ на $E^m_{\geqq}$. Тогда, как легко проверить, функция $\varphi(y^* - y)$ убывает по $\geq$ на Y. В силу теоремы 7 любая ее точка минимума на множестве Y эффективна. В роли функции $\varphi(y^* - y)$, согласно предыдущему примеру, может выступать $\left[\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i (y_i^* - y_i)^s \right]^{1/s}$ при $s > 0$ и $\mu_i > 0$, $i \in M$. Если же $y_i^* > \sup\limits_{y \in Y} y_i$, $i \in M$, то в этой функции может быть и $s < 0$.

Функция $\max\limits_{i \in M} \mu_i (y_i^* - y_i)$, где y_i^* — произвольные фиксированные числа, а $\mu_i \geqq 0$ является невозрастающей по $\geq$ на E^m. Если ее точка минимума на Y единственна, то она эффективна.

Пример 5. Функция $\varphi(y) = \prod\limits_{i=1}^{m} y_i^{\mu_i}$ при положительных μ_i возрастает по каждой переменной y_i на $(0, +\infty)$, и поэтому является возрастающей по $\geq$ на $E^m_{>}$. Следовательно, если y^0 — точка максимума $\varphi(y)$ на $Y \subset E^m_{>}$, то $y^0 \in P(Y)$. При $y_i^* \geqq \sup\limits_{y \in Y} y_i, i \in M$, функция $\varphi(y^* - y) = \prod\limits_{i=1}^{m} (y_i^* - y_i)^{\mu_i}$ убывает по $\geq$ на Y; поэтому всякая ее точка минимума на Y эффективна.

Отметим, что утверждения, сформулированные в примерах 2–5 как следствия из теоремы 7, можно прямо проверить рассуждением «от противного». Так, если для некоторых $y, y' \in Y$, $Y \subset E^m_{\geqq}$

справедливо $y \geq y'$, то, например, при $s > 0$ и $\mu_i > 0$, $i \in M$,

$$\Bigl[\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^s\Bigr]^{1/s} > \Bigl[\sum_{i=1}^{m} \mu_i (y_i')^s\Bigr]^{1/s}$$

и, стало быть, y' не может являться точкой максимума функции $\varphi(y) = \Bigl[\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i y_i^s\Bigr]^{1/s}$ на Y.

Аналогом теоремы 4 для эффективных оценок является

Теорема 8. *Пусть φ_j, $j = 0, 1, \ldots, p$ $(p \geqq 1)$, — неубывающие по $\geq$ на Y функции. Если точка $y^0 \in Z$, где Z определено согласно* (4), *удовлетворяет условию* (5), *то для ее эффективности достаточно выполнения одного из следующих условий:*

φ_0 возрастает по $\geq$ на Z;

y_0 — единственная точка максимума φ_0 на Z.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4 с той лишь разницей, что здесь вместо теоремы 3 следует сослаться на теорему 7.

Пример 6. Если в примере 1 y^0 — единственная точка, удовлетворяющая всем указанным там условиям, то она эффективна. Отсюда, в частности, следует справедливость утверждения о задаче (1.5.1), сформулированного в п. 6 из § 1.5.

Следствие 3. *Пусть $y^0 \in Y$, $Z^0 = \bigl\{y \in Y \mid y \geqq y^0\bigr\}$, а функция φ возрастает по $\geq$ на Z^0. Оценка y^0 эффективна тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(y^0) = \max_{y \in Z^0} \varphi(y).$$

Достаточность следствия вытекает из теоремы 8. Для проверки необходимости нужно лишь заметить, что при $y^0 \in P(Y)$ оказывается, что $Z^0 = \{y^0\}$.

Пример 7. Пусть $\mu_i > 0$, $i \in M$. Оценка $y^0 \in Y$ эффективна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Z^0} \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i.$$

Теорема 9. *Предположим, что $y^0 \in Y$ и $y_i^0 > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Оценка y^0 эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in M$ такой, что y^0 есть точка максимума* *функции* $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ *на множестве* *)

$$\widetilde{Z} = \left\{ y \in Y \mid \min_{i \in M} \mu_i y_i \geqq \max_{y' \in Y} \min_{i \in M} \mu_i y'_i \right\}.$$

Доказательство. Пусть y^0 эффективна. Так как $y^0 \in S(Y)$, то по теореме 1 при $\mu_i = \mu_i^0$, определяемых равенством (2), функция $\min\limits_{i \in M} \mu_i y_i$ достигает в точке y^0 наибольшего на Y значения, равного λ^0. Поэтому

$$\widetilde{Z} = \left\{ Y \in \mid \min_{i \in M} \frac{\lambda^0}{y_i^0} y_j \geqq \lambda^0 \right\} = \\ = \left\{ Y \in Y \mid Y_i \geqq y_i^0, \ \ i = 1, 2, \ldots, m \right\} = Z^0.$$

Следовательно, как указано в примере 7, y^0 есть точка максимума функции $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ на $Z^0 = \widetilde{Z}$.

Пусть, наоборот, при некотором $\mu \in \mathrm{M}$ оценка y^0 является точкой максимума функции $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ на $\widetilde{Z}$. Приняв $\varphi_0(y) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i$, $\varphi_1(y) = \min\limits_{i \in M} \mu_i y_i$, $t_1 = \max\limits_{y' \in Y} \min\limits_{i \in M} \mu_i y'_i$ на основании теоремы 8 (при $p = 1$) можно утверждать, что $y^0 \in P(Y)$. ■

Примечание. Аналоги теоремы 9 можно получать при помощи теоремы 2. Например, учитывая следствие 1 и теорему 8, можно утверждать, что $y^0 \in Y$ эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $z^0 \in E^m$, при котором y^0 есть точка максимума функции $\sum\limits_{t=1}^{m} y_i$ (или любой другой функции, возрастающей по $\geq$ на $S(Y)$) на множестве

$$\left\{ y \in Y \mid \min_{i \in M} (y_i - z_i^0) = \max_{z \in Y} \min_{i \in M} (z_i - z_i^0) \right\}.$$

---

*) Иначе говоря, y^0 есть точка лексикографического максимума на Y вектор-функции $\left(\min\limits_{i \in M} \mu_i y_i, \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \right)$. Заметим, что вместо $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ в этой теореме можно взять любую функцию $\varphi(y)$, возрастающую по $\geq$ на Y (и даже лишь на $S(Y)$). Идея введения второй функции $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ для выделения эффективных точек впервые была использована А. Джоффрионом [160] при доказательстве утверждения, обобщением которого является теорема 10.

Если функция φ — неубывающая по $\geq$ на Y, то точка ее максимума на Y может не быть эффективной (пример: постоянная на Y функция). Однако верно следующее утверждение.

Теорема 10. *Если множество Y непусто, замкнуто и ограничено, а φ — неубывающая по $\geq$ на Y и полунепрерывная сверху функция, то множество Y_{φ}^* ее точек максимума на Y содержит по крайней мере одну эффективную точку.*

Заметим, что если в условиях этой теоремы φ возрастает по $>$ на Y, то $Y_{\varphi}^* \subseteq S(Y)$ (см. теорему 3).

Доказательство. Как известно из анализа, множество Y_{φ}^*, для которого можно записать равенство

$$Y_{\varphi}^* = \left\{ y \in Y \mid \varphi(y) \geqq \max_{y \in Y} \varphi(y) \right\},$$

непусто, замкнуто и ограничено. Функция $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ возрастает по $\geq$ на Y_{φ}^*. Существует точка ее максимума на Y_{φ}^*, которая, по теореме 8, эффективна. ■

Так как при произвольном фиксированном $j \in M$ функция $\varphi(y) = y_j$ непрерывна на E^m и является неубывающей по $\geq$, то из теоремы 10 вытекает следующий известный результат (см., например, [77]).

Следствие 4. *Если Y непусто, замкнуто и ограничено, то*

$$Y_j^* \cap P(Y) \neq \varnothing, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $Y_j^* = \left\{ y^* \in Y \mid y_j^* = \max\limits_{y \in Y} y_i \right\}$, *так что для любого* $j \in M$

$$\max_{y \in Y} y_j = \max_{y \in P(Y)} y_j = \max_{y \in S(Y)} y_j.$$

Справедливо также такое общее утверждение:

Теорема 11. *Если множество $P(Y)$ внешне устойчиво, а функция φ является неубывающей по $\geq$ на Y, то*

$$\sup_{y \in P(Y)} \varphi(y) = \sup_{y \in Y} \varphi(y).$$

Доказательство. В случае $Y = \varnothing$ равенство очевидно. Разберем случай, когда $Y \neq \varnothing$. При этом $P(Y) \neq \varnothing$, так что

$$\sup_{y \in P(Y)} \varphi(y) \leqq \sup_{y \in Y} \varphi(y).$$

Остается доказать справедливость обратного неравенства. Пусть $\{y^k\} \subseteq Y$ — максимизирующая последовательность:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(y^k) = \sup_{y\in Y} \varphi(y).$$

В силу внешней устойчивости множества $P(Y)$ для каждого y^k найдется $z^k \in P(Y)$ такой, что $z^k \geqq y^k$. Отсюда $\varphi(z^k) \geqq \varphi(y^k)$, так что $\varphi(y^k) \leqq \sup\limits_{y\in P(Y)} \varphi(y)$. Поэтому и

$$\sup_{y\in Y} \varphi(y) \leqq \sup_{y\in P(Y)} \varphi(y). \qquad \blacksquare$$

Отметим еще одно свойство эффективных оценок [85]:

если выполнены условия теоремы 2 *и* $y^0 \in P(Y)$, *то* y^0 — *единственная точка максимума функции* $\min\limits_{i\in M} \zeta_i(y_i)$ *на* Y.

Действительно, пусть $y \in Y$ и $y \neq y^0$. В силу $y^0 \in P(Y)$ для некоторого $i \in M$ будет $y_i^0 > y_i$, откуда, учитывая $\zeta_1(y_1^0) = \zeta_2(y_2^0) = \ldots = \zeta_m(y_m^0)$, получаем $\min\limits_{i\in M} \zeta_i(y_i^0) > \min\limits_{i\in M} \zeta_i(y_i)$. $\blacksquare$

Пример 8. Если $y^0 \in P(Y)$, то функция $\min\limits_{i\in M}(y_i - y_i^0)$ из следствия 1 достигает своего наибольшего значения на Y в единственной точке y^0. Аналогично, если $y^0 \in P(Y)$ и $y^0 > 0_{(m)}$, то максимума на Y функция $\min\limits_{i\in M} \mu_i^0 y_i$, где μ_i^0 назначены согласно (2), достигает в единственной точке y^0.

В § 1.2 было введено бинарное отношение $\overline{\overline{>}}$: $y' \,\overline{\overline{>}}\, y''$ верно тогда и только тогда, когда неверно $y'' \geq y'$. При помощи этого отношения определение эффективной оценки можно перефразировать следующим образом: оценка $y^0 \in Y$ эффективна в том и только том случае, если для любой оценки $y \in Y$ выполняется соотношение $y^0 \,\overline{\overline{>}}\, y$.

Используя лемму 1.2.1, отсюда получаем такую формулировку (см. [70]): оценка $y^0 \in Y$ эффективна тогда и только тогда, когда для нее найдется вектор-функция $\mu(y)$ со значениями из M, и такая, что неравенство $\langle \mu(y), y^0 \rangle \geqq \langle \mu(y), y \rangle$ справедливо для каждого $y \in Y$.

Если на вид вектор-функции $\mu(y)$ наложить определенное дополнительное ограничение, то из последнего определения получаем следующее достаточное условие эффективности.

Лемма 1. *Если существует конечный набор векторов* $\{\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^p\} \subset$ M, *обладающий тем свойством, что для каждого* $y \in Y$ *найдется свой номер* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, *при котором* *выполняется неравенство*

$$\langle \mu^i, y^0 \rangle \geqq \langle \mu^i, y \rangle, \tag{9}$$

то оценка y^0 эффективна.

3. В общем случае условие леммы 1 не является необходимым условием эффективности. Так, в примере 1.6.1 (см. рис. 1.12) для эффективной оценки y^0 не существует, очевидно, искомого конечного набора векторов μ^i (заметим, что y^0 несобственно эффективна). Однако, если ограничиться рассмотрением собственно эффективных оценок, то это условие будет как достаточным, так и необходимым.

Теорема 12 (Ногин). *Оценка $y^0 \in Y$ собственно эффективна в том и только том случае, если существует набор векторов $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^p \in$ М, обладающий тем свойством, что для каждой оценки $y \in Y$ найдется номер $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, при котором выполняется неравенство* (9).

Доказательство. Не умаляя общности, положим $y^0 = 0_{(m)}$. Отметим следующий факт, непосредственно вытекающий из определения собственно эффективной оценки. Включение $y^0 \in G(Y)$ имеет место в том и только том случае, если существует число $N > 0$ такое, что для каждого $i \in M$ система неравенств

$$\begin{gathered} y_i > 0, \\ y_i + N y_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad j \neq i, \end{gathered} \tag{10}$$

не имеет решения на множестве Y.

Достаточность. Согласно лемме 1, оценка $0_{(m)}$ эффективна. Докажем включение $0_{(m)} \in G(Y)$. Пусть

$$N = \max\left\{ \frac{m\mu^i_j}{\mu^i_k} \;\middle|\; j, k \in M, \quad i = 1, 2, \ldots, p \right\} > 0. \tag{11}$$

Если $0_{(m)} \notin G(Y)$, то для этого числа N существует индекс $k \in M$ и точка $y' \in Y$ такие, что

$$\begin{gathered} y'_k > 0, \\ y'_k + N y'_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad j \neq k. \end{gathered} \tag{12}$$

Обозначим $M_0 = \{ j \in M \mid y'_j < 0 \}$. В силу $0_{(m)} \in P(Y)$, выполняется $M_0 \neq \varnothing$. Из (12) следует

$$m y'_k + N \sum_{j \in M_0} y'_j > 0. \tag{13}$$

С другой стороны, по условию теоремы, для точки y' существует вектор $\mu^i \in$ M такой, что $\langle \mu^i, y' \rangle \leqq 0$. Отсюда

$$\mu_k^i y_k' + \sum_{j \in M_0} \mu_j^i y_j' \leqq 0.$$

И, учитывая (11), получаем неравенство

$$m y_k' + N \sum_{j \in M_0} y_j' \leqq 0,$$

которое противоречит (13).

Необходимость. Пусть $y^0 \in G(Y)$, т. е. существует такое $N > 0$, что для любого $i \in M$ система неравенств (10) несовместна на Y. Возьмем произвольную оценку $y \in Y$. Для каждого $i \in M$ выполняется либо $y_i \leqq 0$, либо $y_i + N y_j \leqq 0$ при некотором $j \in M \backslash \{i\}$. Просуммировав по $i \in M$ все подобного рода неравенства, получим

$$\sum_{i=1}^{m} N_i y_i \leqq 0,$$

где $N_i > 0$ для любого $i \in M$. Отсюда следует неравенство (9) при $y^0 = 0_{(m)}$ и

$$\mu^i = \overline{\mu}^i = \left(\frac{N_1}{\sum\limits_{i \in M} N_i}, \frac{N_2}{\sum\limits_{i \in M} N_i}, \ldots, \frac{N_m}{\sum\limits_{i \in M} N_i} \right).$$

Очевидно, $\overline{\mu}^i \in M$. Таким образом, для каждого $y \in Y$ существует вектор $\mu^i = \overline{\mu}^i$, при котором имеет место неравенство (9). Причем, благодаря конечности множества индексов M, число таких векторов, обладающих необходимыми свойствами, конечно. То есть существует конечный набор векторов $\{\overline{\mu}^1, \overline{\mu}^2, \ldots, \overline{\mu}^p\} \subset$ M с тем свойством, что для каждого $y \in Y$ найдется $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, при котором имеет место (9) (с $\mu^i = \overline{\mu}^i$).

Укажем набор не более, чем из m векторов, обладающих необходимыми свойствами. Пусть $\varepsilon = \min\{\overline{\mu}_j^i \mid j \in M, i = 1, 2, \ldots, p\}$.

Рассмотрим векторы следующего вида:

$$\mu_j^i = \begin{cases} \varepsilon, & j = 1, 2, \ldots, m; \quad j \neq i; \\ 1 - (m-1)\varepsilon, & j = i; \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{14}$$

Очевидно, $\mu^i \in$ M для любого $i \in$ M. Докажем включение

$$\{\overline{\mu}^1, \overline{\mu}^2, \ldots, \overline{\mu}^p\} \subseteq \operatorname{conv}\{\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^m\}.$$

Для этого возьмем произвольный вектор $\overline{\mu}^l$ «старого» набора. Если $\varepsilon = 1/m$, то, очевидно, $\overline{\mu}^l_i = 1/m$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В этом случае для $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 1/m$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu^i_j = \overline{\mu}^l_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{15}$$

т. е. $\overline{\mu}^l \in \operatorname{conv}\{\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^m\}$. Если $\varepsilon < 1/m$, то берем

$$\lambda_i = \frac{\overline{\mu}^l_i - \varepsilon}{1 - m\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Для этих λ_i равенства (15) также имеют место. Включение доказано.

Предположим, что «новый» набор векторов (14) не обладает необходимыми свойствами, т. е. найдется оценка $y \in Y$ такая, что

$$\langle \mu^j, y \rangle > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{16}$$

Для произвольного $l \in \{1, 2, \ldots, p\}$ при некоторых $\lambda_j \geqq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, имеет место представление (15). Поэтому из (16) получаем неравенства

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle \mu^j, y \rangle = \langle \overline{\mu}^l, y \rangle > 0, \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$

которые означают, что и «старый» набор векторов также не обладает необходимыми свойствами. Это противоречит полученному ранее. ■

Примечание 1. Если множество Y состоит из конечного числа элементов, то условие доказанной теоремы является необходимым и достаточным для того, чтобы $y^0 \in P(Y)$. Это вытекает из того, что в случае конечного множества Y имеет место равенство $G(Y) = P(Y)$ (см. пример 1.6.3).

Примечание 2. Анализ доказательства теоремы 12 показывает, что при необходимости в формулировке этой теоремы векторы μ^i можно считать векторами вида (14) и $p = m$.

Непосредственно из теоремы 12 (часть «достаточность») при $p = 1$ вытекает

Следствие 5 (Джоффрион). *Если все* $\mu_i > 0$, *то любая точка максимума функции* $\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ *на множестве* Y *является собственно эффективной.*

Обобщением этого результата является

Теорема 13. *Пусть функция* φ *при любых* $y', y'' \in Y$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(y') - \varphi(y'') \geqq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(y', y'')(y'_i - y''_i), \tag{17}$$

причем для функций $\lambda_i(y', y'')$, *определенных на* $Y \times Y$, *справедливы неравенства*

$$b_i \geqq \lambda_i(y', y'') \geqq a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{18}$$

где a_i, b_i $(i \in M)$ — *некоторые числа. Каждая точка максимума функции* φ *на* Y *является собственно эффективной оценкой.*

Доказательство. Если $y' \geq y''$, то, согласно (17) и (18), $\varphi(y') > \varphi(y'')$. Следовательно, φ возрастает по $\geq$ на Y. Поэтому, если $y^0 \in Y$ — точка максимума φ на Y, то $y^0 \in P(Y)$ (теорема 7). Покажем, что y^0 собственно эффективна, причем можно взять $\theta = (m-1)\dfrac{b}{a}$, где $b = \max\limits_{i \in M} b_i$, $a = \min\limits_{i \in M} a_i$ (рассматривается случай $m \geqq 2$). Предположим, напротив, что y^0 несобственно эффективна, так что найдутся такие $i \in M$, $y \in Y$, удовлетворяющие (1.6.1), что для всякого $j \in M$, для которого справедливо (1.6.2), выполняется неравенство

$$(y_i - y_i^0)/(y_j^0 - y_j) > \theta.$$

Следовательно, для любого $j \in M$, $i \neq j$, верно $y_i - y_i^0 > \theta(y_j^0 - y_j)$. А так как всегда

$$\theta \geqq (m-1)\frac{\lambda(y, y^0)}{\lambda_i(y, y^0)},$$

то

$$\frac{1}{m-1}\lambda_i(y, y^0)(y_i - y_i^0) > \lambda_j(y, y^0)(y_j^0 - y_j).$$

Просуммировав последние $m-1$ неравенств, соответствующих разным $j \neq i$, после несложных преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(y, y^0)(y_i - y_i^0) > 0.$$

В силу (17) отсюда следует $\varphi(y) > \varphi(y^0)$, а это противоречит условию, что y^0 — точка максимума φ на Y. ■

Пример 9. Пусть в $Y^\times = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$, все Y_i — интервалы (конечные или бесконечные). Предположим, что функция φ определена и непрерывна на $Y^\times$ и для каждого $i \in M$ имеет на

$$Y^\times_{(i)} = Y_1 \times \ldots \times Y_{i-1} \times \operatorname{int} Y_i \times Y_{i+1} \times \ldots \times Y_m$$

непрерывную частную производную $\dfrac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}$, удовлетворяющую условию

$$b_i \geqq \partial\varphi(y)/\partial y_i \geqq a_i > 0.$$

По известной из анализа формуле конечных приращений при $y' \neq y''$

$$\varphi(y') - \varphi(y'') = \sum \frac{\partial\varphi(z^i)}{\partial y_i}(y'_i - y''_i),$$

где суммирование ведется по тем i, для которых $y'_i \neq y''_i$, и $z^i \in Y^\times_{(i)}$. Таким образом, функция φ удовлетворяет условию (17), где

$$\lambda_i(y', y'') = \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(z^i)}{\partial y_i} & \text{при} \quad y' \neq y'', \\ a_i & \text{при} \quad y' = y'', \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, все ее точки максимума на $Y \subseteq Y^\times$ входят в $G(Y)$.

В частности, если $Y^\times = \prod\limits_{i=1}^{m}(c_i, d_i)$, где $+\infty > d_i > c_i > 0$, $i \in M$, то любая точка максимума функции $\varphi(y) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i y_i^s\Big)^{1/s}$, где $s \neq 0$ и $\mu_i > 0$, собственно эффективна. Кроме того, если $y^* > (d_1, \ldots, d_m)$, то любая точка минимума на Y функции $\varphi(y^* - y) = \Big[\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i (y^*_i - y_i)^s\Big]^{1/s}$ является собственно эффективной [158].

Заметим, что требование (18) в теореме 13 и аналогичное требование в примере 9 существенны.

Пример 10. Пусть $Y^\times = [0,1]^2$, $Y = \big\{y \in E^2_{\geqq} \mid y_1^2 + y_2^2 \leqq 1\big\}$. Точки $y^* = (0, 1)$ и $y^0 = (1, 0)$ эффективны, но являются несобственно эффективными. Нетрудно проверить, что функция $\varphi(y) = 2^{y_1} - \sqrt{1 - y_2^2}$ непрерывна на $Y^\times$, имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial\varphi(y)}{\partial y_1} = 2^{y_1}\ln 2$ на $Y^{\times}_{(1)} = (0,1)\times[0,1]$, непрерывную частную производную $\dfrac{\partial\varphi(y)}{\partial y_2} = y_2(1-y_2^2)^{-1/2}$ на $Y^{\times}_{(2)} = [0,1]\times(0,1)$ и достигает на Y наибольшего значения, равного 1, в двух точках — несобственно эффективных точках y^* и y^0. Такое положение объясняется тем, что частная производная $\partial\varphi(y)/\partial y_2$ не удовлетворяет соответствующим неравенствам, так как

$$\lim_{y_2\to+0}\frac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}} = 0, \qquad \lim_{y_2\to 1-0}\frac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}} = +\infty.$$

Учитывая примечание 2, а также тот факт, что $y^0 \in S(Y)$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$ существует номер $i \in M$ такой, что $y_i^0 \geqq y_i$ (этот факт вытекает из определения слабой эффективности), из теоремы 12 получаем следующий результат.

Теорема 14. *Для того чтобы оценка $y^0 \in Y$ была собственно эффективной, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\varepsilon > 0$, при котором точка y^0 слабо эффективна по вектор-функции $(\langle\mu^1, y\rangle, \langle\mu^2, y\rangle, \ldots, \langle\mu^m, y\rangle)$ (где векторы $\mu^i \in \mathrm{M}$ имеют вид* (14)) *относительно множества Y.*

Имея в распоряжении условия слабой эффективности, при помощи теоремы 14 можно легко получить условия собственной эффективности. Это соображение будет использоваться в последующих параграфах при выводе условий собственной эффективности для различных классов многокритериальных задач. Первым результатом такого использования теоремы 14 (и теоремы 1) является

Следствие 6. *Пусть $y^0 > 0_{(m)}$. Включение $y^0 \in G(Y)$ имеет место тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что равенство* (*в котором μ^i имеет вид* (14))

$$\min_{i\in M}\lambda_i\langle\mu^i, y^0\rangle = \max_{y\in Y}\min_{i\in M}\lambda_i\langle\mu^i, y\rangle \tag{19}$$

выполняется при некотором $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in M$.

Теорема 14 позволяет также переформулировать определение собственно эффективной оценки так, что оно становится геометрически наглядным. Введем для этого полиэдральный конус

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ z \in E^m \mid \langle\mu^1, z\rangle \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

Здесь векторы μ^i имеют вид (14) и $0 < \varepsilon \leqq 1/m$ (если $\varepsilon = 1/m$, то $\mu^1 = \mu^2 = \ldots = \mu^m$), так что $\mu^i \in \mathrm{M}$. Нетрудно проверить, что при уменьшении ε конус Λ_ε «сужается», т. е. если $1/m \geqq \overline{\varepsilon} > \varepsilon$, то $\Lambda_{\overline{\varepsilon}} \supset \Lambda_\varepsilon$ (более того, $\operatorname{int} \Lambda_{\overline{\varepsilon}} \supset [\Lambda_\varepsilon \backslash \{0_{(m)}\}]$). В самом деле, пусть μ^i — векторы вида (14), а $\overline{\mu}^i$ — также векторы вида (14), где вместо ε фигурирует $\overline{\varepsilon}$. Возьмем произвольную точку $z \in \Lambda_\varepsilon$ и докажем, что $z \in \Lambda_{\overline{\varepsilon}}$. Включение $z \in \Lambda_\varepsilon$ означает, что z удовлетворяет системе линейных неравенств

$$\langle \mu^i, z \rangle \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $\varepsilon = 1/m$, то, суммируя выписанные неравенства и умножая результат на $1/m$, получим

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} z_j = \langle \overline{\mu}^i, z \rangle \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

что означает $z \in \Lambda_{\overline{\varepsilon}}$. Если $\overline{\varepsilon} < 1/m$, то введем векторы $\lambda^1, \lambda^2, \ldots$ $\ldots, \lambda^m$, компоненты которых положительны и определяются следующим образом:

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{\varepsilon} - \varepsilon}{1 - m\varepsilon}, & j = 1, 2, \ldots, m; \quad j \neq i, \\[2ex] \dfrac{1 - (m-1)\overline{\varepsilon} - \varepsilon}{1 - m\varepsilon}, & j = i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Легко проверить справедливость равенств

$$\overline{\mu}^i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^i \mu^j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Поэтому, умножая неравенство $\langle \mu^j, z \rangle \geqq 0$ на положительное число λ_j^i и суммируя по $j = 1, 2, \ldots, m$, получим

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^i \langle \mu^j, z \rangle = \langle \overline{\mu}^i, z \rangle \geqq 0.$$

Это неравенство верно для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно, $z \in \Lambda_{\overline{\varepsilon}}$.

В том случае, когда $z \in [\Lambda_\varepsilon \backslash \{0_{(m)}\}]$ и $1/m \geqq \overline{\varepsilon} > \varepsilon$, по крайней мере одно из неравенств $\langle \mu^i, z \rangle \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, будет строгим и указанное выше суммирование будет приводить к строгим неравенствам

$$\langle \overline{\mu}^i, z \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

которые означают, что $z \in \operatorname{int} \Lambda_{\overline{\varepsilon}}$. ■

Отметим также еще одно свойство введенного конуса Λ_ε: в пределе при $\varepsilon \to 0$ конус Λ_0 будет представлять собой неотрицательный ортант $E^m_{\geqq}$ (см. рис. 2).

Теорема 15. *Оценка $y \in Y^0$ собственно эффективна в том и только том случае, если существует $\varepsilon > 0$, при котором*

$$[Y - y^0] \cap \Lambda_\varepsilon = \{0_{(m)}\}. \tag{20}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $y^0 = 0_{(m)}$. Пусть $0_{(m)} \in G(Y)$. Согласно теореме 14 существует $\varepsilon > 0$, при котором система неравенств

$$\langle \mu^i, y \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{21}$$

где μ^i вида (14), не имеет решений на множестве Y, т.е. $Y \cap \cap \operatorname{int} \Lambda_\varepsilon = \varnothing$. Тогда для $\varepsilon' < \varepsilon$ будет выполнено равенство (20) (при $\varepsilon = \varepsilon' > 0$).

Обратно, пусть выполнено (20). Тогда система неравенств (21) несовместна на Y, откуда согласно теореме 14 вытекает $0_{(m)} \in G(Y)$. ■

Геометрическая интерпретация теоремы 15 в случае $m = 2$ приведена на рис. 2.

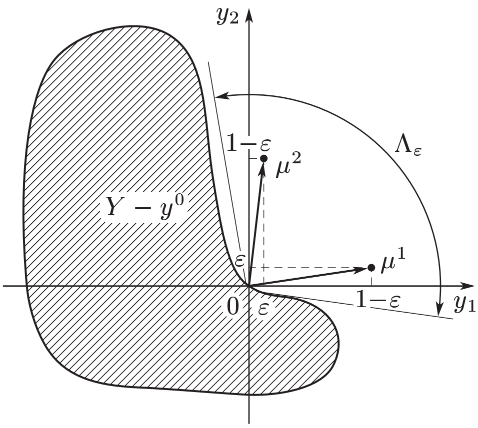

Рис. 2

В равенстве (20) хорошо просматривается связь понятий эффективности и собственной эффективности: в пределе при $\varepsilon \to 0$ это равенство будет определять эффективную оценку y^0.

Примечание 3. В работе [58] (см. также [96]) было введено понятие М-регулярности. Последняя теорема показывает, что это понятие равносильно понятию собственной эффективности.

Примечание 4. Еще одну переформулировку собственно эффективного решения, которая отличается от приведенной в теореме 15, можно найти в [112].

С помощью теоремы 15 можно установить, при каких условиях множества подлинно эффективных и собственно эффективных оценок совпадают.

Теорема 16. *Предположим, что множество Y замкнуто и существует вектор $\mu \in M$, для которого справедливо неравенство*

$$\langle \mu, y \rangle \leqq \text{const} \ \text{ для всех } y \in Y.$$

Тогда $G(Y) = B(Y)$.

Доказательство. Включение $G(Y) \subseteq B(Y)$ было доказано в теореме 1.6.1. Докажем обратное включение. Пусть $y^0 \in B(Y)$. Не ограничивая общности, положим $y^0 = 0_{(m)}$.

Предположим, что оценка $0_{(m)}$ не является собственно эффективной (заметим, что в силу $0_{(m)} \in B(Y)$ эта оценка эффективна). В этом случае согласно теореме 15 найдутся последовательности чисел $\{\varepsilon_k\}$ и точек $\{y^k\}$ такие, что $\varepsilon_k \to +0$ и

$$y^k \in [Y \cap \Lambda_{\varepsilon_k}], \quad y^k \neq 0_{(m)}. \tag{22}$$

Начиная с некоторого номера k (его всегда можно считать равным единице), станет справедливым равенство

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu^i \text{ при некоторых } \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где μ^i имеет вид (14) с $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon_1 > \varepsilon_k$ для всех $k = 2, 3, \ldots$ Отсюда следует, что система линейных неравенств $Ay \geq 0_{(m+1)}$ (где A — матрица размера $(m+1) \times m$, строками которой являются векторы $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^m, -\mu$) не имеет решения (это легко проверить рассуждением «от противного»). Следовательно (см. теорему 8.4 из [93]), множество

$$\Lambda_{\varepsilon_1} \cap \{y \mid \langle \mu, y \rangle \leqq \text{const}\} = \Lambda^1$$

компактно. Поэтому последовательность $\{y^k\}$ ограничена и ее можно считать сходящейся: $\lim y^k = y^*$. Благодаря замкнутости множества Y имеем $y^* \in Y$.

Вспоминая определение конуса Λ_{ε_k}, условие $y^k \in \Lambda_{\varepsilon_k}$ можно записать подробно:

$$\begin{gathered}
(1-(m-1)\varepsilon_k)y_1^k + \varepsilon_k y_2^k + \ldots + \varepsilon_k y_m^k \geqq 0, \\
\varepsilon_k y_1^k + (1-(m-1)\varepsilon_k)y_2^k + \ldots + \varepsilon_k y_m^k \geqq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_k y_1^k + \varepsilon_k y_2^k + \ldots + (1-(m-1)\varepsilon_k)y_m^k \geqq 0.
\end{gathered} \tag{23}$$

Так как последовательность $\{y^k\}$ ограничена, то ограниченными являются и все последовательности $\{y_i^k\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому, переходя в неравенствах (23) к пределу при $k \to \infty$, получим $y^* \geqq 0_{(m)}$.

Неравенство $y^* \geq 0_{(m)}$ противоречит включению $0_{(m)} \in P(Y)$, поэтому пусть $y^* = 0_{(m)}$. Возьмем последовательность

$$\omega^k = \frac{1}{||y^k||} y^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

В силу (22) $||y^k|| > 0$ для любого k, и поэтому определение последовательности $\{\omega^k\}$ корректно. Члены этой последовательности принадлежат единичному замкнутому шару, следовательно, ее можно считать сходящейся: $\lim\limits_{k\to\infty} \omega^k = \omega$. Согласно определению касательного конуса, приведенного в § 1.6, $\omega \in T\big(Y - E^m_{\geqq}, 0_{(m)}\big)$. Поделив все неравенства системы (23) на $||y^k||$ и приняв во внимание оценки $\big|y_i^k/||y^k||\big| \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots$, придем к неравенству $\omega \geqq 0_{(m)}$. Это вместе с равенством $||\omega|| = 1$ влечет $\omega \geq 0_{(m)}$, что противоречит начальному предположению $0_{(m)} \in B(Y)$. ■

Следствие 7. *Если Y — компакт, то $G(Y) = B(Y)$.*

4. Выше был установлен целый ряд свойств эффективных оценок. При этом к структуре множества Y не предъявлялось каких-либо существенных требований (кроме замкнутости и ограниченности в теореме 10 и замкнутости в теореме 16), а на y^0 иногда налагалось условие принадлежать положительному ортанту или же быть единственной точкой максимума на Y для соответствующей функции. Поэтому все полученные условия эффективности оценок легко переформулировать в соответствующие условия эффективности решений.

Например, теорема 1 принимает вид: если $f_i(x^0) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то решение $x^0 \in X$ слабо эффективно тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in \mathrm{M}$, при котором

$$\min_{i \in M} \mu_i f_i(x^0) = \max_{x \in X} \min_{i \in M} \mu_i f_i(x).$$

Условие единственности точки максимума функции $\varphi(y)$ на множестве Y обеспечивается, например, единственностью точки максимума $\varphi(f(x))$ на X. Практически последнее условие гарантируется чаще всего в тех случаях, когда X выпукло, $\varphi(f(x))$ строго квазивогнута (в частности, строго вогнута) на X: как известно, строго квазивогнутая функция может достигать максимума лишь в единственной точке (см. § 2).

Например, строго вогнута функция $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$, где все $\mu_i \geqq 0$, все функции f_i вогнуты, по крайней мере одно $\mu_j > 0$ и соответствующая функция f_j строго вогнута. Строго квазивогнутой является функция $\min\limits_{i \in M} \mu_i f_i(x)$, где все $\mu_i \geqq 0$ и хотя бы одно $\mu_j > 0$, причем все функции f_i строго квазивогнуты.

В теореме 8 точка максимума φ на Z (см. (4)) оказывается единственной, если множество X выпукло, все функции $\varphi_j(f(x))$ квазивогнуты (при этом множество $\{x \in X \mid \varphi_j(f(x)) \geqq t_j,$ $j = 1, 2, \ldots, p\}$ выпукло), а $\varphi_0(f(x))$ строго квазивогнута. Аналогично в задаче (1.5.1) решение x^0 будет единственным, если X выпукло, все f_i квазивогнуты, причем f_l строго квазивогнута.

Пример 11. Рассмотрим многокритериальную задачу с векторным критерием $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, в которой все критерии f_i положительны на X, причем $f_1, \ldots, f_l$ желательно максимизировать, а $f_{l+1}, \ldots, f_m$ — минимизировать. Эту задачу, как отмечалось в § 1.3, можно представить в виде задачи максимизации с векторным критерием $(f_1, \ldots, f_l, -f_{l+1}, \ldots, -f_m)$. Так как функция $-1/t$ возрастает на $(-\infty, 0)$, то этот векторный критерий эквивалентен (см. § 1.8) векторному критерию $(f_1, \ldots, f_l, 1/f_{l+1}, \ldots, 1/f_m)$. Поэтому, ссылаясь на пример 5, можно утверждать, что при $\mu_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m$, любое решение $x^0 \in X$, доставляющее наибольшее на X значение функции

$$\frac{f_1^{\mu_1} \times f_2^{\mu_2} \times \ldots \times f_l^{\mu_l}}{f_{l+1}^{\mu_{l+1}} \times f_{l+2}^{\mu_{l+2}} \times \cdots \times f_m^{\mu_m}},$$

является эффективным.

5. Теорема 1 и пример 8 показывают, что если все критерии f_i положительны на X, то любое эффективное решение x^0 может быть выделено максимизацией на X функции $\min\limits_{i \in M} \mu_i f_i(x)$ при надлежащим образом подобранных положительных коэффициентах μ_i. Этот факт позволяет использовать такую функцию для построения множества (слабо) эффективных решений (см. § 3.5). С другой стороны, он говорит о том, что задачу выбора оптимального решения при наличии векторного критерия $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ формально можно свести к задаче оптимизации по одному критерию $\min\limits_{i \in M} \mu_i f_i$, в котором параметр $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ является неопределенным. А для решения последней задачи можно использовать, например, принцип максимина. Указанное положение было сформулировано и широко использовано Ю. Б. Гермейером при построении оригинальной методологии исследования операций [19, 21].

Следуя работе В. В. Подиновского [80], разберем подробнее этот подход к многокритериальным задачам для случая, когда никакой дополнительной информации для выбора оптимального решения во множестве $P_f(X)$ нет.

Пусть все критерии f_i положительны на X. Тогда, согласно теореме 1 и примеру 8, выбор единственного (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решения из множества $P_f(X)$ равносилен указанию вектора μ из множества

$$\mathrm{M}^0 = \left\{\mu \in E^m_> \mid \mu_i = 1/f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad x \in P_f(X)\right\}, \tag{25}$$

который следует использовать при максимизации на X функции

$$\psi(x, \mu) = \min_{i \in M} \mu_i f_i(x). \tag{26}$$

К задаче оптимизации с критерием $\psi(x, \mu)$ в котором значение параметра $\mu \in M^0$ считается неизвестным, формально можно применить тот или иной принцип принятия решений в условиях неопределенности. Критический обзор основных таких принципов имеется в книге [53].

Теорема 17. *Пусть X — непустой компакт, а все f_i положительны и непрерывны на X. Тогда, согласно принципам максимина (Вальда), минимаксного сожаления (Сэвиджа) и пессимизма-оптимизма (Гурвича), оптимальное по критерию* (26) *решение x^* удовлетворяет условию*

$$\min_{i \in M} \frac{f_i(x^*)}{f_i^*} = \max_{x \in X} \min_{i \in M} \frac{f_i(x)}{f_i^*}, \tag{27}$$

где

$$f_i^* = \max_{x \in X} f_i(x), \quad i \in M.$$

Доказательство. Заметим вначале, что в условиях теоремы множество Y непусто, замкнуто и ограничено, а функция $\min\limits_{i \in M} \dfrac{y_i}{f_i^*}$ непрерывна и не убывает по $\geq$ на Y. Поэтому, согласно теореме 10, во множестве точек максимума этой функции на Y имеются эффективные оценки, и оптимальными следует считать решения, имеющие эти оценки. Кроме того, по следствию 4 справедливы равенства

$$f_i^* = \max_{x \in X} f_i(x) = \max_{x \in P_f(x)} f_i(x). \tag{28}$$

Согласно принципу максимина оптимальным считается решение, максимизирующее функцию $\inf\limits_{\mu \in \mathrm{M}^0} \psi(x, \mu)$. Для произвольного фиксированного $x \in X$ можно записать

$$\inf_{\mu \in \mathrm{M}^0} \min_{i \in M} [\mu_i f_i(x)] = \min_{i \in M} \Big[f_i(x) \inf_{\mu \in \mathrm{M}^0} \mu_i\Big] = \min_{i \in M} \frac{f_i(x)}{\max\limits_{u \in P_f(X)} f_i(u)}. \tag{29}$$

Поэтому, в силу (28), оптимальное решение x^* удовлетворяет (27).

Принцип минимаксного сожаления рекомендует в качестве оптимального принять решение, минимизирующее на X функцию

$$\sup_{\mu \in \mathrm{M}^0} [\max_{u \in X} \psi(u, \mu) - \psi(x, \mu)]. \tag{30}$$

Согласно теореме 1 для любого фиксированного $\mu \in \mathrm{M}^0$

$$\max_{u \in X} \psi(u, \mu) = 1. \tag{31}$$

С учетом (31) и (29) для минимума функции (30) получаем

$$\min_{x \in X} \sup_{\mu \in \mathrm{M}^0} [1 - \psi(x, \mu)] = \min_{x \in X} [1 - \inf_{\mu \in \mathrm{M}^0} \psi(x, \mu)] =$$

$$= \min_{x \in X} \left[1 - \min_{i \in M} \frac{f_i(x)}{f_i^*}\right] = 1 - \min_{x \in X} \max_{i \in M} \frac{f_i(x)}{f_i^*}.$$

Таким образом, оптимальное решение x^* удовлетворяет равенству (27).

В соответствии с принципом пессимизма-оптимизма оптимальным считается решение, максимизирующее на X функцию

$$\lambda \inf_{\mu \in \mathrm{M}^0} \psi(x, \mu) + (1 - \lambda) \sup_{\mu \in \mathrm{M}^0} \psi(x, \mu), \tag{32}$$

где λ — некоторое фиксированное число из $[0, 1]$.

Если $x \in P_f(X)$, то $\psi(x, \mu) = 1$ при $\mu_i = \dfrac{1}{f_i(x)}$, $i \in M$. Наоборот, если $\psi(x', \mu'') = 1$ при некоторых $x' \in X$, $\mu'' \in \mathrm{M}^0$, то $f_i(x') \geqq f_i(x'')$, $i \in M$, где x'' — эффективное решение, соответствующее μ'' (см. (25)). Поэтому $f(x') = f(x'')$, так что $x' \in P_f(X)$. Наконец, если допустить, что $\psi(x', \mu'') > 1$ при некоторых $x' \in X$, $\mu'' \in \mathrm{M}^0$, то тогда должно быть $f(x') > f(x'')$ для эффективного решения x'', соответствующего μ'', что невозможно. Таким образом, функция $\psi(x, \mu)$ достигает на M^0 своего максимума тогда и только тогда, когда $x \in P_f(X)$.

Поскольку из $f(x') \geqq f(x'')$ следует $\psi(x', \mu) \geqq \psi(x'', \mu)$ при любом $\mu \in E^m_>$, то и

$$\inf_{\mu \in \mathrm{M}^0} \psi(x', \mu) \geqq \inf_{\mu \in \mathrm{M}^0} \psi(x'', \mu).$$

Кроме того, согласно теореме 3.2.4 множество $P_f(X)$ внешне устойчиво (см. § 1.4), т. е. для каждого $x'' \in X$ найдется такой $x' \in P_f(X)$, что $f(x') \geqq f(x'')$. С учетом всего изложенного можно утверждать, что функцию (32) можно максимизировать не на X, а на $P_f(X)$. Но если $x \in P_f(X)$, то с учетом (29) эту функцию можно представить в виде

$$\lambda \min_{i \in M} (f_i(x)/f_i^*) + (1 - \lambda).$$

Следовательно, и здесь оптимальное решение x^* удовлетворяет (27). ■

Как уже указывалось в § 1.5, считать оптимальным решение, обращающее в максимум на X функцию

$$h(x) = \min_{i \in M} \left| \frac{f_i(x)}{f_i^*} \right|, \tag{33}$$

было предложено в статье [217], а затем и в целом ряде других работ. Обоснование при этом сводилось к тому, что функция (33) безразмерна и позволяет «равномерно» по всем критериям f_i приблизиться к их максимумам f_i^*. Теорема 17 разъясняет смысл функции (33) с иной точки зрения и тем самым открывает новые возможности ее практического использования (пример см. в [80]).

Если решение, доставляющее функции $h(x)$ наибольшее на X значение h^*, не единственно, то во множестве X_h^* всех таких решений могут быть и неэффективные решения. Разумеется, согласно теореме 9, можно найти эффективное решение из X_h^*, максимизируя на X функцию $\sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)$ при условии $h(x) = h^*$. Однако, учитывая возможность неединственности точки максимума $h(x)$ на X, целесообразно уточнить само определение оптимального решения. Действительно, максимизация $h(x)$ означает выделение решений, для которых наименьшее из значений m функций $f_i(x)/f_i^*$ является наибольшим. Поэтому далее имеет смысл максимизировать на множестве всех таких решений второе наименьшее из значений указанных функций, затем на подмножестве выделенных при этом решений максимизировать третье наименьшее значение и т. д. до m-го наименьшего (т. е. фактически наибольшего) из значений. Решения, получающиеся в результате последовательной максимизации упорядоченных по возрастанию значений m функций, названы в [79] симметрично лексикографически оптимальными, кратко — SL-оптимальными. Все SL-оптимальные решения, разумеется, эффективны. Задачи отыскания таких решений подробно рассмотрены в [79, 85].

Взаимосвязь многокритериальных задач и однокритериальных с неопределенными параметрами можно установить и в других формах, используя теорему 2. Так, согласно следствию 1 из нее и примеру 8 выбор единственного (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решения из множества $P_f(X)$ равносилен указанию вектора $z \in P(Y)$, который следует использовать при максимизации на X функции

$$\min_{i \in M}[f_i(x) - z_i]. \tag{34}$$

К задаче оптимизации с критерием (34), в котором значение параметра $z \in P(Y)$ считается неизвестным, также формально можно применить тот или иной принцип принятия решений в условиях неопределенности.

Теорема 18. *Пусть X — непустой компакт и все f_i, непрерывны. Тогда, согласно принципам максимина, минимаксного сожаления и пессимизма-оптимизма оптимальное по* (34) *решение $x^* \in P_f(X)$ удовлетворяет условию*

$$\max_{i \in M}[f_i^* - f_i(x^*)] = \min_{x \in X}\max_{i \in M}[f_i^* - f_i(x)]. \tag{35}$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 17. В частности,

$$\max_{x \in X}\inf_{z \in P(Y)}\min_{i \in M}[f_i(x) - z_i] = \max_{x \in X}\min_{i \in M}[f_i(x) - f_i^*] =$$
$$= -\min_{x \in X}\max_{i \in M}[f_i^* - f_i(x)].$$

Практически определение оптимального решения, задаваемого условием (35), можно использовать лишь в том случае, когда все критерии f_i однородны, т. е. имеют единую шкалу. В общем же случае вводят какие-либо нормирующие множители. Часто минимизируют на X функцию (когда все $f_i^* > 0$)

$$\max_{i \in M} \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*} \tag{36}$$

или

$$\max_{i \in M} \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^* - f_{i_*}}, \tag{37}$$

где в роли f_{i*} выступают, например, числа $\min\limits_{x \in X} f_i(x)$.

Легко видеть, что решение $x^* \in X$ обращает в максимум функцию (36) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет равенству (27), поскольку

$$\max_{i \in M} \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*} = \max_{i \in M} \left(1 - \frac{f_i(x)}{f_i^*}\right) = 1 - \min_{i \in M} \frac{f_i(x)}{f_i^*}.$$

С учетом возможности неединственности точки максимума функции (37) на X также целесообразно искать SL-оптимальные решения для задачи минимизации с векторным критерием

$$\left(\frac{f_1^* - f_1(x)}{f_1^* - f_{1*}}, \frac{f_2^* - f_2(x)}{f_2^* - f_{2_*}}, \ldots, \frac{f_m^* - f_m(x)}{f_m^* - f_{m_*}}\right).$$

6. Теоремы 1 и 2 позволяют также дать теоретико-игровую интерпретацию слабо эффективным и эффективным оценкам и решениям.

Напомним, что бескоалиционной игрой двух лиц называется система вида $\Gamma = \langle S_1, S_2, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, где S_1 и S_2 — множества стратегий, а φ_1 и φ_2 — функции выигрыша (числовые функции, определенные на множестве ситуаций $S_1 \times S_2$) первого и второго игроков соответственно. В такой игре каждый игрок j независимо от другого выбирает свою стратегию $s_j \in S_j$. После того как в результате выборов образуется ситуация (s_1, s_2), первый игрок получает выигрыш $\varphi_1(s_1, s_2)$, а второй соответственно $\varphi_2(s_1, s_2)$.

Важнейшим принципом оптимальности в бескоалиционных играх является стремление игроков к ситуации равновесия (см. [53]): ситуация (s_1^0, s_2^0) называется равновесной, если

$$\varphi_1(s_1^0, s_2^0) \geqq \varphi_1(s_1, s_2^0) \text{ для всех } s_1 \in S_1,$$
$$\varphi_2(s_1^0, s_2^0) \geqq \varphi_2(s_1^0, s_2) \text{ для всех } s_2 \in S_2.$$

Если оба эти неравенства при любых $s_1 \neq s_1^0$, $s_2 \neq s_2^0$ являются строгими, то (s_1^0, s_2^0) — ситуация строгого равновесия.

Ситуации равновесия (s_1', s_2') и (s_1'', s_2'') называются эквивалентными, если $\varphi_j(s_1', s_2') = \varphi_j(s_1'', s_2'')$, $j = 1, 2$. Ситуация равновесия (s_1^*, s_2^*) называется недоминируемой (оптимальной по Парето), если не существует ситуации (s_1, s_2) такой, что справедливы два неравенства $\varphi_j(s_1, s_2) \geqq \varphi_j(s_1^*, s_2^*)$, $j = 1, 2$, по крайней мере одно из которых строгое.

Теорема 19. *Если* $Y \subset E_>^m$, *то в игре* $\Gamma = \langle Y, Y, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, *где*

$$\varphi_1(y, z) = \min_{i \in M} \frac{y_i}{z_i}, \quad \varphi_2(y, z) = \min_{i \in M} \frac{z_i}{y_i}, \tag{38}$$

множество ситуаций равновесия есть $\{(y^0, y^0) \mid y^0 \in S(Y)\}$, *а множество ситуаций строгого равновесия* — $\{(y^0, y^0) \mid y^0 \in P(Y)\}$, *причем все ситуации равновесия эквивалентны и недоминируемы.*

Теорема 20. *В игре* $\Gamma = \langle Y, Y, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, *где*

$$\varphi_1(y, z) = \min_{i \in M}(y_i - z_i), \quad \varphi_2(y, z) = \min_{i \in M}(z_i - y_i), \tag{39}$$

множество ситуаций равновесия есть $\{(y^0, y^0) \mid y^0 \in S(Y)\}$, *а множество ситуаций строгого равновесия* — $\{(y^0, y^0) \mid y^0 \in P(Y)\}$, *причем все ситуации равновесия эквивалентны и недоминируемы.*

Заметим, что утверждение из теоремы 19 о структуре ситуаций равновесия родственно теореме 2 из [4].

Доказательства теорем 19 и 20 проводятся аналогично, только в первом случае используется теорема 1, а во втором — следствие 1. Докажем, например, теорему 20.

Пусть (y^0, z^0) — ситуация равновесия:

$$\varphi_1(y^0, z^0) \geqq \varphi_1(y, z^0) \text{ для всех } y \in Y, \tag{40}$$

$$\varphi_2(y^0, z^0) \geqq \varphi_2(y^0, z) \text{ для всех } z \in Y. \tag{41}$$

Из (40), согласно теореме 3, вытекает, что $y^0 \in S(Y)$. Если же в (40) при любом $y \neq y^0$ неравенство строгое, то, как показывает теорема 7, $y^0 \in P(Y)$. Допустим, что $z^0 \neq y^0$. В силу (40) $z^0 \geq y^0$ невозможно (ибо $\varphi_1(z^0, z^0) = 0$), так что $z_i^0 < y_i^0$ для некоторого $i \in M$. Тогда $\varphi_2(y^0, z^0) < 0 = \varphi_2(y^0, y^0)$, что противоречит (41). Поэтому $z^0 = y^0$.

Пусть теперь, наоборот, $y^0 \in S(Y)$. Рассмотрим ситуацию (y^0, y^0). По следствию 1 выполняется (40). Если при этом $y^0 \in P(Y)$, то, согласно примеру 8, для любого $y \neq y^0$ неравенство (40) будет строгим. Возьмем произвольную точку $z \in Y$, отличную от y^0. В силу $y^0 \in S(Y)$ найдется номер $i \in M$, для которого $z_i \leqq y_i^0$. Поэтому $\varphi_2(y^0, z) \leqq 0 = \varphi_2(y^0, y^0)$. Следовательно, выполняется и (41). Если же $y^0 \in P(Y)$, то $z_i < y_i$ для некоторого $i \in M$, и тогда $\varphi_2(y^0, z) < 0 = \varphi_2(y^0, y^0)$.

Итак, множество ситуаций равновесия имеет вид $\{(y^0, y^0) \mid \mid y^0 \in S(Y)\}$, а ситуаций строгого равновесия — $\{(y^0, y^0) \mid y^0 \in \in P(Y)\}$. Поскольку $\varphi_1(y, y) = \varphi_2(y, y) = 0$ при любом $y \in Y$, то все ситуации равновесия эквивалентны. Допустим, что некоторая ситуация равновесия (y^0, y^0) доминируема: существует ситуация (y, z) такая, что, например,

$$\varphi_1(y, z) > \varphi_1(y^0, y^0) = 0, \quad \varphi_2(y, z) \geqq \varphi_2(y^0, y^0) = 0.$$

Но из первого неравенства следует $y_i > z_i$, а из второго $z_i \geqq y_i$ для всех $i \in M$. Полученное противоречие показывает, что всякая ситуация равновесия недоминируема. ■

Рассмотрим теперь игру двух лиц с фиксированной последовательностью ходов $\Gamma_1 = \langle\langle S_1, S_2, \varphi_1, \varphi_2 \rangle\rangle$, отличающуюся от разбиравшейся бескоалиционной игры Γ тем, что в ней первый игрок, не имея информации о выборе второго игрока, первым принимает решение о выборе $s_1 \in S_1$ и сообщает стратегию s_1 второму игроку [22]. Следовательно, ход второго игрока состоит в выборе стратегии $s_2 \in S_2$ из множества $B(s_1)$ точек максимума на S_2 его функции выигрыша φ_2:

$$B(s_1) = \left\{ s_2 \in S_2 \mid \varphi_2(s_1, s_2) = \max_{u \in S_2} \varphi_2(s_1, u) \right\}. \tag{42}$$

Предполагается, что при любом $s_1 \in S_1$ множество $B(s_1)$ непусто. Это условие выполнено, когда S_2 — компакт, а $\varphi_2(s_1, s_2)$ непрерывна на S_2 при каждом $s_1 \in S_1$.

Поскольку выбор второго игрока первому неизвестен, то гарантированный выигрыш первого игрока, обеспечиваемый стратегией s_1, вычисляется по формуле

$$\underline{\varphi}_1(s_1) = \inf_{s_2 \in B(s_1)} \varphi_1(s_1, s_2), \tag{43}$$

а наибольший гарантированный выигрыш равен

$$\underline{\varphi}_1^* = \sup_{s_1 \in S_1} \underline{\varphi}_1(s_1). \tag{44}$$

Оптимальной для первого игрока является стратегия s_1^*, удовлетворяющая равенству $\underline{\varphi}_1(s_1^*) = \underline{\varphi}_1^*$, т. е. обеспечивающая ему получение наибольшего гарантированного выигрыша.

Теорема 21. *Пусть Y непусто, замкнуто и ограничено. Тогда в игре $\Gamma_1 = \langle\langle Y, Y, \varphi_1, \varphi_2\rangle\rangle$, где функции φ_1 и φ_2 определяются формулами* (39), *множество оптимальных стратегий первого игрока есть $P(Y)$.*

Теорема 22. *Пусть Y — непустое, замкнутое и ограниченное подмножество $E^m_>$. Тогда в игре $\Gamma_1 = \langle\langle Y, Y, \varphi_1, \varphi_2\rangle\rangle$, где φ_1 и φ_2 определяются формулами* (38), *множество оптимальных стратегий первого игрока есть $P(Y)$.*

Доказательства обеих этих теорем, первая из которых принадлежит Д. А. Молодцову [58], проводятся аналогичным образом. Докажем, например, теорему 22. Введем обозначение $\overline{\varphi}_2(y) = \max\limits_{z \in Y} \varphi_2(y, z)$. Так как при любом фиксированном $y \in E^m$ функция $\varphi_2(y, z)$ непрерывна на E^m, то $\overline{\varphi}_2$ определена корректно, а множество $B(y)$ (см. (42)) непусто, замкнуто и ограничено.

Поскольку $\varphi_2(y, y) = 1$, то $\overline{\varphi}_2(y) \geqq 1$ для любого $y \in Y$. Пусть $z \in B(y)$. Тогда для всякого $i \in M$ верно $z_i/y_i \geqq 1$, откуда $y_i/z_i \leqq 1$. Следовательно, $\varphi_1(y, z) \leqq 1$. Поэтому

$$\underline{\varphi}_1^* = \sup_{y \in Y} \min_{z \in B(y)} \varphi_1(y, z) \leqq 1.$$

Возьмем $y^0 \in P(Y)$. Тогда, согласно теореме 1 и примеру 8, $\overline{\varphi}_2(y^0) = 1$ и $B(y^0) = \{y^0\}$. Отсюда вытекает, что $\varphi_1^* = 1$. Следовательно, любая эффективная точка $y^0 \in Y$ является оптимальной стратегией первого игрока.

Пусть теперь y^0 — оптимальная стратегия первого игрока, т. е.

$$\min_{z \in B(y^0)} \varphi_1(y^0, z) = 1. \tag{45}$$

Допустим, что $\overline{\varphi}_2(y^0) > 1$, т. е. $\varphi_2(y^0, z^0) > 1$ при некотором z^0 из $B(y^0)$. Тогда $y_i^0/z_i^0 > 1$ при всяком $i \in M$, откуда $\varphi_1(y^0, z^0) < 1$, и получается противоречие с (45). Поэтому $\overline{\varphi}_2(y^0) = 1$ и $B(y^0) = \{z \in Y \mid z \geqq y^0\}$. Предположим, что в $B(y^0)$ найдется точка z, отличная от y^0. Тогда $z_j > y_j^0$ при некотором $j \in M$, откуда $\varphi_1(y^0, z) < 1$. А это противоречит (45). Следовательно, $B(y^0) = \{y^0\}$. Это означает, что y^0 эффективна. ■

§ 2.2. Условия оптимальности для вогнутых и линейных задач

В этом параграфе разбираются условия оптимальности для важнейших классов многокритериальных задач — вогнутых и линейных. Но вначале (п. 1) приводятся необходимые для дальнейшего изложения краткие сведения о вогнутых функциях, их обобщениях, а также об используемых ниже теоремах об альтернативе для систем линейных и вогнутых неравенств.

1. Множество $D \subseteq E^n$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и соединяющий их отрезок, т. е. если $(\lambda x + (1-\lambda)x') \in D$ при любых $x, x' \in D$ и $\lambda \in [0,1]$.

Пусть числовая функция h определена на выпуклом множестве $D \subseteq E^n$. Эту функцию называют *вогнутой*, если для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых $x, x' \in D$ выполняется неравенство

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') \geqq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(x').$$

В том случае, когда для любого $\lambda \in (0,1)$ и любых $x, x' \in D, x \neq x'$, имеет место строгое неравенство

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') > \lambda h(x) + (1-\lambda)h(x'),$$

функцию h называют *строго вогнутой*.

Подробное изложение всевозможных свойств вогнутых функций можно найти в монографии [93]. Отметим лишь следующее характеристическое свойство вогнутой дифференцируемой функции: дифференцируемая функция h вогнута тогда и только тогда, когда для любых $x, x' \in D$ выполняется неравенство

$$h(x') - h(x) \leqq \langle \nabla h(x), x' - x \rangle.$$

Через $\nabla h(x)$ здесь обозначен градиент функции h, вычисленный в точке x.

Дифференцируемую на D функцию h называют *псевдовогнутой*, если для любых $x, x' \in D$ неравенство $\langle \nabla h(x), x' - x \rangle \leqq 0$ влечет $h(x') \leqq h(x)$.

Каждая вогнутая дифференцируемая функция является псевдовогнутой, но не наоборот.

Если для любого $\lambda \in [0,1]$ и произвольных $x, x' \in D$ справедливо неравенство

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') \geqq \min\{h(x); h(x')\},$$

то функцию h называют *квазивогнутой*. Квазивогнутая функция h обладает тем свойством, что для любого числа α множество

$\{x \in D \mid h(x) \geqq \alpha\}$ выпукло. На рис. 3 приведены иллюстрации понятий вогнутой (*а*), псевдовогнутой (*б*) и квазивогнутой (*в*) функций одной переменной.

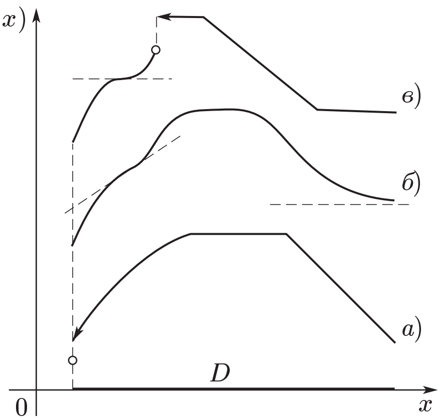

Рис. 3

Когда для любого $\lambda \in (0,1)$ и всех $x, x' \equiv D$, $x \neq x'$, имеет место строгое неравенство

$$h(\lambda x + (1-\lambda)x') > \min\{h(x);\ h(x')\}, \tag{1}$$

функцию h называют *строго квазивогнутой*. Строго вогнутая функция строго квазивогнута, а псевдовогнутая функция квазивогнута, но не наоборот. Если строго квазивогнутая функция достигает своего максимального значения на множестве D, то в единственной точке.

Функцию h называют *сильно квазивогнутой*, если для любых $\lambda \in (0,1)$; $x, x' \in D$ таких, что $h(x) \neq h(x')$, имеет место строгое неравенство (1). Каждая псевдовогнутая функция является сильно квазивогнутой. Если h полунепрерывна сверху и сильно квазивогнута, то она квазивогнута. Сильно квазивогнутая функция обладает тем свойством, что всякий ее локальный максимум является глобальным.

Когда функция $-h$ вогнута, псевдовогнута и т. п., то саму функцию h называют выпуклой, псевдовыпуклой и т. п.

В том случае, если все компоненты некоторой вектор-функции являются вогнутыми, псевдовогнутыми и т. п. функциями, эту вектор-функцию будем называть вогнутой, псевдовогнутой и т. п.

Некоторые свойства псевдовогнутых и квазивогнутых функций рассмотрены в книге [37]. Подробное изложение свойств всех приведенных обобщений вогнутой функции можно найти в [197].

Важную роль при изучении экстремальных задач играют так называемые теоремы об альтернативе для систем линейных и вогнутых неравенств. Насчитывается немалое число подобного рода теорем. Приведем формулировки некоторых из них.

Пусть A и B — числовые матрицы размера $m \times n$ и $k \times n$ соответственно. Будем считать, что матрица A содержит по крайней мере один ненулевой элемент.

Т е о р е м а (Моцкин). *Имеет место один и только один из следующих двух случаев*:

1) *система однородных линейных неравенств*

$$Ax > 0_{(m)}, \quad Bx \geqq 0_{(k)}$$

имеет решение $x \in E^n$;

2) *система однородных линейных уравнений*

$$y^1 A + y^2 B = 0_{(n)} \tag{2}$$

имеет решение $y^1 \geq 0_{(m)}$, $y^2 \geqq 0_{(k)}$.

Т е о р е м а (Таккер). *Имеет место один и только один из следующих двух случаев*:

1) *система однородных линейных неравенств*

$$Ax \geq 0_{(m)}, \quad Bx \geqq 0_{(k)}$$

имеет решение $x \in E^n$;

2) *система однородных линейных уравнений* (2) *имеет решение* $y^1 > 0_{(m)}$, $y^2 \geqq 0_{(k)}$.

Т е о р е м а (Фан–Гликсберг–Гоффман). *Пусть множество* $D \subseteq E^n$ *выпукло и* m*-мерная вектор-функция* h *вогнута на этом множестве. Тогда имеет место один и только один из следующих двух случаев*:

1) *система вогнутых неравенств* $h(x) > 0_{(m)}$ *имеет решение* $x \in D$;

2) *существует такой вектор* $y \geq 0_{(m)}$, *что* $\langle y, h(x) \rangle \leqq 0$ *для всех* $x \in D$.

П р и м е ч а н и е 1. Как легко видеть, в этих теоремах всегда можно считать, что сумма компонент ненулевых векторов y^1 и y равна единице.

Доказательства первых двух теорем можно найти в [197], третьей — в [93, 197].

2. Выпуклость множества Y позволяет сформулировать более простые и содержательные условия оптимальности, чем условия, приведенные в предыдущем параграфе. Из рис. 4 видно, что

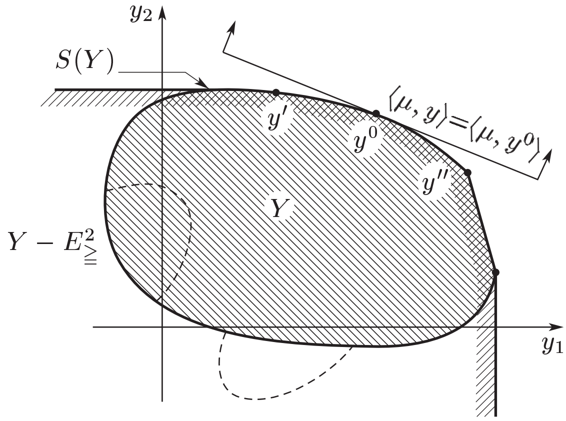

Рис. 4

для любой слабо эффективной оценки y^0 можно подобрать такой ненулевой вектор $\mu \in E^m_{\geqq}$, при котором функция $\langle \mu, y\rangle$ достигает максимума на Y в точке y^0. Точка y' показывает, что даже для эффективной оценки некоторые компоненты μ_i вектора μ могут равняться нулю. А точка y'' указывает на то, что вектор μ не обязательно должен определяться единственным образом.

Попробуем распространить сформулированное утверждение на случай невыпуклого множества Y. Анализ рис. 4 показывает, что в приведенных рассуждениях использовалась по-существу выпуклость не самого множестве Y, а «выпуклость» его «северо-восточной» границы. Действительно, если, например, от множества Y «отрезать» часть по штрих-пунктирной линии или, наоборот, «добавить» часть, ограниченную штриховой линией (или же сделать и то, и другое), то и для полученного множества высказанные соображения о свойствах точек y^0, y', y'' сохранят свою силу. Это объясняется тем, что существенную роль здесь играет лишь выпуклость множества $Y_* = Y - E^m_{\geqq}$, полученного из Y добавлением к каждой его точке ортанта $-E^m_{\geqq}$ (на рис. 4 граница множества Y_* отмечена короткой штриховкой). Таким образом, если оценка y^0

слабо эффективна для множества Y, то, как легко видеть, она будет слабо эффективной и для Y_*, а значит, пользуясь сформулированным выше утверждением применительно к выпуклому множеству Y_*, можно указать такой вектор $\mu \geq 0_{(m)}$, при котором функция $\langle \mu, y \rangle$ достигает максимума на Y_* (а стало быть, и на Y) в точке y^0.

В вогнутых многокритериальных задачах (т. е. когда X выпукло, а f вогнута) множество Y, вообще говоря, невыпукло, однако выпуклым оказывается множество Y_* (см. ниже лемму 2). Поэтому для каждого слабо эффективного решения x^0 существует вектор $\mu \geq 0_{(m)}$ такой, что $\langle \mu, f(x^0) \rangle = \max\limits_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle$. Очевидно, всегда можно считать, что сумма компонент вектора μ равна единице.

П р и м е ч а н и е 2. Указанное необходимое условие слабой эффективности решений прямо вытекает из одного общего результата, полученного Л. Гурвичем для задачи оптимизации по выпуклому конусу ([30] *), теорема 5.3.1). Позднее для эффективных решений оно было дано С. Карлиным [41], хотя в неявном виде (в терминах теории статистических решений) встречается еще у А. Вальда [235, 11] **). Л. Заде [249] указал на разобранное выше необходимое условие эффективности оценок для выпуклого множества Y уже после С. Карлина. Справедливость этого условия для невыпуклого Y в случае выпуклости множества Y_* вытекает из результатов П. Ю [246]. Дж. Лин [192] установил это условие для более частного случая так называемой p-направленной выпуклости множества Y (при $p \in E^m_{\geqq}$).

3. Перейдем к строгому изложению.

Л е м м а 1. 1) *Пусть* $y^0 \in Y$. *Оценка* y^0 *слабо эффективна для множества* Y *тогда и только тогда, когда она слабо эффективна для множества* Y_*;

2) $S(Y) = Y \cap \mathrm{Fr}(Y_*)$, *где через* $\mathrm{Fr}(Y_*)$ *обозначена граница множества* Y_*;

3) $P(Y) = P(Y_*)$;

4) $G(Y) = G(Y_*)$;

5) $B(Y) = B(Y_*)$.

*) Эта работа, как указано в предисловии к книге К. Дж. Эрроу, Л. Гурвича и Х. Удзавы «Исследования по линейному и нелинейному программированию», выполнена в 1952–1954 гг.

**) В списке литературы указаны русские переводы [41, 11]. В оригинале (на английском языке) первый том монографии С. Карлина вышел в 1959 г., а книга А. Вальда — в 1950 г.

Доказательство. 1) Если $y^0 \in Y$ является слабо эффективной оценкой для Y_*, то, очевидно, она слабо эффективна и для Y, так как $Y \subseteq Y_*$. Для доказательства обратного утверждения предположим противное: $y^0 \in S(Y)$ и существует такая точка $z \in Y_*$, что $z > y^0$. Согласно равенству $Y_* = Y - E^m_{\geqq}$ это означает, что для некоторых $y \in Y$ и $e \in E^m_{\geqq}$ верно $y - e > y^0$. Но тогда $y > y^0$, что противоречит $y^0 \in S(Y)$.

2) Пусть $y^0 \in S(Y)$. Если $y^0 \notin \mathrm{Fr}(Y_*)$, то найдется $z \in Y_*$, для которого $z > y^0$. Но так как $z \in Y_*$, то $z = y - e$ для некоторых $y \in Y$ и $e \in E^m_{\geqq}$. Поэтому $y > y^0$, что противоречит $y^0 \in S(Y)$.

Наоборот, пусть $y^0 \in Y \cap \mathrm{Fr}(Y_*)$. Если $y^0 \notin S(Y)$, то существует элемент $y \in Y$ такой, что $y > y^0$, а это противоречит условию $y^0 \in \mathrm{Fr}(Y_*)$.

3) Пусть $y^0 \in P(Y)$. Предположим, что $y^0 \notin P(Y_*)$, так что найдется $z \in Y_*$, для которого $z \geq y^0$. Тогда $y - e \geq y^0$ при некоторых $y \in Y$ и $e \in E^m_{\geqq}$, что противоречит $y^0 \in P(Y)$. Следовательно, $P(Y) \subseteq P(Y_*)$.

Пусть теперь $y^0 \in P(Y_*)$ и $y^0 \notin P(Y)$. Отсюда в силу $Y \subseteq Y_*$ следует $y^0 \notin Y$. Поэтому $y^0 = y - e$ для некоторых $y \in Y$ и $e \geq 0_{(m)}$, что противоречит $y^0 \in P(Y_*)$. Значит, $P(Y_*) \subseteq P(Y)$.

В справедливости равенства 4) легко убедиться, воспользовавшись теоремой 1.15.

Для доказательства равенства 5) достаточно заметить, что в определении подлинной эффективности участвует именно множество Y_* (см. (1.6.5)). ■

В общем случае равенство $S(Y) = S(Y_*)$ не имеет места.

Пример 1. Пусть $Y = \{y \in E^2 \mid y_2 < 0\} \cup \{(0,0)\}$. Тогда $Y_* = Y \cup \{y \in E^2 \mid y_1 < 0, y_2 = 0\}$. Очевидно, точка $y^0 = (-1, 0)$ входит в $S(Y_*)$. Однако $y^0 \notin Y$, и поэтому $y^0 \notin S(Y)$.

Множество Y будем называть *эффективно выпуклым*, если выпукло множество Y_* *). Легко видеть, что если Y выпукло, то оно и эффективно выпукло, но не наоборот.

Введем в рассмотрение замыкание $\overline{\mathrm{M}}$ множества M:

$$\overline{\mathrm{M}} = \Big\{\mu \in E^m_{\geqq} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\Big\}. \tag{3}$$

---

*) Множество Y называется Ω-выпуклым ($\Omega \subseteq E^m$), если выпукло множество $Y + \Omega$ [246]. Следовательно, эффективно выпуклое — это $(-E^m_{\geqq})$ — выпуклое множество.

Теорема 1 (Ю). *Пусть Y эффективно выпукло. Оценка $y^0 \in Y$ слабо эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, при котором*

$$\langle \mu, y^0 \rangle \geqq \langle \mu, y \rangle \text{ для всех } y \in Y. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1.3 (эту часть доказательства легко проверить и опираясь непосредственно на определение слабо эффективной оценки). Пусть $y^0 \in S(Y)$. Благодаря эффективной выпуклости Γ и лемме 1, множество Y можно считать выпуклым. Таким образом, система неравенств $y_i - y_i^0 > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, несовместна на выпуклом множестве Y. По теореме Фана–Гликсберга–Гоффмана существует такой вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, что $\langle \mu, y - y^0 \rangle \leqq 0$ для всех $y \in Y$. ■

Введем множества

$$Y_{\geqq} = \bigcup_{\mu \in \overline{\mathrm{M}}} \left\{ y^0 \in Y \mid \langle \mu, y^0 \rangle = \max_{y \in Y} \langle \mu, y \rangle \right\}, \tag{5}$$

$$Y_{>} = \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} \left\{ y^0 \in Y \mid \langle \mu, y^0 \rangle = \max_{y \in Y} \langle \mu, y \rangle \right\}, \tag{6}$$

где M определяется выражением (1.2.1). Согласно теореме 1.3 и примеру 1.2 всегда справедливы включения

$$Y_{>} \subseteq P(Y) \subseteq S(Y), \quad Y_{\geqq} \subseteq S(Y),$$

причем рис. 4 показывает, что все они в общем случае являются строгими. Если множество Y эффективно выпукло, то по теореме 1 $Y_{\geqq} = S(Y)$, однако включения

$$Y_{>} \subseteq P(Y) \subseteq Y_{\geqq} \tag{7}$$

могут оставаться строгими (рис. 4). Более глубокая взаимосвязь множеств из (7) будет раскрыта в третьей главе.

Нижеследующая лемма позволит результаты, сформулированные выше для оценок, перенести на решения вогнутых многокритериальных задач.

Лемма 2 (Ю). *Если X выпукло, а f вогнута, то множество Y является эффективно выпуклым.*

Доказательство. Пусть $y' \leqq f(x^1)$ и $y'' \leqq f(x^2)$. Надо показать, что для любого $\lambda \in (0, 1)$ точка $y^0 = \lambda y' + (1-\lambda) y''$ принадлежит множеству Y_*. В силу вогнутости f имеем

$$y^\lambda = f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) \geqq \lambda y' + (1-\lambda) y'' = y^0.$$

Следовательно, можно записать $y^0 = y^\lambda - e$, где $y^\lambda \in Y$, $e \in E^m_{\geqq}$. ■

Из теоремы 1 и последней леммы вытекает

Теорема 2 (Гурвич, Карлин). *Пусть X выпукло, а f вогнута. Для слабой эффективности точки $x \in X$ необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, при котором имеет место равенство*

$$\langle \mu, f(x^0) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle. \tag{8}$$

Примечание 3. Теорема 2 была получена как следствие теоремы 1. В свою очередь теорема 1 является следствием леммы 2 и теоремы 2, если в последней в качестве X взять Y, а вместо f — линейную вектор-функцию $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Таким образом, указанные теоремы эквивалентны.

По аналогии с (5) и (6) можно ввести множества

$$X_{\geqq} = \bigcup_{\mu \in \overline{\mathrm{M}}} \{x^0 \in X \mid \langle \mu, f(x^0) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle\}, \tag{9}$$

$$X_{>} = \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} \{x^0 \in X \mid \langle \mu, f(x^0) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle\}, \tag{10}$$

для которых всегда верны включения

$$X_{>} \subseteq P_f(X) \subseteq S_f(X), \quad X_{\geqq} \subseteq S_f(X).$$

Теорема 2 показывает, что в вогнутых многокритериальных задачах имеет место равенство

$$X_{\geqq} = S_f(X), \tag{11}$$

хотя, как следует из вышеизложенного, включения

$$X_{>} \subseteq P_f(X) \subseteq X_{\geqq} \tag{12}$$

могут быть строгими. Итак, каждая слабо эффективная точка является решением вогнутой задачи максимизации функции $\langle \mu, f(x) \rangle$ при некотором $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$; и наоборот, каждое решение такой задачи есть слабо эффективная точка.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Пусть X выпукло, f вогнута, $Y \subset E^m_{>}$. Тогда решение x^0 слабо эффективно в том и только том случае, если при некотором $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$

$$\prod_{i=1}^{m} f_i^{\mu_i}(x^0) = \max_{x \in X} \prod_{i=1}^{m} f_i^{\mu_i}(x).$$

Действительно, согласно лемме 1.8.2, $x^0 \in S_f(X)$ тогда и только тогда, когда x^0 слабо эффективно по вектор-функции

$f' = (\ln f_1, \ln f_2, \ldots, \ln f_m)$. Но f', как несложно проверить, вогнута, и для нее равенство (8) равносильно вышеуказанному. ■

Теорему 2 можно несколько усилить в случае $m > n+1$, если воспользоваться следующим результатом, имеющим и определенный самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Предположим, что вектор-функция f квазивогнута на выпуклом множестве X. Точка $x^0 \in X$ слабо эффективна по f относительно X тогда и только тогда, когда она слабо эффективна по некоторой не более чем $(n+1)$-мерной вектор-функции, составленной из компонент вектор-функции f.*

Доказательство. Если точка x^0 слабо эффективна по некоторой вектор-функции, образованной из компонент $f_1, f_2, \ldots, f_m$, то, очевидно, эта точка будет слабо эффективной и по вектор-функции f. Докажем необходимость. Предположим противное: x^0 слабо эффективна по f, но по каждой вектор-функции, образованной из $n+1$ компонент f, она не является слабо эффективной. Положим

$$X_i = \{x \in X \mid f_i(x) > f_i(x^0)\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Благодаря квазивогнутости f, все множества X_i являются выпуклыми. Так как точка x^0 не является слабо эффективной по каждой вектор-функции, образованной из $n+1$ компонент f, то пересечение любых $n+1$ множеств из семейства $X_1, X_2, \ldots, X_m$ непусто. В этом случае согласно теореме Хелли (см. [93]) $\bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i \neq \varnothing$. Это означает существование $x \in X$, для которого $f(x) > f(x^0)$, что противоречит предположению о слабой эффективности x^0 по вектор-функции. ■

Из теоремы 2 и леммы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть множество X выпукло, вектор-функция $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ вогнута на X и $m > n+1$. Точка $x^0 \in X$ слабо эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, у которого не более чем $n+1$ положительная компонента и такой, что справедливо равенство* (8).

Так как строго вогнутая функция является и строго квазивогнутой, то из теорем 1.6.2 и 2, а также примера 1.2 вытекает

Следствие 2. *Пусть X выпукло, а f строго вогнута. Для эффективности точки $x^0 \in X$ необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, при котором справедливо равенство* (8).

4. Перейдем к рассмотрению свойств собственно эффективных оценок и решений.

Теорема 3. *Пусть множество Y эффективно выпукло. Оценка $y^0 \in Y$ собственно эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in$ M, при котором имеет место* (4).

Доказательство. Достаточность следует из следствия 1.5. Проверим необходимость. Согласно лемме 1 и теореме 1.14 из собственной эффективности точки $y^0 \in Y$ вытекает, что эта точка является слабо эффективной относительно множества Y_* по вектор-функции $(\langle\mu^1, y\rangle, \langle\mu^2, y\rangle, \ldots, \langle\mu^m, y\rangle)$, где векторы $\mu^i \in$ M имеют вид (1.14). Следовательно, по теореме 2 существует вектор $\overline{\mu} \in \overline{\mathrm{M}}$ такой, что для всех $y \in Y_*$

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}_i \langle\mu_i, y^0 - y\rangle \geqq 0.$$

Отсюда, учитывая вид (1.14) векторов μ^i и условие $\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\mu}^i = 1$, после несложных преобразований получаем

$$\sum_{i=1}^{m} [\overline{\mu}_i(1 - m\varepsilon) + \varepsilon](y_i^0 - y_i) \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad y \in Y_*.$$

Введем вектор μ с компонентами $\mu_i = \overline{\mu}_i(1 - m\varepsilon) + \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$. Остается показать, что $\mu \in$ M. Так как $\mu^i \in$ M, то $\varepsilon > 0$ и $1 - (m-1)\varepsilon > 0$. Поэтому $\mu_i > \varepsilon(1 - \mu_i) \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = m\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}_i(1 - m\varepsilon) = 1. \qquad \blacksquare$$

Согласно теореме 1.12 в общем случае каждая собственно эффективная оценка y^0 характеризуется набором из m векторов $\mu^i \in$ M таким, что для любого $y \in Y$ найдется вектор из этого набора, обеспечивающий выполнение неравенства (1.9). Доказанная теорема говорит о том, что при эффективной выпуклости Y вместо всего такого набора можно указать один вектор $\mu \in$ M. Поэтому $G(Y) = Y_>$. Заметим, что на рис. 4 точка y' несобственно эффективна.

Примечание 4. Теорема 3 устанавливает характеристическое свойство собственно эффективных точек эффективно выпуклого множества Y при помощи функции $\varphi(y) = \langle\mu, y\rangle$, где $\mu \in$ M.

В работе [158] сходный результат при некоторых дополнительных условиях на множество оценок Y получен для функции

$$\varphi(y) = \Big[\sum_{i=1}^{m}((u_i - y_i)/\mu_i)^2\Big]^{1/2}, \quad \text{где } u_i > \sup_{y\in Y} y_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Опираясь на лемму 2, из теоремы 3 сразу получаем следующее утверждение, характеризующее собственно эффективные решения в вогнутых многокритериальных задачах.

Теорема 4 (Джоффрион). *Пусть X выпукло, а f вогнута. Для собственной эффективности точки $x^0 \in X$ необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\mu \in \mathrm{M}$, при котором имеет место равенство* (8).

Таким образом, для вогнутых многокритериальных задач справедливо равенство

$$G_f(X) = X_>. \tag{13}$$

Примечание 5. Теорема 4 была получена как следствие теоремы 3. На самом деле, теоремы 3 и 4 (так же, как теоремы 1 и 2) являются эквивалентными.

5. Рассмотрим подлинно эффективные оценки и решения. В предыдущем параграфе (см. теорему 1.16) равенство множеств подлинно и собственно эффективных точек было установлено при определенных предположениях, среди которых было условие замкнутости множества Y. Как показывает нижеследующая теорема, в случае эффективно выпуклого (и не обязательно замкнутого) Y равенство указанных множеств всегда имеет место.

Теорема 5. *Если множество Y эффективно выпукло, то $B(Y) = G(Y)$.*

Доказательство. Учитывая теорему 1.6.1, остается доказать включение $B(Y) \subseteq G(Y)$. Пусть $y^0 \in B(Y)$. Не умаляя общности, положим $y^0 = 0_{(m)}$.

Так же, как и в доказательстве теоремы 1.16, предполагая противоположное, получим существование последовательностей $\{\varepsilon_k\}, \{y^k\}$ таких, что $\varepsilon_k \to +0$ и имеет место (1.22), (1.23). Возможны два случая: последовательность точек $\{y^k\}$ может оказаться ограниченной либо неограниченной. Рассмотрим отдельно эти два случая.

1) Пусть $\sup_k ||y^k|| \leqq \mathrm{const}$. Поскольку из ограниченной последовательности всегда можно выделить сходящуюся подпоследова-

тельность, то будем считать сходящейся саму последовательность: $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = y^*$. Из (1.23) следует $y^* \geqq 0_{(m)}$. Если $y^* = 0_{(m)}$, то так же, как и в доказательстве теоремы 1.15, определим последовательность (1.24) и придем к противоречию. Пусть $y^* \geq 0_{(m)}$. Рассмотрим последовательность

$$\overline{\omega}^k = k\overline{y}_1^k,\ \text{где}\ \overline{y}^k = \frac{1}{k}y^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В силу выпуклости Y_* имеем $\overline{y}^k \in Y_*$. Таким образом, $\lim \overline{\omega}^k = y^* \in T(Y_*, 0_{(m)})$. Это вместе с неравенством $y^* \geq 0_{(m)}$ противоречит предположению $0_{(m)} \in B(Y)$.

2) Пусть $\sup\limits_k ||y^k|| = +\infty$. Можно считать, что $||y^k|| \geqq 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Введем последовательность

$$\widetilde{\omega}^k = k\widetilde{y}^k,\ \text{где}\ \widetilde{y}^k = \frac{1}{k||y^k||}y^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Благодаря выпуклости множества Y_* здесь также имеем $\widetilde{y}^k \in Y_*$, $k = 1, 2, \ldots$ Последовательность $\{\widetilde{\omega}^k\}$, как последовательность точек на единичной замкнутой сфере, можно считать сходящейся: $\lim \widetilde{\omega}^k = \widetilde{\omega} \in T(Y_*, 0_{(m)})$. Используя систему неравенств (1.23), нетрудно прийти к неравенству $\widetilde{\omega} \geqq 0_{(m)}$, которое вместе с $||\widetilde{\omega}|| = 1$ противоречит предположению $0_{(m)} \in B(Y)$. ■

Таким образом, в случае эффективной выпуклости Y понятия подлинной и собственной эффективности равносильны. Согласно лемме 2 этот вывод справедлив, в частности, для вогнутых многокритериальных задач: если X выпукло и f вогнута, то $B_f(X) = G_f(X)$ [124]. Следовательно, теоремы 3 и 4 устанавливают также характеристическое свойство подлинно эффективных оценок и решений.

6. Пусть вогнутые векторные функции $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ определены на выпуклом множестве $D \subseteq E^n$. В этом пункте для задачи с допустимым множеством (1.1.1) будут получены необходимые и достаточные условия оптимальности в терминах седловых точек *скалярной функции Лагранжа*

$$\mathscr{L}(\mu, x, \lambda) = \langle \mu, f(x) \rangle + \langle \lambda, g(x) \rangle.$$

Эта функция считается заданной для таких пар векторов (x, λ), что $x \in D$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$; m-мерный вектор μ здесь является параметром.

Напомним, что пара (x^0, λ^0) называется седловой точкой функции Лагранжа $\mathscr{L}(\mu, \cdot, \cdot)$, если неравенства

$$\mathscr{L}(\mu, x, \lambda^0) \leqq \mathscr{L}(\mu, x^0, \lambda^0) \leqq \mathscr{L}(\mu, x^0, \lambda) \tag{14}$$

имеют место для всех $x \in D$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$.

Теорема 6 (Кун–Таккер–Гурвич–Джоффрион). *Пусть вектор-функции f, g вогнуты на выпуклом множестве D и выполняется условие регулярности Слейтера: существует такая точка $\widetilde{x} \in D$, что $g(\widetilde{x}) > 0_{(k)}$. Для слабой эффективности (собственной эффективности) точки $x^0 \in X$ необходимо и достаточно, чтобы существовали вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$ $(\mu \in \mathrm{M})$ и вектор $\lambda^0 \in E^k_{\geqq}$ такие, что пара (x^0, λ^0) является седловой точкой функции Лагранжа.*

Доказательство. Вначале докажем условия слабой эффективности.

Достаточность. Если пара (x^0, λ^0) есть седловая точка, то из правого неравенства (14) при $\lambda = 0_{(k)}$ имеем $\langle \lambda^0, g(x^0) \rangle \leqq 0$. Но $\lambda^0 \geqq 0_{(k)}$ и $g(x^0) \geqq 0$, поэтому

$$\langle \lambda^0, g(x^0) \rangle = 0. \tag{15}$$

Следовательно, левое неравенство (14) влечет

$$\langle \mu, f(x) \rangle + \langle \lambda^0, g(x) \rangle \leqq \langle \mu, f(x^0) \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

Отсюда следует

$$\langle \mu, f(x) \rangle \leqq \langle \mu, f(x^0) \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Так как $\mu \geq 0_{(m)}$, то $x^0 \in S_f(X)$.

Необходимость. Из слабой эффективности x^0 вытекает несовместность на D следующей системы вогнутых неравенств:

$$f(x) - f(x^0) > 0_{(m)},$$
$$g(x) \geqq 0_{(k)}.$$

По теореме Фана–Гликсберга–Гоффмана об альтернативе существуют неотрицательные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, $\lambda^0_1, \lambda^0_2, \ldots, \lambda^0_k$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i + \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda^0_j = 1$, такие, что

$$\langle \mu, f(x) - f(x^0) \rangle + \langle \lambda^0, g(x) \rangle \leqq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D. \tag{16}$$

Отсюда следует левое неравенство (14). Далее, если в (16) положить $x = x^0$, то получим $\langle \lambda^0, g(x^0) \rangle \leqq 0$. Но $\langle \lambda, g(x^0) \rangle \geqq 0$ для любого $\lambda \in E^k_{\geqq}$, поэтому $\langle \lambda^0, g(x^0)\rangle \leqq \langle \lambda, g(x^0)\rangle$, т. е. правое неравенство (14) также выполняется.

Для того чтобы доказать включение $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, достаточно убедиться, что $\mu \geq 0_{(m)}$, поскольку в этом случае неравенства (14) всегда можно поделить на $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i$. Действительно, если бы было $\mu = 0_{(m)}$, то из (16) при $x = \widetilde{x}$ следовало бы неравенство $\langle \lambda^0, g(\widetilde{x})\rangle \leqq 0$, противоречащее условию регулярности и равенству $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j^0 = 1$. Условия слабой эффективности доказаны.

Условия собственной эффективности получаются из доказанных условий слабой эффективности при помощи теоремы 1.14 (аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 3). Эти условия будут отличаться от условий слабой эффективности лишь тем, что в них вектор μ, участвующий в функции Лагранжа, будет удовлетворять включению $\mu \in \mathrm{M}$, а не $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$. ■

7. Рассмотрим линейную многокритериальную задачу. Пусть линейная вектор-функция f имеет вид

$$f(x) = \big(\langle c^1, x\rangle, \langle c^2, x\rangle, \ldots, \langle c^m, x\rangle\big),$$

а множество X *полиэдрально*, т. е. задано конечной системой линейных неравенств

$$X = \big\{x \in E^n \mid \langle a^j, x\rangle \leqq b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k\big\}, \qquad (17).$$

где $a^i \in E^n$, $b_j \in E$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

В линейной многокритериальной задаче множество оценок Y не только выпукло, но также и полиэдрально. Рис. 5 наводит на мысль о том, что здесь для каждой эффективной оценки y^0 можно подобрать вектор $\mu \in \mathrm{M}$ такой, чтобы точка y^0 была точкой максимума на Y функции $\langle \mu, y\rangle$. Следовательно, вспомнив теорему 3, можно предположить, что множества $P(Y)$ и $G(Y)$ (а также $P_f(X)$ и $G_f(X)$) в линейных задачах совпадают. Это предположение действительно оказывается верным.

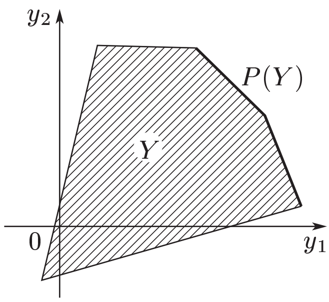

Рис. 5

Вначале докажем следующую теорему, приведенную в [208] для эффективных решений.

Теорема 7. *Для того чтобы в линейной задаче точка* $x^0 \in X$ *была эффективной* (*слабо эффективной*), *необходимо* *), *чтобы для некоторых векторов* $\mu \in \mathrm{M}$ ($\mu \in \overline{\mathrm{M}}$) *и* $\lambda \in E^k_{\geqq}$ *выполнялись равенства*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j \tag{18}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \bigl(b_j - \langle a^j, x^0 \rangle\bigr) = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Через $J(x^0)$ обозначим множество индексов активных ограничений, т. е. $j \in J(x^0)$ тогда и только тогда, когда $\langle a^j, x^0 \rangle = b_j$.

Эффективность x^0 влечет несовместность следующей системы линейных неравенств:

$$\langle c^i, x \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{20}$$

$$-\langle a^j, x \rangle \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad j \in J(x^0).$$

Действительно, если x — решение системы (20), то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и точки $x = x^0 + \varepsilon x$ будем иметь

$$\begin{aligned} \langle c^i, x' \rangle &\geq \langle c^i, x^0 \rangle, && i = 1, 2, \ldots, m, \\ \langle a^j, x' \rangle &\leqq \langle a^j, x^0 \rangle = b_j && \text{для всех } j \in J(x^0), \\ \langle a^j, x' \rangle &< b_j && \text{для всех остальных } j, \end{aligned}$$

что противоречит эффективности x^0.

Из несовместности неравенств (20) по теореме Таккера об альтернативе следует существование векторов $\mu \in \mathrm{M}$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$ таких, что выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i = \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j a^j, \tag{21}$$

которое, очевидно, эквивалентно равенствам (18), (19).

---

*) Как показывает доказательство леммы 4, условия теоремы 7 являются и достаточными.

Если же x^0 слабо эффективна, то несовместной будет система

$$\langle c^i, x\rangle > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$-\langle a^j, x\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad j \in J(x^0),$$

и применение теоремы Моцкина приведет к равенству (21) с $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$ и $\lambda \in E^k_{\geqq}$. ■

Л е м м а 4. *В линейной задаче точка x^0 эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in \mathrm{M}$, для которого выполняется*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle c^i, x^0\rangle = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle c^i, x\rangle. \tag{22}$$

Для доказательства необходимости возьмем произвольное $x \in X$. Умножая равенство (21) скалярно на $x - x^0$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle c^i, x - x^0\rangle = \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \langle a^j, x - x^0\rangle. \tag{23}$$

Но $\langle a^j, x^0\rangle = b_j$ для $j \in J(x^0)$ и $\langle a^j, x\rangle \leqq b_j$, поэтому правая часть равенства (23) неположительна для любого $x \in X$. Неположительность левой части (23) влечет (22). Достаточность имеет место в силу $\mu > 0_{(m)}$ (см. пример 1.2). ■

П р и м е ч а н и е 6. Лемма 4 для линейных задач специального вида впервые была получена Т. Купмансом [184]; затем А. Чарнс и У. Купер [130] доказали ее при помощи теоремы двойственности линейного программирования на основе теоремы 1.6. Аналогичным путем П. Бод [121] показал ее справедливость для общего случая. Позднее она была установлена в статьях [149, 172]. В работе [77] она получена при помощи теоремы двойственности линейного программирования на основе теоремы 1.5.

Согласно доказанной лемме, в линейной задаче всегда выполняются равенства $P(Y) = Y_>$ и $P_f(X) = X_>$.

Сравнивая лемму 4 с теоремой 4, получаем

С л е д с т в и е 3. *В линейной задаче справедливы равенства*

$$P(Y) = G(Y), \quad P_f(X) = G_f(X).$$

8. Равенства из последнего следствия получены для линейной многокритериальной задачи, т. е. в предположении линейности всех функций f_i и аффинности *) всех функций g_j, участвующих в определении множества X (1.1.1). Здесь мы покажем, что указанные равенства справедливы и для определенного класса нелинейных функций, а именно для полиэдральных вогнутых функций.

Напомним (см. [93]), что *полиэдральной вогнутой* называют числовую функцию $h\colon E^n \to E$ вида

$$h(x) = \min_{j \in \{1,2,\ldots,s\}} (\langle c^j, x\rangle + \alpha_j),$$

где $c^j \in E^n$, $\alpha_j \in E$ для всех j. Понятно, что всякая аффинная (в частности, линейная) функция является полиэдральной вогнутой, но не наоборот. Полиэдральная вогнутая функция вогнута на E^n. В соответствии с этим будем считать, что критерии имеют вид

$$f_i(x) = \min_{j \in M_i} (\langle c^j(i), x\rangle + \alpha^i_j), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $M_i = \{1, 2, \ldots, s_i\}$ и $c^j(i) \in E^n$, $\alpha^i_j \in E$ всех i и j.

Лемма 5. *Если множество X полиэдрально, все функции f_i являются полиэдральными вогнутыми и $P(Y) \neq \varnothing$, то множество Y_* полиэдрально.*

Доказательство. Пусть B — это матрица, первую строку которой составляют компоненты некоторого вектора из $c^1(1),\ c^2(1), \ldots, c^{s_1}(1)$, вторую строку — компоненты некоторого вектора из $c^1(2), c^2(2), \ldots, c^{s_2}(2)$, и т. д.; последнюю строку — компоненты некоторого вектора из $c^1(m),\ c^2(m), \ldots, c^{s_m}(m)$. Пусть b — это соответствующий матрице B вектор, первой компонентой которого служит одно из чисел $\alpha^1_1, \alpha^1_2, \ldots, \alpha^1_{s_1}$, второй — одно из чисел $\alpha^2_1, \alpha^2_2, \ldots, \alpha^2_{s_2}$ и т. д.; последней компонентой — одно из чисел $\alpha^m_1, \alpha^m_2, \ldots, \alpha^m_{s_m}$. Так что, например, матрице, у которой первая строка есть вектор $c^1(1)$, вторая строка — вектор $c^1(2)$ и т. д., последняя строка — вектор $c^1(m)$, соответствует вектор b с компонентами $\alpha^1_1, \alpha^2_1, \ldots, \alpha^m_1$. Очевидно, число таких матриц равно числу соответствующих векторов и является конечным. Исключим из введенного набора матриц и векторов «лишние», т. е. такие, для которых не существует $x \in X$, при котором имеет место равенство $f(x) = Bx + b$. Оставшийся набор матриц обозначим

*) Числовая функция h *аффинна*, если она одновременно вогнута и выпукла на E^n. Аффинная функция представляет собой сумму линейной функции и некоторого числа, т. е. $h(x) = \langle c, x\rangle + b$, где $c \in E^n$, $b \in E$.

через $B^1, B^2, \ldots, B^r$, а соответствующие им векторы — через $b^1, b^2, \ldots, b^r$.

Введем в рассмотрение множества

$$X_j = \left\{x \in X \mid f(x) = B^j x + b^j\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

и условимся i-ю компоненту вектора $B^j x + b^j$ обозначать через $\langle B_i^j, x\rangle + b_i^j$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Из определения множества X_j следует, что если $x \in X_j$, то $x \in X$ и, кроме того, x удовлетворяет следующей конечной системе линейных неравенств:

$$\langle B_i^j, x\rangle + b_i^j \leqq \langle c^k(i), x\rangle + \alpha_k^i,$$
$$k = 1, 2, \ldots, s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Обратно, если $x \in X$ удовлетворяет этой системе линейных неравенств, то

$$\langle B_i^j, x\rangle + b_i^j = \min_{k \in M_i} (\langle c^k(i), x\rangle + a_k^i), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

т. е. $B^j x + b^j = f(x)$. Поэтому с учетом полиэдральности X получаем, что каждое X_j представляет собой множество решений некоторой конечной системы линейных неравенств, т. е. полиэдрально. Проверим равенство

$$X = \bigcup_{j=1}^{r} X_j.$$

Пусть $x \in X$. В силу определения матриц $B^1, B^2, \ldots, B^r$ и соответствующих им векторов $b^1, b^2, \ldots, b^r$ найдутся B^j и b^j такие, что $B^j x + b^j = f(x)$. Следовательно, $X \subseteq \bigcup\limits_j X_j$. Обратное включение выполняется по определению множеств X_j. Таким образом, можно записать

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j=1}^{r} X_j\right) = \bigcup_{j=1}^{r} f(X_j).$$

Для любого $x \in X_j$ справедливо равенство $f(x) = B^j x + b^j$. Это означает, что на множестве X_j полиэдральная вогнутая (покомпонентно) вектор-функция f совпадает с некоторым аффинным отображением (т. е. с суммой некоторого линейного отображения и постоянного вектора). Отсюда благодаря полиэдральности X_j следует (см. теорему 19.3 из [93]), что $f(X_j)$ — полиэдральное множество, $j = 1, 2, \ldots, r$. Следовательно, Y — это объединение конечного числа полиэдральных множеств (в частности, является замкнутым). С самого начала мы предполагали, что

$P(Y) \neq \varnothing$, поэтому из замкнутости Y согласно лемме 1, которая доказана в § 3.1, следует замкнутость множества Y_*. Опираясь на выпуклость X и вогнутость функций f_i, легко установить (см. лемму 2.2), что Y_*, кроме того, является выпуклым множеством.

Для множества Y_* можно записать представления

$$Y_* = Y - E^m_{\geqq} = \bigcup_{j=1}^{r} f(X_j) - E^m_{\geqq} = \bigcup_{j=1}^{r} \left[f(X_j) - E^m_{\geqq} \right].$$

Заметим, что благодаря полиэдральности $f(X_j)$ все множества $f(X_j) - E^m_{\geqq}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, полиэдральны (см. следствие 19.3.2 из [93]).

Далее, поскольку Y_* — выпуклое замкнутое множество, то

$$Y_* = \overline{\mathrm{conv}} Y_* = \overline{\mathrm{conv}} \left\{ \bigcup_{j=1}^{r} \left[f(X_j) - E^m_{\geqq} \right] \right\}.$$

Справа здесь стоит замыкание выпуклой оболочки конечного числа полиэдральных множеств. Оно само является полиэдральным множеством (см. теорему 19.6 из [93]). Следовательно, Y_* — полиэдральное множество. ■

Теорема 8. *Пусть допустимое множество X имеет вид* (1.1.1), $D = E^n$ *и все функции f_i, g_j являются полиэдральными вогнутыми. Тогда $P(Y) = G(Y)$ (а значит, $P_f(X) = G_f(X)$).*

Доказательство. Благодаря тому, что g_j — полиэдральные вогнутые функции, множество X полиэдрально.

Если $P(Y) = \varnothing$, то равенство $P(Y) = G(Y)$ выполняется. Поэтому пусть $P(Y) = \varnothing$. В этом случае, согласно лемме 5, полиэдральным является множество Y_*. Поэтому в силу следствия 3 справедливо равенство $P(Y_*) = G(Y_*)$. Отсюда, учитывая лемму 1, получаем $P(Y) = G(Y)$. ■

Заметим, что отличные от приведенных выше условия на функции f_i и g_j, обеспечивающие совпадение эффективных и собственно эффективных точек, можно найти в [68].

§ 2.3. Условия оптимальности для двухкритериальных задач

1. В данном параграфе рассматриваются условия оптимальности по Парето для задач с векторным критерием $f = (f_1, f_2)$. При формулировке этих условий используются сведения о наибольших и наименьших значениях критериев на множестве эффективных решений.

Предположим, что $P_f(X) \neq \varnothing$. Тогда

$$\sup_{x \in P_f(X)} f_i(x) \leqq \sup_{x \in X} f_i(x), \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Если же множество $P_f(X)$ еще и внешне устойчиво, то согласно следствию 1.4 это нестрогое неравенство обращается в равенство.

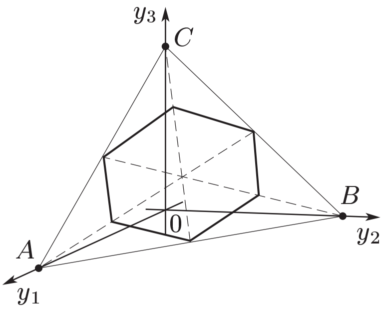

Рис. 6

Лемма 1. *Если* $y^0 \in P(Y)$ *и* $y_1^0 = \max\limits_{y \in P(Y)} y_1$, *то* $y_2^0 = \min\limits_{y \in P(Y)} y_2$.

Доказательство. Допустим, что $y_2^0 > \inf\limits_{y \in P(Y)} y_2$. Тогда найдется $y^* \in P(Y)$ такой, что $y_2^0 > y_2^*$. В силу эффективности y^* должно быть $y_1^0 < y_1^*$, а это противоречит условию леммы. ■

Заметим, что на случай $m > 2$ лемма 1 не обобщается (см. рис. 6, где $Y = P(Y)$ — шестиугольник, вписанный в треугольник ABC).

2. Обратимся к рассмотрению двухкритериальной задачи, в которой вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ задана на непустом множестве $X \subseteq E^n$. Введем следующие обозначения:

$$b_i = \sup_{x \in X} f_i(x), \quad i = 1, 2;$$

$$X_1^* = \{x \in X \mid f_1(x) = b_1\};$$

$$a_2 = \begin{cases} \sup\{f_2(x) \mid x \in X_1^*\}, & \text{если } X_1^* \neq \varnothing, \\ \inf\{f_2(x) \mid x \in X\} & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Условимся считать, что $[a_2, b_2]$ означает соответствующий отрезок в случае конечных a_2 и b_2, а в случае, если одно из них (или оба) есть бесконечность, то — соответствующий луч (или всю числовую прямую). Например, если $a_2 = -\infty$, то $[a_2, b_2]$ есть $(-\infty, b_2]$.

Если $P_f(X) \neq \varnothing$, то согласно (1) $f_2(x) \leqq b_2$ для любого $x \in P_f(X)$. Если $X_1^* \neq \varnothing$, то благодаря лемме 1 $f_2(x) \geqq a_2$ для всех $x \in P_f(X)$. Если $X_1^* = \varnothing$, то для каждого $x \in P_f(X)$ также имеем $f_2(x) \geqq a_2$. Таким образом, $f_2(x) \in [a_2, b_2]$ при $x \in P_f(X)$.

Для $\alpha \in [a_2, b_2]$ введем в рассмотрение задачу: найти

$$\max\{f_1(x) \mid x \in X,\, f_2(x) \geqq \alpha\}. \tag{2}$$

Если $x^0 \in P_f(X)$, то согласно теореме 1.5 x^0 — единственное (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решение задачи (2) при $\alpha = f_2(x^0)$, причем, как выяснено выше, $\alpha \in [a_2, b_2]$. Наоборот, если x^0 — единственное (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решение задачи (2), то из теоремы 1.8 (при $\varphi_0(f(x)) = f_1(x)$, $\varphi_1(f(x)) = f_2(x)$, $t_1 = \alpha$) следует эффективность x^0.

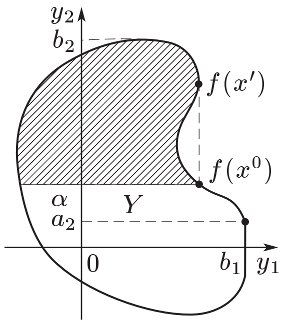

Рис. 7

Все это означает, что $x^0 \in P_f(X)$ тогда и только тогда, когда точка x^0 является единственным (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решением скалярной задачи (2) при $\alpha \in [a_2, b_2]$ (см. рис. 7).

Примечание 1. Легко понять, что наименьший интервал изменения параметра α, при котором остается справедливым сформулированное выше взаимнооднозначное соответствие между эффективными точками и решениями задачи (2), есть $[\underline{a}_2, \overline{b}_2]$, где

$$\underline{a}_2 = \inf_{x \in P_f(X)} f_2(x), \quad \overline{b}_2 = \sup_{x \in P_f(X)} f_2(x).$$

Но дело в том, что в общем случае вычислить эти величины практически сложно. Поэтому вместо них берутся другие границы («с запасом»), как, например, a_2 и b_2, определенные ранее. Заметим также, что в случае $X_1^* = \varnothing$ и $b_1 < +\infty$ в качестве нижней границы интервала изменения α можно брать, например, $\sup\{y_2 \mid y \in \overline{Y},\, y_1 = b_1\}$, что является более точным, чем a_2 (последнее видно на рис. 7, если из множества Y, изображенного на нем, исключить все точки, первая координата которых есть b_1).

В § 2.1 было отмечено, что требуемое условие единственности выполняется, если X выпукло, $f = (f_1, f_2)$ квазивогнута, причем f_1 строго квазивогнута. Другие, специфические для двухкритериального случая достаточные условия единственности указывает

Теорема 1. *Для того чтобы каждое решение задачи* (2) *при* $\alpha \in [a_2, b_2]$ *было единственным с точностью до эквивалентности* $\sim_f$ (*а значит, и эффективным*), *достаточно выполнения одного из следующих условий:*

1) *X выпукло, f_1 сильно квазивогнута, а f_2 вогнута;*

2) *множество $Y_* = Y - E^2_{\geqq}$ выпукло;*

3) *$X = E^n$ и функция f_1 такова, что каждый ее локальный максимум является глобальным, а f_2 полунепрерывна снизу на E^n.*

Заметим, что вогнутая функция сильно квазивогнута (см. § 2.2), поэтому условие 1) выполнено, если X выпукло, а f вогнута (в этом случае удовлетворяется и условие 2)).

Доказательство. Допустим, что решение x^0 задачи (2) не является единственным с точностью до эквивалентности $\sim_f$, т. е. найдется $x' \in X$, для которого

$$f_1(x') = f_1(x^0), \quad f_2(x') > f_2(x^0). \tag{3}$$

Если $f_1(x') = b_1$, то в силу определения числа a_2 приходим к противоречию:

$$a_2 \geqq f_2(x') > f_2(x^0) \geqq \alpha \geqq a_2.$$

Пусть $f_1(x') < b_1$. Рассматривая последовательно предположения теоремы, придем к противоречиям:

1) Из неравенства $f_1(x') < b_1$ следует существование такой точки $x^* \in X$, что

$$f_1(x^*) > f_1(x'). \tag{4}$$

Для любого $\lambda \in (0, 1)$, благодаря вогнутости f_2 и выпуклости X, имеем

$$f_2(\lambda x' + (1-\lambda)x^*) \geqq \lambda f_2(x') + (1-\lambda) f_2(x^*).$$

В силу неравенства из (3) при λ_0, достаточно близком к единице, получаем

$$\lambda_0 f_2(x') > f_2(x^0) - (1-\lambda_0) f_2(x^*).$$

Поэтому

$$f_2(\lambda_0 x' + (1-\lambda_0)x^*) > f_2(x^0) \geqq \alpha.$$

А благодаря сильной квазивогнутости f_1 имеем

$$f_1(\lambda_0 x' + (1-\lambda_0)x^*) > f_1(x^0).$$

Два последних неравенства противоречат тому, что x^0 — решение задачи (2).

2) Здесь также имеет место неравенство (4) при некотором $x^* \in X$. Возьмем $\lambda \in (0, 1)$ и

$$y(\lambda) = \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x^*) \in Y_*.$$

Вследствие (3) и (4) при λ_1, достаточно близком к единице, будет выполняться неравенство $f(x^0) < y(\lambda_1)$. Но $y(\lambda_1) \in Y_*$, поэтому существует $x \in X$, при котором $y(\lambda_1) \leqq f(x)$. Следовательно, $f(x^0) < f(x)$, что противоречит тому, что x^0 — решение задачи (2).

3) В этом случае, поскольку x^0 — решение задачи (2) и $f_2(x^0) \geqq \alpha$, из (3) следует, что x' — точка максимума функции f_1 на открытом множестве $\{x \in E^n \mid f_2(x) > \alpha\}$. Значит, x' — точка локального максимума f_1. В соответствии с предположением 3), x' является точкой глобального максимума, т. е. $f_1(x') = b_1$. Это противоречит начальному допущению $f_1(x') < b_1$. ■

3. Разобранные выше условия оптимальности представляют интерес не только в рамках многокритериальной оптимизации. Их можно использовать и при решении однокритериальных задач специального вида.

Для иллюстрации этого положения рассмотрим следующую задачу максимизации числовой функции: найти

$$\max_{x \in X} h[f_1(x), f_2(x)], \tag{5}$$

где $(f_1(x), f_2(x)) = f(x)$ — двумерная вектор-функция, определенная на множестве $X \subseteq E^n$, а $h[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ — числовая функция двух переменных, являющаяся неубывающей на своей области задания $f(X)$ по каждой переменной.

Согласно теореме 1.10, если X непусто и компактно, а функции f_1, f_2, h непрерывны на своих множествах задания, то среди решений задачи (5) имеется по крайней мере одна эффективная точка по вектор-функции f относительно множества X. Следовательно, можно записать равенство

$$\max_{x \in X} h[f(x)] = \max_{y \in P(Y)} h(y). \tag{6}$$

Предположим, что f_1, f_2 и X удовлетворяют одному из трех предположений теоремы 1. В этом случае каждое решение задачи (2) является единственным с точностью до эквивалентности $\sim_f$.

Для $\alpha \in [a_2, b_2]$ введем множество

$$X^*(\alpha) = \bigl\{x^* \in X \mid x^* \text{— решение задачи (2)}\bigr\}.$$

Пусть $x^*(\alpha)$ — произвольная функция, определенная на множестве $[a_2, b_2]$ и обладающая свойством

$$x^*(\alpha) \in X^*(\alpha) \text{ для любого } \alpha \in [a_2, b_2]. \tag{7}$$

При сделанных предположениях, если x^1 и x^2 — два различных решения задачи (2) при одном и том же α, то $f(x^1) = f(x^2)$. Поэтому для произвольной функции $x^*(\alpha)$, удовлетворяющей (7), верно равенство

$$\{f[X^*(\alpha)] \mid \alpha \in [a_2, b_2]\} = \{f[x^*(\alpha)] \mid \alpha \in [a_2, b_2]\}.$$

Согласно рассуждениям предыдущего пункта множество, стоящее в этом равенстве слева, совпадает с $P(Y)$. Следовательно,

$$P(Y) = \{y \in Y \mid y = f[x^*(\alpha)] \text{ при некотором } \alpha \in [a_2, b_2]\}.$$

В этом случае равенство (6) можно переписать так:

$$\max_{x \in X} h[f(x)] = \max_{\alpha \in [a_2, b_2]} h[f(x^*(\alpha))]. \tag{8}$$

Итак, имеет место следующее утверждение. Если X — непустой компакт, функции f_1, f_2, h непрерывны и выполняется одно из трех предположений теоремы 1, то для любой функции $x^*(\alpha)$, удовлетворяющей (7), справедливо равенство (8).

На основании равенства (8) можно предложить следующий путь решения исходной задачи (5):

а) решив параметрическую задачу (2), найти функцию $x^*(\alpha)$ для всех $\alpha \in [a_2, b_2]$;

б) максимизировать функцию $h[f(x^*(\alpha))]$ одной переменной на промежутке $[a_2, b_2]$; если α_0 — точка максимума, то $x^*(\alpha_0)$ — решение задачи (5).

В тех случаях когда аналитический вид функций f_1, f_2 сравнительно прост, реализация изложенного способа решения задачи (5) может оказаться несложной.

Пример 1. Пусть требуется решить задачу (5), в которой

$$\begin{aligned} h &= f_1 \cdot \sqrt[5]{f_2}, \\ f_1(x) &= -x_1 - x_2 + x_3 + 11, \\ f_2(x) &= \quad x_1 + 2x_3 + 5x_4, \end{aligned}$$

а множество X задано ограничениями

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_3 + 2x_4 &= 3, \\ x_2 + 2x_3 + \quad x_4 &= 7, \\ x_1, \ldots, x_4 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Здесь $f_1(x), f_2(x) > 0$ для всех $x \in X$, поэтому функция $\overline{h}[y_1, y_2] = y_1 \sqrt[5]{y_2}$ строго возрастает по каждой переменной на $E^2_>$.

Во-первых, находим, что решение $x^1 = (0,1,3,0)$ максимизирует функцию f_1 на множестве X. Так как $\max\big\{f_2(x) \mid x \in X, f_1(x) = f_1(x^1)\big\} = 6$, то полагаем $a_2 = 6$. Далее, максимизируя f_2 на X, находим решение $x^2 = (0, 11/2, 0, 3/2)$. Следовательно, $b_2 = 15/2$ и задача (2) при $\alpha \in [6, 15/2]$ принимает следующий вид: максимизировать f_1 при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_4 &= 3, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\ x_1 + 2x_3 + 5x_4 &\geqq \alpha, \\ x_1, \ldots, x_4 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Решая эту задачу линейного параметрического программирования, находим

$$x^*(\alpha) = (0,\ 3\alpha - 17,\ 15 - 2\alpha,\ \alpha - 6).$$

В соответствии с этим

$$h[f(x^*(\alpha))] = (43 - 5\alpha)\sqrt[5]{\alpha}.$$

Эта функция на промежутке $[6, 15/2]$ достигает максимума при $\alpha = 6$. Следовательно, $(0,1,3,0)$ — решение исходной задачи, и $h = 13\sqrt[5]{6}$.

Примечание 2. Подобным образом задачу (5) можно решать, беря за основу не (2), а задачу отыскания

$$\max_{x \in X} [\mu f_1(x) + (1 - \mu) f_2(x)].$$

Принципиальная возможность такого подхода заложена в теореме 2.4. Реализацию этой возможности заинтересованный читатель может найти в работе [160].

§ 2.4. Условия оптимальности для дифференцируемых функций

Условия оптимальности, которые здесь формулируются, фактически являются дальнейшим обобщением классической теоремы Ферма: производная в точке экстремума обращается в нуль.

Для вывода необходимых условий используется в основном только свойство дифференцируемости функций, причем поскольку эти условия носят локальный характер, то дифференцируемость требуется лишь в рассматриваемой точке. Для того чтобы достаточные условия оптимальности сформулировать в наиболее общей форме, привлекаются понятия псевдо- и квазивогнутой функций (см. § 2.2).

В этом параграфе векторные функции $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ и $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ будем считать заданными на множестве $D \subseteq E^n$. При этом допустимое множество X будет представлять собой множество решений системы неравенств (1.1.1).

1. Введем множество $J(x^0)$ номеров активных ограничений:

$$j \in J(x^0) \text{ тогда и только тогда, когда } g_j(x^0) = 0.$$

Будем считать, что $X^0 \in \operatorname{int} D$. Необходимое условие оптимальности формулируется в следующей теореме, где $\nabla f_i(x^0)$ означает градиент функции f_i, вычисленный в точке x^0.

Теорема 1 (Да Кунья–Полак–Джоффрион). *Пусть векторные функции f, g дифференцируемы (покомпонентно) в точке $x^0 \in X$ и выполнено условие регулярности: существует такая точка $\widetilde{x} \in E^n$, что для любого $j \in J(x^0)$ справедливо неравенство $\langle \nabla g_j(x^0), \widetilde{x} \rangle > 0$. Для того чтобы точка x^0 была слабо эффективной (собственно эффективной), необходимо, чтобы существовали вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$ ($\mu \in \mathrm{M}$) и вектор $\lambda \in E^k_{\geqq}$ такие, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla f_i(x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \nabla g_j(x^0) = 0_{(n)}. \tag{1}$$

Доказательство. Вначале докажем условие слабой эффективности. Пусть $x^0 \in S_f(X)$. Тогда система линейных неравенств

$$\langle \nabla f_i(x^0), x \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\langle \nabla g_j(x^0), x \rangle > 0 \quad \text{для всех } j \in J(x^0) \tag{3}$$

несовместна. Действительно, если это не так, то для точки x, удовлетворяющей этой системе, можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что $x^0 + \varepsilon x \in D$ и

$$f_i(x^0 + \varepsilon x) - f_i(x^0) = \varepsilon \langle \nabla f_i(x^0), x \rangle + o(\varepsilon) > 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$g_j(x^0 + \varepsilon x) = g \langle \nabla g_j(x^0), x \rangle + o(\varepsilon) > 0 \quad \text{для всех} \quad j \in J(x^0),$$
$$g_j(x^0 + \epsilon x) = g_j(x^0) + O(\epsilon) > 0 \quad \text{для всех} \quad j \notin J(x^0).$$

Здесь первое неравенство будет иметь место в силу дифференцируемости f_i и неравенства (2); второе — благодаря дифференцируемости g_j и неравенству (3); третье — вследствие непрерывности g_j и неравенства $g_j(x^0) > 0$ при $j \notin J(x^0)$. Выписанные три неравенства противоречат слабой эффективности x^0. Следовательно, система неравенств (2)–(3) несовместна. В этом случае по теореме Моцкина об альтернативе (§ 2.2) существуют векторы μ, λ вида $(\mu, \lambda) \geq 0_{(m+k)}$ и такие, что имеет место равенство (1).

Проверим включение $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$. Если $\mu = 0_{(m)}$, то $\lambda \geq 0_{(k)}$ и из (1) следует равенство

$$\sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \langle \nabla g_j(x^0), \widetilde{x} \rangle = 0,$$

противоречащее неравенству $\lambda \geq 0_{(k)}$ и условию регулярности. Поэтому $\mu \geq 0_{(m)}$, а значит, можно считать, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1$. Условие слабой эффективности доказано.

Теперь пусть $x^0 \in G_f(X)$. Согласно теореме 1.14 точка x^0 является слабо эффективной по вектор-функции $(\langle \mu^1, f(x) \rangle, \langle \mu^2, f(x) \rangle, \langle \mu^m, f(x) \rangle)$ относительно X, где векторы $\mu^i \in \mathrm{M}$ имеют вид (1.14). Применяя к точке x^0 доказанное необходимое условие слабой эффективности, получаем существование векторов $\overline{\mu} \in \overline{\mathrm{M}}$ и $\lambda \in E^k_{\geqq}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}_i \nabla \left[\sum_{r=1}^{m} \mu^i_r f_r(x^0) \right] + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \nabla g_j(x^0) = 0_{(n)}.$$

Отсюда, учитывая вид (1.14) векторов μ^i и условие $\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\mu}_i = 1$, после несложных преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\overline{\mu}_i (1 - m\varepsilon) + \varepsilon \big] \nabla f_i(x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \nabla g_j(x^0) = 0_{(n)}.$$

Вводя вектор μ с компонентами $\mu_i = \overline{\mu}_i (1 - m\varepsilon) + \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots \ldots, m$, приходим к равенству (1). Легко проверить, что $\mu \in \mathrm{M}$. ■

Из доказательства теоремы видно, что в случае, когда условие регулярности не предполагается выполненным, необходимое условие слабой эффективности будет иметь прежний вид (1), однако относительно векторов μ и λ будет известно только то, что $(\mu, \lambda) \geq 0_{(m+k)}$ (так что может быть $\mu = 0_{(m)}$).

2. Исследуем вопрос о том, когда выполнение равенства (1) влечет слабую эффективность, эффективность, и собственную эффективность решения x^0.

Теорема 2. *Предположим, что множество D выпукло, вектор-функция f псевдовогнута, а вектор-функция g покомпонентно дифференцируема, и для каждого $j \in J(x^0)$ функция g_j квазивогнута. Тогда из равенства* (1) *с вектором $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$ следует слабая эффективность x^0.*

Доказательство. Предположим, напротив, что найдется такая точка $x^1 \in X$, что

$$f(x^1) > f(x^0). \tag{4}$$

Для любого $j \in J(x^0)$ выполняется неравенство $\langle \nabla g_j(x^0), x^1 - x^0\rangle \geqq 0$. В самом деле, если это не так, то благодаря неравенству $\langle \nabla g_j(x^0), x^1 - x^0\rangle < 0$ при некотором $j \in J(x^0)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$g_j\big(x^0 + \varepsilon(x^1 - x^0)\big) = g\big\langle \nabla g_j(x^0), x^1 - x^0\big\rangle + o(\varepsilon) < 0.$$

С другой стороны, поскольку $x^1 \in X$, то $g_j(x^1) \geqq 0 = g_j(x^0)$, а так как функция g_j квазивогнута, то для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо противоположное неравенство:

$$g_j\big(x^0 + \varepsilon(x^1 - x^0)\big) = g_j\big((1-\varepsilon)x^0 + \varepsilon x^1\big) \geqq g_j(x^0) = 0.$$

В силу доказанного из (1) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle \nabla f_i(x^0), x^1 - x^0\rangle \leqq 0.$$

Поскольку $\mu \geq 0_{(m)}$, то из этого неравенства вытекает существование такого номера i, что $\langle \nabla f_i(x^0), x^1 - x^0\rangle \leqq 0$. Отсюда, используя псевдовогнутость функции f_i, получаем неравенство $f_i(x^1) \leqq f_i(x^0))$, противоречащее (4). ■

Согласно теореме 1.6.2 в случае выпуклого множества X и строго квазивогнутой вектор-функции f слабо эффективная точка всегда является эффективной. Поэтому если к предположениям теоремы 2 добавить строгую квазивогнутость f и выпуклость множества X, то равенство (1) при $\mu \in \overline{M}$ будет гарантировать эффективность x^0.

Перейдем к собственно эффективным решениям и рассмотрим следующий

Пример 1. $n = 1$, $m = 2$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $X = (-\infty, +\infty)$. Здесь обе функции псевдовогнуты. Для эффективной точки $x^0 = 0$ равенство (1) выполняется при $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$:

$$\mu_1 \nabla f_1(x^0) + \mu_2 \nabla f_2(x^0) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot (-1) = 0.$$

Однако она не является собственно эффективной, так как при $x^k = k,\, k = 1, 2 \ldots,$ имеем

$$\frac{f_1(x^k) - f_1(x^0)}{f_2(x^0) - f_2(x^k)} = \frac{k}{1 - e^{-k}} \xrightarrow[k \to \infty]{} +\infty.$$

Пример показывает, что в предположении псевдовогнутости необходимое условие собственной эффективности теоремы 1 при $\mu \in \mathrm{M}$ не будет достаточным. Поэтому от функции f нужно потребовать большее, чем псевдовогнутость.

Теорема 3. *Предположим, что вектор-функция f покомпонентно дифференцируема в точке $x^0 \in X$ и вогнута, а вектор-функция g покомпонентно дифференцируема и для любого $j \in J(x^0)$ квазивогнута. Тогда выполнение равенства* (1) *при $\mu \in \mathrm{M}$ обеспечивает собственную эффективность x^0.*

Доказательство. Рассмотрим скалярную функцию $F(x) = \langle \mu, f(x) \rangle$. Условие (1) можно переписать так:

$$\nabla F(x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \nabla g_j(x^0) = 0_{(n)}.$$

Благодаря вогнутости f функция F также вогнута, а значит, псевдовогнута. Поэтому по теореме 2 при $m = 1$ получаем, что функция F достигает своего максимального значения на множестве X в точке x^0. В этом случае согласно следствию 1.5 точка x^0 собственно эффективна. ■

Примечание. Впервые условие оптимальности типа (1) встречается еще у Х. Куна и А. Таккера [187]. Оно было получено применительно к понятию собственной эффективности, введенного ими и использующего свойство дифференцируемости f и g. Достаточное условие Куна и Таккера требовало вогнутости f и g.

Условия оптимальности, не предполагающие выполнения условий регулярности, получены в статье [110].

§ 2.5. Условия оптимальности второго порядка

Рассмотрение этого параграфа ограничивается задачей многокритериальной оптимизации без ограничений, т. е. считается, что $X = D = E^n$. Вектор-функция f предполагается покомпонентно дважды дифференцируемой в рассматриваемой точке $x^0 \in E^n$. Через $\nabla^2 f_i(x^0)$ обозначается гессиан функции f_i, вычисленный в точке x^0:

$$\nabla^2 f_i(x^0) = \left\| \frac{\partial^2 f_i(x^0)}{\partial x_k \, \partial x_j} \right\|, \quad k, j = 1, 2, \ldots, n.$$

В формулировках необходимых и достаточных условий оптимальности будет участвовать множество

$$K(x^0) = \left\{ z \in E^n \mid \langle \nabla f_i(x^0), z \rangle \geqq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

Очевидно, $K(x^0)$ — выпуклый замкнутый конус с вершиной в начале координат.

1. Необходимые условия второго порядка слабой эффективности в многокритериальной задаче без ограничений представлены в следующей теореме.

Теорема 1. *Для того чтобы решение x^0 было слабо эффективным по вектор-функции f относительно E^n, необходимо выполнение следующих соотношений*:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla f_i(x^0) = 0_{(n)} \quad \text{для которого } \mu \in \overline{\mathrm{M}}, \tag{1}$$

$$\min_{i \in M} z \nabla^2 f_i(x^0) z \leqq 0 \quad \text{для всех } z \in K(x^0). \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (1) следует из теоремы 4.1. Для доказательства неравенства (2) возьмем произвольный вектор $z \in K(x^0)$. Если для него неравенство (2) не выполняется, то

$$z \nabla^2 f_i(x^0) z > 0 \quad \text{для всех } i \in M.$$

Так как $z \in K(x^0)$, то для любого $\omega \in (0, 1)$ справедливо

$$\omega \langle \nabla f_i(x^0), z \rangle + \frac{\omega^2}{2} z \nabla^2 f_i(x^0) z > 0 \quad \text{для всех } i \in M.$$

Положим $x' = x^0 + \omega z$, $\omega \in (0, 1)$. Тогда для достаточно малого положительного ω будет выполнено

$$f_i(x') - f_i(x^0) = \langle \nabla f_i(x^0), x' - x^0 \rangle + \\ + \frac{1}{2}(x' - x^0) \nabla^2 f_i(x^0)(x' - x^0) + o_i(\omega^2) > 0 \quad \text{для всех } i \in M,$$

где величина $o_i(\omega^2)$ такова, что $o_i(\omega^2)/\omega^2 \to 0$ при $\omega \to 0$. Полученные неравенства противоречат слабой эффективности решения x^0. ■

2. Решение $x^0 \in X$ называется *локально эффективным*, если существует такая окрестность $B(x^0)$ точки x^0, что x^0 эффективно по f относительно множества $X \cap B(x^0)$.

Решение $x^0 \in X$ называется [223] *строго эффективным* по f относительно X, если из соотношений $f(x) \geqq f(x^0)$, $x \in X$, следует равенство $x = x^0$.

Теорема 2. *Пусть для некоторого $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$ выполняется* (1). *Если $K(x^0) = \{0_{(n)}\}$ или*

$$\min_{i \in M_0} z \nabla^2 f_i(x^0) z < 0 \text{ для всех } z \in K(x^0) \backslash \{0_{(n)}\}, \tag{3}$$

где $M_0 = \{i \in M \mid \mu_i > 0\}$, то x^0 является локальным строго эффективным решением по f относительно E^n.

Доказательство. Предположим, напротив, что x^0 не является локальным строго эффективным решением. Тогда существует такая последовательность точек $\{x^l\} \subset E^n$, $x^l \neq x^0$, $l = 1, 2, \ldots$, что

$$f(x^l) \geqq f(x^0), \quad \lim_{l \to \infty} x^l = x^0. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность

$$z^l = \frac{x^l - x^0}{||x^l - x^0||}, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Из этой последовательности всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому будем считать, что сходится сама эта последовательность:

$$\lim_{l \to \infty} z^l = z^0, \quad ||z^0|| = 1.$$

Обозначим $\omega_1 = ||x^l - x^0||$. Тогда $\omega_l \to 0$ и $x^l = x^0 + \omega_l z^l$. В силу дифференцируемости

$$f_i(x^l) = f_i(x^0) + \omega_l \langle \nabla f_i(x^0), z^l \rangle + o_i(\omega_l) \text{ для всех } i \in M.$$

Отсюда благодаря (4) для достаточно большого N_1 следует

$$\langle \nabla f_i(x_0), z^l \rangle \geqq 0, \ l = N_1, \ N_1 + 1, \ldots, \quad \text{для всех } i \in M,$$

т. е. $z^l \in K(x^0)$, $i = N_1$, $N_1 + 1, \ldots$. Следовательно, $z^0 \in K(x^0)$.

Равенство $K(x^0) = \{0_{(n)}\}$ противоречит тому, что $z^0 \in K(x^0)$ и $||z^0|| = 1$. Пусть $K(x^0) \neq \{0_{(n)}\}$ и имеет место (3). Для любого $i \in M_0$ и каждого $z \in K(x^0)$ справедливо равенство $\langle \nabla f_i(x^0), z \rangle = 0$. Действительно, если $\langle \nabla f_i(x^0), z' \rangle > 0$ при некоторых $i \in M_0$, $z' \in K(x^0)$, то $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle \nabla f_i(x^0), z' \rangle > 0$, что противоречит (1). Поэтому имеет место представление

$$f_i(x^l) = f_i(x^0) + \frac{\omega_l^2}{2} z^l \nabla^2 f_i(x^0) z^l + o_i(\omega_l^2)$$

для всех $i \in M_0$, $l = N_1,\ N_1 + 1, \ldots$. Отсюда благодаря (4) для достаточного большого N_2 имеем

$$z^l \nabla^2 f_i(x^0) z^l \geqq 0, \quad l = N_2, N_2 + 1, \ldots .$$

Следовательно,

$$z^0 \Delta^2 f_i(x^0) z^0 \geqq 0 \text{ для всех } i \in M_0,$$

что противоречит условию (3). ■

Выше были получены условия оптимальности второго порядка для многокритериальных задач без ограничений. Для задач с ограничениями условия оптимальности второго порядка имеются в работах [26, 223]. Условия оптимальности более высоких порядков приведены в статье [238].

§ 2.6. Условия оптимальности для негладких задач

В работе [163] приведены условия эффективности для многокритериальных задач, в которых функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$, $g_1, g_2, \ldots, g_k$ обладают вогнутыми производными по направлениям. В данном параграфе формулируются несколько более общие условия оптимальности: для функций, удовлетворяющих локальному условию Липшица. Рассматриваются эффективные и слабо эффективные решения.

1. Приведем здесь краткие сведения о функциях, удовлетворяющих локальному условию Липшица, и об обобщенных градиентах этих функций. Доказательства формулируемых ниже утверждений можно найти в работах [29, 102, 132].

Пусть h — числовая функция со значениями в $(-\infty, +\infty)$, заданная на E^n. Говорят, что она удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для каждого ограниченного множества $\Gamma \subset E^n$ существует константа $L \in [0, +\infty)$ такая, что

$$|h(x) - h(x')| \leqq L||x - x'||$$

для любых точек $x, x' \in \Gamma$.

Очевидно, функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, является непрерывной.

Введенный класс функций достаточно широк: он охватывает вогнутые и выпуклые, кусочно-гладкие и квазидифференцируемые [90] функции. Алгебраическая сумма и произведение функций, удовлетворяющих локальному условию Липшица, также принадлежит этому классу.

Функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, обладает тем важным свойством, что ее градиент $\nabla h(x)$ существует почти всюду на E^n, т. е. за исключением точек множества меры нуль.

Обобщенным градиентом функции h, удовлетворяющей локальному условию Липшица, в точке x называется [132] вектор $\overset{\circ}{\nabla} h(x)$, принадлежащий выпуклой оболочке пределов всевозможных последовательностей градиентов $\nabla h(x^l)$, где $\{x^l\}$ — последовательность точек, сходящихся к точке x, в которых существуют градиенты. Множество всех обобщенных градиентов функции h в точке x обозначают через $\partial h(x)$. Это множество представляет собой непустой выпуклый компакт.

Между обобщенным и обычным градиентами существует простая связь: множество $\partial h(x)$ содержит единственный вектор $\overset{\circ}{\nabla} h(x)$ тогда и только тогда, когда в точке x существует градиент $\nabla h(x)$, который непрерывен относительно множества точек, где он определен, причем имеет место равенство $\nabla h(x) = \overset{\circ}{\nabla} h(x)$.

Если $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ и функции h_1, h_2 удовлетворяют локальному условию Липшица, то справедливо включение

$$\partial h(x) \subseteq \partial h_1(x) + \partial h_2(x).$$

Для задачи максимизации *) *обобщенная производная функции h в точке x по направлению e*, обозначаемая через $h^0(x; e)$, определяется по формуле

$$h^0(x; e) = \lim_{\delta \to +0} \min_{\substack{||(\sigma, v)|| \leqq \delta, \\ \sigma > 0}} \frac{h(x + v + \sigma e) - h(x + v)}{\sigma}. \tag{1}$$

Заметим, что функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, может не иметь обычной производной по направлению

$$h'(x; e) = \lim_{\sigma \to +0} \frac{h(x + \sigma e) - h(x)}{\sigma}.$$

*) Для задачи минимизации обобщенная производная определяется формулой (1), в которой операция min заменена на операцию max.

Имеет место следующее важное равенство:

$$h^0(x;e) = \min\{\langle \overset{\circ}{\nabla} h(x), e\rangle \mid \overset{\circ}{\nabla} h(x) \in \partial h(x)\}. \tag{2}$$

Благодаря тому, что поточечная нижняя грань линейных функций является вогнутой функцией [93], из этого равенства, в частности, следует, что $h^0(x;\ \cdot\ )$ — вогнутая на E^n функция.

2. До конца параграфа будем считать, что компоненты векторных функций f, g определены на E^n и удовлетворяют локальному условию Липшица, а допустимое множество X имеет вид (1.1.1). Так же, как и ранее, через $J(x^0)$ обозначается множество индексов активных ограничений в точке x^0.

В следующей теореме формулируется необходимое условие слабой эффективности.

Теорема 1. *Если x^0 — слабо эффективное решение, то существуют векторы μ и λ такие, что $(\mu,\lambda) \geq 0_{(m+k)}$, и обобщенные градиенты $\overset{\circ}{\nabla} f_i(x^0) \in \partial f_i(x^0)$, $i = 1,2,\ldots,m$, и $\overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0) \in \partial g_j(x^0)$ при всех $j \in J(x^0)$, для которых справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \overset{\circ}{\nabla} f_i(x^0) + \sum_{j\in J(x^0)} \lambda_j \overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0) = 0_{(n)}. \tag{3}$$

Если при этом векторы $\overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0)$, $j \in J(x^0)$, линейно независимы, то в (3) вектор μ будет удовлетворять включению $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in S_f(X)$. Сначала докажем существование векторов μ и λ, $(\mu,\lambda) \geq 0_{(m+k)}$, для которых верно

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i^0(x^0;e) + \sum_{j\in J(x^0)} \lambda_j g_j^0(x^0;e) \leqq 0 \quad \text{при всех} \quad e. \tag{4}$$

Если, напротив, для некоторого направления e' и любых указанных векторов μ и λ выполняется обратное неравенство, то

$$f_i^0(x^0;e') > 0, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$
$$g_j^0(x^0;e') > 0 \quad \text{для всех} \quad j \in J(x^0).$$

Отсюда в соответствии с определением обобщенной производной по направлению для достаточно малого $\sigma > 0$ будет выполнено

$$f_i(x^0+\sigma e') > f_i(x^0), \qquad i = 1,2,\ldots,m,$$
$$g_j(x^0+\sigma e') > g_j(x^0) = 0 \quad \text{для всех} \quad j \in J(x^0).$$

А в силу непрерывности функций g_j для $j \notin J(x^0)$ справедливо $g_j(x^0 + \sigma e') > 0$ при малом $\sigma > 0$. Полученные неравенства противоречат начальному предположению $x^0 \in S_f(X)$. Таким образом, неравенство (4) доказано.

Из этого неравенства благодаря (2) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \min_{\partial f_i(x^0)} \langle \overset{\circ}{\nabla} f_i(x^0), e\rangle + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \min_{\partial g_j(x^0)} \langle \overset{\circ}{\nabla} g_i(x^0), e\rangle \leqq 0 \quad (5)$$

для всех e. Множество

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial f_i(x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \partial g_j(x^0) \right\}$$

непусто, выпукло (см. § 3 в [93]) и замкнуто. Для того чтобы установить справедливость (3), достаточно проверить включение $0_{(n)} \in T$. Пусть $0_{(n)} \notin T$. Тогда по теореме отделимости найдутся вектор $\overline{e} \neq 0_{(n)}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для любых $\overset{\circ}{\nabla} f_i(x^0) \in \partial f_i(x^0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $\overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0) \in \partial g_j(x^0)$, $j \in J(x^0)$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle \overset{\circ}{\nabla} f_i(x^0), \overline{e}\rangle + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \langle \overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0), \overline{e}\rangle > \varepsilon.$$

Это неравенство противоречит (5), и равенство (3) доказано.

Если векторы $\overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0)$, $j \in J(x^0)$, линейно независимы, то в (3), очевидно, $\mu \geq 0_{(m)}$. Кроме того, всегда можно считать, что сумма компонент вектора μ равна единице. ■

Когда все функции f_i, g_j непрерывно дифференцируемы, обобщенный градиент единствен и совпадает с обычным градиентом, поэтому необходимое условие (3) становится эквивалентным полученному ранее необходимому условию (4.1).

3. Перейдем к изложению достаточных условий оптимальности. Функцию h, определенную на E^n и удовлетворяющую локальному условию Липшица, будем называть *обобщенно псевдовогнутой*, если для любых x, x' неравенство $h^0(x; x' - x) \leqq 0$ влечет $h(x') \leqq h(x)$. Это определение естественным образом согласуется с определением псевдовогнутой функции из § 2.2.

Теорема 2. *Предположим, что функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ обобщенно псевдовогнуты, а функции $g_1, g_2, \ldots, g_k$ квазивогнуты. Тогда равенство* (3) *при $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$ и $g^0_j(x^0; e) = g'_j(x^0; e)$ при всех e и $j \in J(x^0)$ влечет $x^0 \in S_f(X)$.*

Доказательство. Предположим противное:

$$f(x^1) > f(x^0), \quad x^1 \in X_n. \tag{6}$$

Из (3) следует

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle \overset{\circ}{\nabla} f_i(x^0), x^1 - x^0 \rangle + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \langle \overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0), x^1 - x^0 \rangle = 0.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \min_{\partial f_i(x^0)} \langle \overset{\circ}{\nabla} f_i(x^0), x^1 - x^0 \rangle + \\ + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \min_{\partial g_j(x^0)} \langle \overset{\circ}{\nabla} g_j(x^0), x^1 - x^0 \rangle \leqq 0.$$

Следовательно, в силу (2), имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i^0(x^0; x^1 - x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j g_j'(x^0; x^1 - x^0) \leqq 0. \tag{7}$$

Для любого $j \in I(x^0)$ справедливо неравенство $g_j'(x^0; x^1 - x^0) \geqq 0$. В самом деле, если для некоторого $j \in J(x^0)$ имеет место противоположное неравенство, то при всех достаточно малых $\sigma \in (0, 1)$ будем иметь

$$g_j(x^0 + \sigma(x^1 - x^0)) < 0.$$

С другой стороны, поскольку $g_j(x^1) \geqq g_j(x^0)$ и g_j квазивогнута, то выполняется противоположное неравенство:

$$g_j(x^0 + \sigma(x^1 - x^0)) \geqq g_j(x^0) = 0.$$

В соответствии с доказанным из (7) следует существование номера $i \in M$, при котором $f_i^0(x^0; x^1 - x^0) \leqq 0$. Благодаря обобщенной псевдовогнутости отсюда вытекает неравенство $f_i(x^1) \leqq f_i(x^0)$, которое противоречит начальному предположению (6). ■

Из этой теоремы и теоремы 1.6.2 вытекает

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 2 дополнительно предположить строгую квазивогнутость функции f, то решение x^0 будет эффективным.*

§ 2.7. Свойства эффективных последовательностей

1. Вначале разберем некоторые свойства ε-эффективных точек.

Лемма 1. *Если $y \in Y$ — эффективная оценка, являющаяся эффективной и для замыкания $\overline{Y}$, и существуют вектор $\mu \in \mathrm{M}$ и число α такие, что $\langle \mu, y \rangle \leqq \alpha$ для всех $y \in Y$, то для любого ненулевого $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$ найдется такое положительное число δ, что всякая точка $y \in Y$ из δ-окрестности точки y^0 будет ε-эффективной.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, и пусть $\{\delta_k\}$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда найдется такой ненулевой вектор $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ в δ_k-окрестности точки y^0 отыщется точка $y^k \in Y$, которая не будет ε-эффективной, и для некоторого $z^k \in Y$ будут выполняться неравенства

$$z_i^k \geqq y_i^k + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Поскольку последовательность $\{y^k\}$ сходится к y^0, то она ограничена, и потому существует такое число t, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ верны неравенства $y_i^k \geqq t$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим множество $Y^t = \{y \mid y \in Y, y_i \geqq t, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Благодаря существованию вектора $\mu \in \mathrm{M}$ и числа α из условий леммы замыкание этого множества $\overline{Y}^t$ — компакт. Поэтому из последовательности $\{z^k\} \subseteq \overline{Y}^t$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $z' \in \overline{Y}^t$. Согласно (1) $z' \geq y^0$. Но это противоречит эффективности y^0 для $\overline{Y}$, так как $\overline{Y}^t \subseteq \overline{Y}$. ■

Следующие примеры показывают, что каждое из условий леммы 1 существенно.

Пример 1. Пусть Y — единичный квадрат, из которого исключена вся верхняя граница, кроме точки $y^0 = (0, 1)$ (рис. 8). Эта точка эффективна (относительно Y), но не является эффективной относительно $\overline{Y} = [0, 1] \times [0, 1]$. Поэтому, например, любая точка $(0, p)$, $0 \leqq p < 1$, не $(1, 0)$-эффективна.

Пример 2. Для множества Y, изображенного на рис. 9, точка $y^0 = (0, 1)$ эффективна, однако любая точка $(0, r)$, $2/3 < r < 1$, не является $(1, 0)$-эффективной. В этом примере не существует вектора $\mu \in \mathrm{M}$ и числа α таких, чтобы неравенство $\langle \mu, y \rangle \leqq \alpha$ выполнялось для всех $y \in Y$.

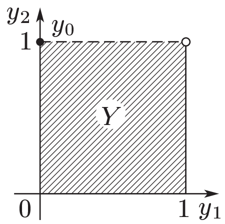

Рис. 8

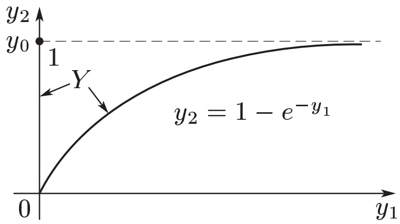

Рис. 9

Лемма 2. *Если $y^0 \in Y$ — собственно эффективная точка, то для произвольного ненулевого $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$ существует число $\delta > 0$ такое, что любая точка $y \in Y$ из δ-окрестности точки y^0 будет ε-эффективна.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда существуют ненулевой вектор $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$ и последовательность $\{y^k\} \subseteq Y$, сходящаяся к y^0 и состоящая из точек, не являющихся ε-эффективными. Пусть ε_r — положительная компонента ε и θ — произвольное положительное число. Положим $\delta = \varepsilon_r/(\theta + 1)$, и возьмем число t такое, что $||y^t - y^0|| < \delta$.

Так как y^t не является ε-эффективной, то найдется точка $y \in Y$ такая, что $y \geq y^t + \varepsilon$. Поэтому $y_r \geqq y^t_r + \varepsilon_r$, откуда

$$y_r - y^0_r \geqq (y^t_r - y^0_r) + \varepsilon_r \geqq -\delta + \varepsilon_r = \frac{\theta}{1+\theta}\varepsilon_r.$$

Следовательно, для всякого j такого, что $y_j < y^0_j$, можно записать

$$\frac{y_r - y^0_r}{y^0_j - y_j} \geqq \frac{\dfrac{\theta}{1+\theta}\varepsilon_r}{\dfrac{\varepsilon_r}{1+\theta}} = \theta,$$

т. е. точка y^0 несобственно эффективна. Противоречие. ■

Пример 3. Точка $y^0 = (0, 1)$ является несобственно эффективной для множеств Y, рассмотренных в примерах 1 и 2.

2. Обратимся теперь к рассмотрению свойств эффективных последовательностей.

Теорема 1. *Пусть $y^0 \in Y$ — эффективная точка и $\{y^k\} \subseteq \subseteq Y$ — сходящаяся к ней последовательность. Для эффективности этой последовательности достаточно выполнения одного из следующих условий:*

1) y^0 *собственно эффективна*;

2) y^0 *эффективна для* $\overline{Y}$, *и существуют вектор* $\mu \in \mathrm{M}$ *и число* α *такие, что* $\langle \mu, y \rangle \leqq \alpha$ *для всех* $y \in Y$.

Эта теорема — прямое следствие лемм 1 и 2.

Примеры 1 и 2 показывают, что если Y незамкнуто или не существует соответствующих μ и α, то последовательность, сходящаяся к эффективной точке, может не быть эффективной. Замкнутость Y и существование указанных μ и α исключает такую возможность, однако не гарантирует замкнутости множества $P(Y)$. А при незамкнутости $P(Y)$ последовательность эффективных точек, являющаяся, разумеется, эффективной последовательностью, может сходиться к неэффективной точке.

Далее будем предполагать, что множество Y ограничено. Пусть функция φ не убывает по $\geq$ на $\overline{Y}$, а последовательность $\{y^k\} \subseteq Y$ является для нее максимизирующей:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(y^k) = \sup_{y\in Y} \varphi(y).$$

Теорема 2. *Пусть* φ *непрерывна на* $\overline{Y}$. *Для того чтобы максимизирующая последовательность* $\{y^k\}$ *была эффективной, достаточно выполнения одного из условий*:

1) φ *возрастает по* $\geq$ *на* $\overline{Y}$;

2) φ *достигает наибольшего на* $\overline{Y}$ *значения в единственной точке* $y^* \in \overline{Y}$.

Доказательство. Допустим, что $\{y^k\}$ неэффективна, так что существуют ненулевой вектор $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$, последовательность $\{y^{k_r}\} \subseteq \{y^k\}$ и последовательность $\{z^{k_r}\} \subseteq Y$ (см. доказательство леммы 1) такие, что

$$z^{k_r} \geq y^{k_r} + \varepsilon, \quad r = 1, 2, \ldots;$$
$$\lim_{r\to\infty} y^{k_r} = y^0 \in \overline{Y}; \quad \lim_{r\to\infty} z^{k_r} = z^0 \in \overline{Y}.$$

Следовательно,

$$z^0 \geq y^0 \tag{2}$$

и, кроме того,

$$\varphi(y^0) = \sup_{y\in Y} \varphi(y). \tag{3}$$

Поскольку φ не убывает по $\geq$ на $\overline{Y}$, то в силу (2) $\varphi(z^0) \geqq \varphi(y^0)$. Если точка максимума φ на $\overline{Y}$ единственна, то последнее неравенство с учетом (3) невозможно. Если же φ возрастает по $\geq$ на $\overline{Y}$, то из (2) вытекает $\varphi(z^0) > \varphi(y^0)$, что противоречит (3). ■

Заметим, что если φ возрастает по $\geq$ не на $\overline{Y}$, а лишь на Y, то максимизирующая последовательность может не быть эффективной.

Пример 4. Пусть $Y \subset E^2$ — незамкнутый единичный квадрат $[0,1] \times [0,1)$. Функция

$$\varphi(y) = (1+y_2)\left[1 - \exp\left(\frac{y_1+1}{y_2-1}\right)\right]$$

непрерывна на Y и возрастает по $\geq$. Последовательность $\{y^k\}$, где $y^k = (0, 1-1/k)$, является максимизирующей для φ, но не эффективна, ибо $z^k \geq y^k + \varepsilon$, где $\varepsilon = (1/2, 0)$, $z^k = (1, 1-1/k)$. Функцию φ можно продолжить по непрерывности на $\overline{Y}$ (и притом единственным образом), положив $\varphi(y_1, 1) = 2$ при любом $y_1 \in [0,1]$. Однако полученная функция не является возрастающей по $\geq$ на $\overline{Y}$.

Пример 5. Если φ непрерывна на $\overline{Y}$, но является лишь неубывающей по $\geq$, то максимизирующая ее последовательность не обязана быть эффективной. Пусть

$$\psi(y, \varkappa) = \varphi(y) + \varkappa \sum_{i=1}^{m} y_i,$$

а $\{\varkappa^k\}$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, и для каждого k определена точка $y^k \in Y$ такая, что

$$\sup_{y \in Y} \psi(y, \varkappa^k) - \psi(y^k, \varkappa^k) < (\varkappa^k)^2. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что последовательность $\{y^k\}$ является максимизирующей для φ. Более того, эта последовательность эффективна. Действительно, допустим, что $\{y^k\}$ неэффективна. Тогда существует ненулевой вектор $\varepsilon \in E^m_{\geqq}$ и для любого $N > 0$ такого, что $\varkappa^N < \sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i$, найдется номер $k > N$, при котором y^k не является ε-эффективной. Последнее означает, что в Y есть точка z^k такая, что $z^k \geq y^k + \varepsilon$. Так как $\varphi(y)$ не убывает по $\geq$ на Y, то можно записать

$$\psi(z^k, \varkappa^k) - \psi(y^k, \varkappa^k) = \varphi(z^k) - \varphi(y^k) + \\ + \varkappa^k \sum_{i=1}^{m}(z_i^k - y_i^k) > \varkappa^k \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i > (\varkappa^k)^2,$$

что противоречит (4).

3. Разобранные свойства эффективных последовательностей оценок позволяют легко устанавливать и соответствующие свойства последовательностей решений. Например, если существуют $\mu \in \mathrm{M}$ и α такие, что $\langle \mu, f(x) \rangle \leqq \alpha$ для любого $x \in X$, а φ непрерывна и возрастает по $\geq$ на Y, то последовательность, максимизирующая функцию $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ на X, эффективна. Если же φ лишь не убывает по $\geq$ на Y (скажем, как $\min\limits_{i \in M} y_i$), то эффективную максимизирующую последовательность можно построить, точно или приближенно (в соответствии с (4)) максимизируя функцию $\psi = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m) + \varkappa^k \sum\limits_{i=1}^{m} f_i$ на X для каждого $\varkappa^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

В заключение отметим, что изложение данного параграфа основано на работе В. В. Подиновского [78].

ГЛАВА 3

СТРУКТУРА И СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

В этой главе формулируются условия существования эффективных точек, достаточные условия замкнутости, дугообразной связности и стягиваемости в себе множества эффективных точек, устанавливается тесная связь между множествами эффективных и собственно эффективных точек, приводятся оценки числа эффективных решений в дискретных задачах. В последнем параграфе дан краткий обзор методов построения множества эффективных решений и способов проверки эффективности выделенного решения.

Знание структуры и свойств множества эффективных точек «в целом» для различных классов многокритериальных задач позволяет глубже понять специфику этих задач, их существенные отличия от задач с одним критерием, а также способствует разработке численных методов отыскания всего множества эффективных точек.

§ 3.1. Топологические свойства множеств эффективных оценок и решений

В начале параграфа исследуется вопрос о том, когда множества эффективных и слабо эффективных точек являются замкнутыми. Далее формулируются условия, при которых множество собственно эффективных точек плотно во множестве эффективных точек. В заключение разбираются достаточные условия того, чтобы множество эффективных точек было дугообразно связным, стягиваемым в себе, ретрактом.

1. Понятно, что замкнутость множества эффективных (в том или ином смысле) решений существенным образом должна быть связана с замкнутостью самого множества X и непрерывностью f.

Для слабо эффективных решений эта связь, как известно [23], оказывается достаточно простой.

Теорема 1. *Если множество X замкнуто, а вектор-функция f непрерывна, то $S_f(X)$ замкнуто.*

Доказательство. Допустим, что множество $S_f(X)$ не замкнуто, так что существует последовательность $\{x^k\} \subseteq S_f(X)$, сходящаяся к точке $x^0 \in X \backslash S_f(X)$. Следовательно, найдется точка $x^* \in X$ такая, что $f(x^*) > f(x^0)$. Тогда благодаря непрерывности f для достаточно большого номера k окажется, что $f(x^*) > f(x^k)$, а это противоречит слабой эффективности x^k. ■

Если в этой теореме в качестве X взять Y, а вместо f — вектор-функцию $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, то получим условия замкнутости множества $S(Y)$.

Следствие 1. *Если множество оценок Y замкнуто, то множество слабо эффективных оценок $S(Y)$ также замкнуто.*

Если воспользоваться теоремой 1.6.2, в которой сформулированы достаточные условия совпадения множеств $P_f(X)$ и $S_f(X)$, то из теоремы 1 получим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть множество X выпукло и замкнуто, а вектор-функция f непрерывна и строго квазивогнута. Тогда множество эффективных решений $P_f(X)$ замкнуто.*

Требование строгой квазивогнутости f в этой теореме существенно: если оно не выполнено, то даже в случае $m = 2$ множество $P_f(X)$ может оказаться незамкнутым.

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$, а функции f_1, f_2 имеют графики, представленные на рис. 1. Обе функции квазивогнуты, но лишь f_1 строго квазивогнута. Здесь незамкнутое множество $P_f(X)$ является объединением двух непересекающихся интервалов: $[0, x^1)$ и $[x^2, 1]$.

Обратимся к вопросу о замкнутости множества эффективных оценок. Как показывает нижеследующий пример, множество $P(Y)$ может оказаться незамкнутым даже если $P_f(X)$ замкнуто и выполнены все предположения теоремы 2.

Пример 2. Пусть $X = [0, +\infty)$, а графики функций f_1 и f_2 изображены на рис. 2. Здесь $f = (f_1, f_2)$ строго квазивогнута, $P_f(X) = X$ — замкнуто, однако $P(Y) = Y$, очевидно, незамкнуто.

Если же к условиям теоремы 2 добавить условие ограниченности X, то множество $P_f(X)$ будет компактным и благодаря непрерывности f множество $P(Y)$ также будет компактным. Таким образом, имеет место

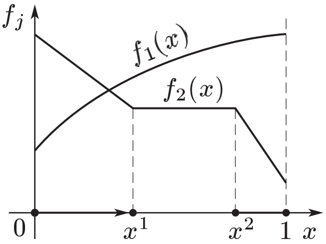

Рис. 1

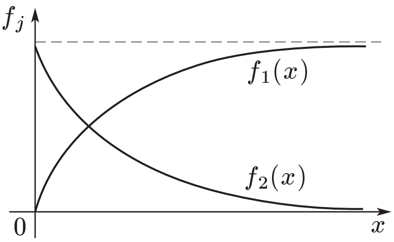

Рис. 2

Следствие 2. *При условии, что X — выпуклый компакт, а f непрерывна и строго квазивогнута, множество $P(Y)$ является компактом.*

Для двухкритериальных задач, т. е. в случае $m = 2$, удается получить следующие достаточно общие условия замкнутости множества $P(Y)$.

Теорема 3. *Если множество $Y \subseteq E^2$ замкнуто и эффективно выпукло, то замкнуто и множество $P(Y)$ *).*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{y^k\} \subseteq P(Y)$ сходится к точке $y^0 \in Y$, которая не является эффективной. Тогда для некоторой точки $y^* \in Y$ будут выполняться неравенства $y_1^* \geqq y_1^0$, $y_2^* \geqq y_2^0$, причем по крайней мере одно из них — строгое. Для определенности примем, что

$$y_1^* > y_1^0, \tag{1}$$

$$y_2^* \geqq y_2^0. \tag{2}$$

Тогда для достаточно большого номера k справедливо $y_1^* > y_1^k$. А так как $y^k \in P(Y)$, то $y_2^* < y_2^k$. Поэтому согласно (2)

$$y_2^k > y_2^0. \tag{3}$$

Для любого $\gamma \in [0, 1/2]$

$$y(\gamma) = \frac{1}{2}y^0 + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)y^* + \gamma y^k \in Y_* = Y - E^2_{\geqq}.$$

Отсюда с учетом (1) получаем

$$y_1(0) = \frac{1}{2}y_1^0 + \frac{1}{2}y_1^* > y_0^1.$$

*) О замкнутости $P(Y)$ для выпуклого замкнутого множества $Y \subseteq E^2$ упоминается в работе [104].

Следовательно, для достаточно малого $\gamma \in (0, 1/2)$ будет выполняться $y_1(\gamma) > y_1^0$. Кроме того, в силу (2) и (3) верно $y_2(\gamma) > y_2^0$. Поэтому для достаточно большого k оказывается, что $y(\gamma) > y^k$. Поскольку $y(\gamma) \in Y_*$, то существует точка $y \in Y$, для которой верно $y \geqq y(\gamma)$. Таким образом, $y > y^k$, а это противоречит эффективности y^k. ■

То, что в доказанной теореме условие $m = 2$ является существенным, показывает следующий пример.

Пример 3. Пусть $Y \subset E^3$ — круговой конус, основанием которого служит единичный круг в плоскости y_1Oy_2, а вершиной — точка $A = (0, 1, 1)$ (см. рис. 3).

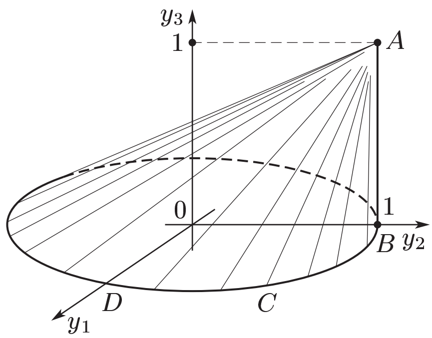

Рис. 3

Для рассматриваемого множества Y все точки дуги DCB (кроме точки B) эффективны. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что для любой внутренней точки этой дуги существует опорная к множеству Y плоскость, которая перпендикулярна некоторому вектору с положительными компонентами (это влечет даже собственную эффективность). Точка D эффективна, так как является единственной точкой из Y, имеющей наибольшую координату $y_1 = 1$. Однако точка B не эффективна, так как $A = (0, 1, 1) \geq (0, 1, 0) = B$.

Подобно тому как в теореме 3 были получены условия замкнутости $P(Y)$, можно доказать следующие условия замкнутости $P_f(X)$ для двухкритериальных задач.

Теорема 4. *Если множество X выпукло и замкнуто, а вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ вогнута и непрерывна на X, то множество $P_f(X)$ замкнуто.*

Заметим, что, в отличие от требования строгой квазивогнутости f теоремы 2, здесь предполагается вогнутость f, т. е. теорема 4 определенным образом дополняет теорему 2 в случае $m = 2$.

2. Следующая теорема устанавливает тесную взаимосвязь множества эффективных и множества собственно эффективных оценок. Д. А. Молодцовым [58] она была получена при более ограничительных предположениях.

Теорема 5. *Предположим, что множество Y замкнуто и существуют вектор $\mu \in \mathrm{M}$ и число α такие, что*

$$\langle \mu, y \rangle \leqq \alpha \quad \text{для всех} \quad y \in Y. \tag{4}$$

Тогда $G(Y)$ плотно в $P(Y)$, т. е.

$$G(Y) \subseteq P(Y) \subseteq \overline{G(Y)}. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку включение $G(Y) \subseteq P(Y)$ имеет место всегда, остается убедиться в справедливости включения $P(Y) \subseteq \overline{G(Y)}$. Это включение, очевидно, выполняется, если $P(Y) = \varnothing$. Пусть $y^0 \in P(Y)$. Не уменьшая общности, будем считать, что $y^0 > 0_{(m)}$. Докажем существование последовательности собственно эффективных точек, сходящихся к y^0.

Введем функции

$$F_i^k(y) = \Big(1 - \frac{m-1}{k}\Big) y_i + \sum_{j \neq i} \frac{y_j}{k},$$
$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = m, m+1, \ldots,$$

и рассмотрим замкнутые множества

$$\Omega_k = Y \cap \big\{ y \in E^m \mid F_i^k(y - y^0) \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \big\},$$
$$k = m, m+1, \ldots .$$

Понятно, что

$$\Omega_m \supseteq \Omega_{m+1} \supseteq \Omega_{m+2} \supseteq \ldots$$

Благодаря условию (4) найдется такой номер k^0, что все множества Ω_k, $k \geqq k^0$, компактны.

Функции

$$\min_{i \in M} \lambda_i^k F_i^k(y), \quad k = k^0, k^0+1, \ldots,$$

где

$$\lambda_i^k = \frac{1}{F_i^k(y^0)} \Bigg/ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{F_j^k(y^0)} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

непрерывны на E^m но y. Поэтому для каждого $k = k^0, k^0+1, \ldots$ найдется такая точка $y^k \in \Omega_k$, что

$$\min_{i \in M} \lambda_i^k F_i^k(y^k) \geqq \min_{i \in M} \lambda_i^k F_i^k(y) \tag{6}$$

для всякого $y \in \Omega_k$, в том числе и для y^0. Если же $y \in Y \backslash \Omega_k$, то для некоторого i справедливо неравенство $F_i^k(y^0) > F_i^k(y)$. Поэтому и

$$\min_{i \in M} \lambda_i^k F_i^k(y^0) > \min_{i \in M} \lambda_i^k F_i^k(y).$$

Следовательно, неравенство (6) имеет место для всех $y \in Y$. Это, согласно следствию 2.1.6, влечет $y^k \in G(Y)$.

Так как при любом $k \geqq k^0$ верно $\Omega_k \subseteq \Omega_{k^0}$, то $\{y^k\} \subseteq \Omega_{k^0}$, $k = k^0, k^0+1, \ldots$. Но Ω_{k^0} — компакт, и поэтому из последовательности $\{y^k\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $y^* \in Y$. Согласно определению множеств Ω_k число k можно выбрать так, чтобы произвольная точка из Ω_k (в том числе и y^k) была приближена к множеству $y^0 + E^m_{\geqq}$ с любой наперед заданной точностью. Следовательно, $y^* \in y^0 + E^m_{\geqq}$. А так как $y^0 \in P(Y)$, то $y^* = y^0$. ■

Для выпуклого множества Y теорема 5 справедлива без условия (4).

Теорема 6. *Если множество Y замкнуто и выпукло, то справедливы включения* (5).

Доказательство. Условие (4) в доказательстве теоремы 5 использовалось лишь для установления ограниченности множеств Ω_k, начиная с некоторого k. Если же Y выпукло, то выпуклы и Ω_k, $k = m, m+1, \ldots$. Когда хотя бы одно из множеств $\Omega_m, \Omega_{m+1}, \ldots$ оказывается ограниченным, то доказательство проходит далее, как в теореме 5. Остается выяснить, возможен ли случай, когда все Ω_k неограничены. В таком случае для каждого k можно указать точку $\widetilde{y}^k \in \Omega_k$, принадлежащую сфере единичного радиуса с центром в точке y^0. Благодаря компактности сферы из последовательности $\{\widetilde{y}^k\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке $y^* \in Y$. Но тогда $y^* \in y^0 + E^m_{\geqq}$ и $y^* \neq y^0$, что противоречит эффективности y^0. Следовательно, если Y выпукло, то все множества Ω_k неограниченными быть не могут. ■

Требование выпуклости Y в последней теореме является существенным; об этом свидетельствует

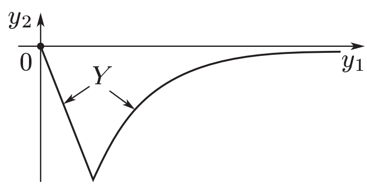

Рис. 4

Пример 4. Пусть Y имеет вид неограниченной кривой, изображенной на рис. 4. Оно замкнуто и эффективно выпукло, но не выпукло. Здесь точка 0 эффективна, однако собственно эффективных точек не существует, так что $P(Y) \subseteq G\overline{(Y)}$ не выполняется.

Непосредственно из теорем 5 и 6 вытекает

Следствие 3. *Пусть множество Y замкнуто. Если выполняется хотя бы одно из условий:*

1) *существуют вектор $\mu \in \mathrm{M}$ и число α, для которых имеет место* (4);

2) *Y выпукло* *);

то $P(Y) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $G(Y) \neq \varnothing$.

Для выпуклого множества Y справедливы включения (2.2.7). Теорема 6 позволяет установить более глубокую взаимосвязь множеств $P(Y)$ и $Y_>$, так как согласно теореме 2.2.3 $G(Y) = Y_>$.

Теорема 7 (Эрроу–Баранкин–Блекуэлл). *Если множество Y выпукло и замкнуто, то справедливы включения*

$$Y_> \subseteq P(Y) \subseteq \overline{Y}_>. \tag{7}$$

Перенос полученных результатов на вогнутые многокритериальные задачи позволяет осуществить следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть множество X выпукло, вектор-функция f вогнута и непрерывна на этом множестве и Y замкнуто. Если $P_f(X) \neq \varnothing$, то множество Y_* замкнуто.*

Доказательство. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{y^k\}$ из Y_*:

$$y^k \to \overline{y}, \quad y^k \leqq f(x^k), \quad x^k \in X, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\overline{y} = 0_{(m)}$. Для доказательства справедливости леммы предположим противное: $0_{(m)} \notin Y*$. Возможны два случая: последовательность $\{f(x^k)\}$ ограничена, либо не ограничена.

Если $\sup\limits_k ||f(x^k)|| \leqq a$ для $a \in [0, +\infty)$, то из последовательности $\{f(x^k)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f(x^l)\}$, в неравенстве $y^l \leqq f(x^l)$ перейти к пределу при $l \to \infty$ и благодаря замкнутости Y получить $0_{(m)} \leqq \lim f(x^l) = y^* \in Y$. Так как $y^* \in Y$, то найдется такая точка $x^* \in X$, что $y^* = f(x^*)$. Таким образом, $0_{(m)} \leqq f(x^*)$, а это противоречит предположению $0_{(m)} \notin Y_*$.

Пусть последовательность $\{f(x^k)\}$ не ограничена. В этом случае в силу (8) точки $f(x^k)$ при неограниченном увеличении k сколь угодно близко приближаются к неотрицательному ортанту $E^m_{\geqq}$.

*) Справедливость следствия с условием 2 доказана в [71].

При необходимости перейдя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{||f(x^k)||\}$ строго возрастающая и

$$\begin{aligned}&\sup_k f_1(x^k) = +\infty, \quad f_1(x^{k+1}) > f_1(x^k), \quad k = 1, 2, \ldots,\\ &f_2(x^k) \to -0,\\ &\sup_k f_i(x^k) \geqq 0, \quad i = 3, 4, \ldots, m.\end{aligned}$$

По условию леммы $P_f(X) \neq \varnothing$, и поэтому найдется $x^0 \in P_f(X)$. Последовательность $\{||f(x^k) - f(x^0)||\}$, начиная с некоторого номера, должна стать строго возрастающей и положительной. Не уменьшая общности, будем считать, что этот номер — первый. Возьмем $0 < \varepsilon < ||f(x^1) - f(x^0)||$. В силу непрерывности f для каждого k можно указать такое $\lambda_k \in (0, 1)$, что

$$||f(\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k)x^0) - f(x^0)|| = \varepsilon. \tag{10}$$

Благодаря вогнутости f имеем

$$z^k = \lambda_k f(x^k) + (1 - \lambda_k)f(x^0) \leqq f(\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k)x^0) = w^k. \tag{11}$$

Отсюда и из (10) следует

$$z_i^k \leqq f_i(x^0) + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

С другой стороны, в силу (9) начиная с некоторого k будут выполняться неравенства $f_i(x^k) \geqq -\varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому получаем

$$z_i^k \geqq -\varepsilon\lambda_k + (1 - \lambda_k)f_i(x^0), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{13}$$

Неравенства (12) и (13) указывают на ограниченность последовательности $\{z^k\}$, и поэтому ее можно считать сходящейся. Последовательность $\{w^k\}$ в силу того, что имеет место равенство (10), также будем считать сходящейся.

Докажем, что $\lambda_k \to 0$. Для последовательности $\{z_1^k\}$ благодаря (12) и (13) можно написать $|z_1^k| \leqq c$, где $c \geqq 0$. Используя определение z_1^k (11), отсюда получаем

$$\lambda_k \leqq \frac{c + ||f_1(x^0)||}{|f_1(x^k) - f_1(x^0)|},$$

откуда согласно первой строке из (9) следует $\lambda_k \to 0$.

Таким образом, из (13) вытекает неравенство $\lim z^k \geqq f(x^0)$. Поэтому благодаря (11) и (10) получаем $w^0 = \lim w^k \geqq f(x^0)$ и $w^0 \neq f(x^0)$, причем вследствие замкнутости Y верно $w^0 \in Y$, т. е. существует такая точка $x' \in X$, что $f(x') = w^0 \geq f(x^0)$. Это противоречит эффективности x^0. ■

Если в этой лемме вместо X взять Y, а в качестве f — линейную вектор-функцию $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, то получим следующее утверждение.

Следствие 4. *Если Y — выпуклое замкнутое множество и $P(Y) \neq \varnothing$, то множество Y_* замкнуто.*

Следует отметить, что следствие 4 в случае, когда Y замкнуто и лишь эффективно выпукло, оказывается неверным (см. пример 4).

В следующей теореме утверждения теорем 6 и 7 переносятся на вогнутые многокритериальные задачи.

Теорема 8. *Пусть X выпукло, вектор-функция f вогнута и непрерывна на X, а Y замкнуто. Тогда справедливы включения* (5) *и* (7).

Доказательство. Согласно леммам 2.2.2 и 1, Y_* — выпуклое замкнутое множество. Применяя к этому множеству теорему 6, получим

$$G(Y_*) \subseteq P(Y_*) \subseteq \overline{G(Y_*)},$$

откуда с учетом леммы 2.2.1 вытекают требуемые включения (5). Если же к множеству Y_* применить теорему 7 и воспользоваться легко проверяемым равенством $(Y_*)_> = Y_>$, то получим включения (7). ■

Заметим, что условие замкнутости Y теоремы 8 заведомо выполняется, если X — компакт, а f непрерывна на X.

Перейдем от оценок к решениям. В условиях теорем 6 и 8 правое из включений

$$G_f(X) \subseteq P_f(X) \subseteq \overline{G_f(X)} \tag{14}$$

может оказаться несправедливым.

Пример 5. Пусть $X \subset E^3$ — круговой конус, основанием которого служит единичный круг в плоскости $x_1 0 x_2$ а вершиной — точка $A = (0, 1, 1)$. Это множество можно считать изображенным на рис. 3, если заменить на нем y_1, y_2, y_3 соответственно на x_1, x_2, x_3. Для $f(x) = (x_1, x_2)$ множеством $G_f(X)$ очевидно, будет дуга окружности DCB (без концевых точек D и B), а множество $P_f(X)$ будет состоять из той же дуги (включая точки D и B)

и отрезка AB. Следовательно, здесь $\overline{G_f(X)}$ не покрывает всего множества $P_f(X)$.

Условия справедливости включений (14) формулируются в следующем утверждении.

Следствие 5. *Если X — выпуклый компакт, а f вогнута и непрерывна на X, причем хотя бы одна компонента f_i строго вогнута, то справедливы включения* (14).

Доказательство. Возьмем произвольное решение $x^0 \in$ $\in P_f(X)$. Согласно теореме 8 существует такая последовательность $\{x^k\}$, что $f(x^k) \to f(x^0)$ и $x^k \in G_f(X)$ для любого $k = 1, 2, \ldots$ Поскольку X компактно, эту последовательность можно считать сходящейся: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^* \in X$. Очевидно, $f(x^*) = f(x^0)$. Если $x^* \neq x^0$, то благодаря вогнутости и строгой вогнутости для $\lambda \in (0,1)$ имеем

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^0) \geq \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^0) = f(x^0).$$

Это неравенство противоречит условию $x^0 \in P_f(X)$). Следовательно $x^* \approx x^0$. ■

3. Напомним, что множество $Z \subseteq E^m$ называется (см. [50]):

дугообразно связным, если любые две его точки можно соединить дугой *), целиком лежащей в Z;

стягиваемым в себе, если существует точка $z^* \in Z$ и непрерывное отображение $h\colon Z \times [0,1] \to Z$ такие, что

$$h(z,0) = z, \quad h(z,1) = z^* \quad \text{для любого} \quad z \in Z.$$

Если множество стягиваемо в себе, то оно является дугообразно связным.

Рассмотрим свойства непустого множества $P(Y)$, предполагая, что Y замкнуто и выпукло. Поскольку всегда $P(Y) = P(Y_*)$ (лемма 2.2.1), а при сделанных предположениях Y_* замкнуто (следствие 4), то далее в теоремах 9–11, принадлежащих Б. Пелегу [207], будем считать, что $Y = Y_*$.

Теорема 9. *Множество $P(Y)$ стягиваемо в себе.*

Доказательство. Поскольку $P(Y) \neq \varnothing$, то в силу теоремы 7 существует вектор $\mu \in M$ и число α такие, что для всех $y \in Y$ выполняется неравенство (4). Пусть $w = \min\limits_{i\in M} \mu_i$. Введем на E^m

*) Дугой называется гомеоморфный образ отрезка $[0,1]$.

вектор-функцию

$$F(y) = y + \frac{1}{w}[a - \langle \mu, y \rangle] \sum_{i=1}^{m} e^i,$$

где e^i — i-й орт ($e^i_i = 1, e^i_j = 0$ при $j \neq i$). Эта функция непрерывна по y.

Для $y \in Y$ определим множество

$$R(y) = \{z \in Y \mid z \geqq y\}.$$

Для каждого $j \in M$ и всякого $z \in R(y)$ справедливы неравенства

$$F_i(y) \geqq y_j + \frac{1}{w}\Big[\sum_{i=1}^{m} \mu_i z_i - \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i\Big] \geqq$$
$$\geqq z_j + \Big(\frac{\mu_j}{w} - 1\Big)(z_j - y_j) + \frac{1}{w} \sum_{i \neq j} \mu_i (z_i - y_i) \geqq z_j.$$

Таким образом, вектор-функция F обладает тем свойством, что

$$F(y) \geqq z \text{ для любого } z \in R(y). \qquad (15)$$

Определим функцию $r\colon Y \to P(Y)$ из условия

$$||r(y) - F(y)|| = \min_{z \in R(y)} ||z - F(y)||.$$

В силу справедливости (4) множество $R(y)$ — выпуклый компакт. Функция $||z - F(y)||$ строго выпукла по z, и поэтому достигает на $R(y)$ минимум в единственной точке $r(y)$. Кроме того, $r(y) \in P(Y)$ (см. пример 2.1.4). Поэтому функция r определена корректно.

Ранее было принято $Y = Y_*$. Поэтому в Y существуют точки a, b такие, что $b > a$. Определим на $P(Y) \times [0,1]$ вектор-функцию:

$$h(p, t) = r((1-t)p + ta).$$

Очевидно, что $h(p, 0) = p$, $h(p, 1) = r(a) \in P(Y)$ для любого $p \in P(Y)$. Остается показать непрерывность функции h. Пусть $t = \lim t_r$, $p = \lim p^k$, где p, p^1, p^2 — точки из $P(Y)$, а t, t_1, t_2 — числа из $[0, 1]$.

Если $t = 0$, то

$$\lim_{k \to \infty} [(1 - t_k)p^k + t_k a] = p,$$

а благодаря тому, что $r(y) \in R(y)$,

$$h(p^k, t_k) \geqq (1 - t_k)p^k + t_k a. \qquad (16)$$

Последовательность $\{h(p^k, t_k)\}$ ограничена, и поэтому в силу (16) и $p \in P(Y)$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} h(p^k, t_k) = p$.

Если $t > 0$, то

$$\gamma = (1-t)p + tb > (1-t)p + ta = \lim_{k\to\infty}[(1-t_k)p^k + t_k a] = y. \tag{17}$$

Покажем, что вектор-функция r в точке $y = (1-t)p + ta$ непрерывна. Для этого предположим, напротив, что

$$y = \lim_{k\to\infty} y_2^k, \quad \lim_{k\to\infty} r(y^k) = z \neq r(y). \tag{18}$$

Тогда

$$||r(y) - F(y)|| < ||z - F(y)||. \tag{19}$$

Существует последовательность $\{z^k\}$, $z^k \in R(y^k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} z^k = r(y), \tag{20}$$

Действительно, пусть

$$z(\tau) = \tau\gamma + (1-\tau)r(y) > y, \quad \tau \in (0, 1),$$

где γ — вектор из (17). Найдется натуральное число $k(\tau)$ такое, что $z(\tau) \in R(y^k)$ для любого $k \geqq k(\tau)$. Но

$$\lim_{\tau\to 0} z(\tau) = r(y).$$

Поэтому найдутся такие точки $z^k \in R(y^k)$, что имеет место (20).

Из (18)–(20) следует существование такого номера k, что

$$||z^k - F(y^k)|| < ||r(y^k) - F(y^k)||.$$

Но это противоречит определению вектор-функции r.

Итак, r непрерывна в точке $(1-t)p + ta$. Непрерывность h в (p, t) следует из непрерывности r в $(1-t)p + ta$. ■

Следствие 6. *Множество $P(Y)$ дугообразно связно.*

Следствие 7. *Если $P(Y) \neq \varnothing$, то $S(Y)$ дугообразно связно.*

Доказательство. Возьмем произвольные точки $y^1, y^2 \in S(Y)$. Множество $P(Y)$ дугообразно связно, поэтому точки $r(y^1), r(y^2)$, где r — функция, введенная при доказательстве теоремы 9, можно соединить дугой $L \subseteq P(Y)$. Отрезок L_1, соединяющий точки y^1 и $r(y^1)$, входит в $S(Y)$. Аналогичным свойством обладает отрезок L_2, соединяющий y^2 и $r(y^2)$. Таким образом, дуга $L_1 \cup L \cup L_2$ лежит в $S(Y)$ и соединяет y^1 и y^2. ■

Множество $Z \subseteq E^m$ называется *ретрактом* множества $W \subseteq E^m$, $Z \subseteq W$, если найдется непрерывное отображение $\psi\colon W \to Z$, называемое ретракцией, такое, что $\psi(z) = z$ для любого $z \in Z$ [50].

Теорема 10. *Если множество $P(Y)$ замкнуто, то оно является ретрактом множества Y.*

Доказательство. Определим расстояние между $y \in Y$ и $P(Y)$ по формуле

$$d(y, P(Y)) = \inf_{z \in P(Y)} ||y - z||.$$

Введем на Y функцию

$$t(y) = \frac{d(y, P(Y))}{1 + d(y, P(Y))}. \tag{21}$$

Очевидно, $0 \leqq t(y) < 1$, и эта функция непрерывна по y. Кроме того, $y \in P(Y)$ тогда и только тогда, когда $t(y) = 0$.

Используя обозначения из доказательства предыдущей теоремы, определим на Y функцию

$$\psi(y) = r\big((1 - t(y))y + t(y)a\big).$$

Для нее $\psi(y) \in P(Y)$ при $y \in Y$ и $\psi(y) = y$ при $y \in P(Y)$. Аналогично тому, как было сделано в доказательстве теоремы 9, используя непрерывность $t(y)$, можно установить непрерывность ψ. Таким образом, ψ — ретракция Y на $P(Y)$. ■

Теорема 11. *Если множество $P(Y)$ — компакт, то оно является ретрактом некоторого компактного выпуклого подмножества Y.*

Доказательство. Выберем точку $a \in E^m$, для которой существует точка $y \in P(Y)$ такая, что $y > a$. Пусть

$$Y_1 = \mathrm{conv}\{P(Y), a\}.$$

Очевидно, Y_1 — выпуклый компакт и $P(Y_1) = P(Y)$. Пусть $q \in E^m$ удовлетворяет неравенству $q \geqq y$ для всех $y \in Y_1$. На Y_1 определим функцию r^1:

$$r^1(y) \in R_1(y) = \{z \in Y_1 \mid z \geqq y\}$$

из условия

$$||r^1(y) - q|| = \min_{z \in R_1(y)} ||z - q||.$$

Кроме того, пусть $t(y)$ — функция (21). Функция

$$\psi(y) = r^1\big((1 - t(y))y + t(y)a\big)$$

представляет собой ретракцию множества Y_1, на $P(Y)$. ■

При помощи леммы 1 теоремы 9–11 можно распространить на случай вогнутых многокритериальных задач. Например, лемма 1 и теорема 9 приводят к следующему утверждению.

Теорема 12. *Пусть множество X выпукло, вектор-функция f вогнута и непрерывна на нем, множество Y замкнуто и $P(Y) \neq \varnothing$. Тогда множество $P(Y)$ стягиваемо в себе.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что если X — выпуклый компакт, а f вогнута и непрерывна на X, то множество эффективных оценок $P(Y)$ стягиваемо в себе.

В этом пункте разбирались свойства множества эффективных точек. Исключение составляет следствие 7, в котором даны достаточные условия дугообразной связности множества $S(Y)$. Более подробно с топологическими свойствами множества слабо эффективных точек можно ознакомиться, обратившись к статье В. В. Морозова [59].

§ 3.2. Условия существования эффективных решений

Легко понять, что если существует (в том или ином смысле) эффективное решение, то существует (в том же смысле) эффективная оценка. И наоборот, из существования эффективной оценки всегда следует существование эффективного решения. Аналогично, множество эффективных решений внешне устойчиво (см. § 1.4) тогда и только тогда, когда внешне устойчивым является множество эффективных оценок. Поэтому при изучении вопросов существования нет надобности принципиально различать результаты, относящиеся к оценкам, и результаты, относящиеся к решениям.

1. Общие условия существования эффективных точек содержатся в следующем утверждении.

Теорема 1 *). *Пусть $Y \neq \varnothing$. Достаточным условием существования эффективных точек и внешней устойчивости множества $P(Y)$ является компактность множества $R(y) = \{z \in Y \mid z \geqq y\}$ для любого $y \in Y$. Если, кроме того, Y выпукло и замкнуто, то указанное условие является необходимым условием существования.*

Напомним, что из внешней устойчивости множества $P(Y)$ следует внешняя устойчивость множества $S(Y)$ (теорема 1.4.1).

*) Эта и следующая теорема являются частными случаями теорем, доказанных Р. Хартли [168, 169].

Доказательство. Достаточность. Возьмем произвольную точку $y^* \in Y$ и вектор $\mu \in \mathrm{M}$. Через y^0 обозначим точку максимума линейной функции $\langle \mu, y \rangle$ на множестве $R(y^*)$ (вследствие компактности $R(y^*)$ такая точка найдется). В силу теоремы 2.1.8 точка y^0 эффективна (в этом также легко убедиться, предположив противное). А так как $y^0 \in R(y^*)$, то $y^0 \geqq y^*$, т. е. множество $P(Y)$ внешне устойчиво.

Необходимость. Пусть $y^0 \in P(Y)$. Предположим напротив, что для некоторого $y^* \in Y$ множество $R(y^*)$ не является компактом. Поскольку Y замкнуто, то $R(y^*)$ должно быть неограниченным. Отсюда следует, что более широкое множество $R_* = Y_* \cap (y^* + E^m_{\geqq})$ также неограничено. Множество R_* выпукло и, в силу следствия 1.4, замкнуто. Его неограниченность влечет существование *рецессивного направления* (направления удаления в бесконечность), т. е. найдется ненулевой вектор $z \in E^m_{\geqq}$ такой, что $y + \lambda z \in Y_*$ для всех $y \in Y_*$ и $\lambda \geqq 0$ (см. § 3 в [93]). При $y = y^0$ и $\lambda > 0$ отсюда следует, что $y^0 \notin P(Y_*)$. Но это противоречит начальному условию $y^0 \in P(Y)$, так как согласно лемме 2.2.1 $P(Y_*) = P(Y)$. ■

Условие существования эффективных точек в этой теореме не является достаточным для существования собственно эффективных точек.

Пример 1. Пусть $m = 2$, $Y = \{y \in E^2 \mid y_2 = e^{-y_1}\}$. Здесь $R(y) = \{y\}$ — компактное множество для любого $y \in Y$. Тем не менее собственно эффективных точек не существует.

Кроме того, пример множества Y, изображенного на рис. 4, показывает, что при замкнутом и эффективно выпуклом Y из $P(Y) \neq \varnothing$ не обязательно следует компактность $R(y)$ для каждого $y \in Y$. Таким образом, требование выпуклости Y в теореме 1 нельзя заменить на требование эффективной выпуклости.

Условие замкнутости множества $R(y)$ при каждом $y \in Y$ проверять довольно трудно. Если же в условиях теоремы 1 дополнительно потребовать замкнутость Y, то можно получить более простые условия существования.

Теорема 2. *Пусть множество Y непусто и замкнуто. Достаточным условием существования всех видов эффективных точек и внешней устойчивости множества $P(Y)$ является существование вектора $\mu \in \mathrm{M}$ и числа α таких, что справедливо неравенство* (1.4)*. Если к тому же Y выпукло, то указанное условие является необходимым для существования эффективных точек.*

Доказательство. Достаточность. Возьмем произвольную точку $y \in Y$. Нетрудно убедиться в том, что замкнутость Y и выполнение неравенства (1.4) для $\mu > 0_{(m)}$ влечет компактность множества $R(y)$, определенного в теореме 1. Согласно этой теореме множество $P(Y)$ непусто и внешне устойчиво. В силу следствия 1.3 из $P(Y) \neq \varnothing$ следует $G(Y) \neq \varnothing$, поэтому все виды эффективных точек существуют.

Необходимость. В предположениях теоремы имеет место правое из включений (1.7) (теорема 1.7). Следовательно, если $P(Y) \neq \varnothing$, то найдутся вектор $\mu \in \mathrm{M}$ и точка $y^0 \in Y$ такие, что $\langle \mu, y \rangle \leqq \langle \mu, y^0 \rangle = \alpha$ для всех $y \in Y$. ■

Пример множества $Y = \{y \in E^2 \mid y_2 \leqq 0\}$ показывает, что в теореме 2 условие существования соответствующих μ и α не будет необходимым условием существования слабо эффективных точек.

Вопрос существования слабо эффективных точек оказывается тесно связанным с наличием граничных точек множества Y_*.

Теорема 3. *Неравенство $S(Y) \neq \varnothing$ имеет место тогда и только тогда, когда множество Y_* имеет хотя бы одну граничную точку, т. е.* $\mathrm{Fr}(Y_*) \neq \varnothing$.

Доказательство. Необходимость сразу следует в силу равенства

$$S(Y) = Y \cap \mathrm{Fr}(Y_*)$$

из леммы 2.2.1. Для доказательства достаточности возьмем $y^0 \in \mathrm{Fr}(Y_*)$. По определению множества Y_* для некоторого $y \in Y$ справедливо $y \geqq y^0$. Если допустить, что $Y \cap \mathrm{Fr}(Y_*) = \varnothing$, то (так как $y \in Y_*$) $y \in \operatorname{int} Y_*$. Отсюда следует неравенство $y' > y$ при некотором $y' \in Y_*$. В итоге получаем $y' > y^0$, а это противоречит включению $y^0 \in \mathrm{Fr}(Y_*)$. ■

Следует отметить, что в условиях теоремы 3 множество $S(Y)$ не обязательно внешне устойчиво.

Пример 2. Для множества $Y = 0_{(2)} \cup \{y \in E^2 | y_2 < 0\}$ множество $S(Y)$ непусто ($0_{(2)} \in S(Y)$), но не является внешне устойчивым.

2. В теоремах 1–3 были сформулированы условия существования в терминах множества оценок Y. Нередко при исследовании многокритериальных задач более удобными оказываются условия, выраженные в терминах множества решений X и векторной функции f.

Одним из наиболее общих подобного рода достаточных условий существования всех видов эффективных точек является условие компактности X и полунепрерывности сверху компонент вектор-функции f.

Теорема 1 (Подиновский) *). *Если X — непустой компакт, а f — полунепрерывная сверху (покомпонентно) на X вектор-функция, то все виды эффективных точек существуют, причем множество $P_f(X)$ внешне устойчиво.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x^* \in X$, зафиксируем некоторый вектор $\mu \in \mathrm{M}$ и рассмотрим полунепрерывную сверху скалярную функцию $\langle \mu, f(x) \rangle$. Она достигает (см. [42]) своего наибольшего значения на компакте $\big\{x \in X \mid \mid f(x) \geqq f(x^*)\big\}$. Точка максимума x^0, как легко убедиться, рассуждая «от противного», принадлежит множеству $P_f(X)$. Кроме того, $f(x^0) \geqq f(x^*)$, т. е. $P_f(X)$ — внешне устойчивое множество.

Максимизируя указанную функцию $\langle \mu, f(x) \rangle$ на компакте X, получим точку $\widetilde{x}$, которая согласно следствию 2.1.5 собственно эффективна. ■

Теорема 4 представляет собой многокритериальный аналог известной из анализа теоремы Вейерштрасса. Обобщение теоремы 4 можно получить при помощи понятия $E^m_{\geqq}$-полунепрерывной функции [136].

Примечание. Утверждения о внешней устойчивости из теорем 1, 2 и 4 являются по-существу следствиями одного из фундаментальных положений теории множеств, называемого леммой Цорна, а также теоремой Куратовского–Цорна (см. [42, 50]): *если всякая цепь частично упорядоченного множества обладает верхней гранью, то каждый не максимальный элемент этого множества подчинен некоторому максимальному элементу.*

Действительно, допустим, например, что выполнены достаточные условия из теоремы 1: $Y \neq \varnothing$ и при любом $y \in Y$ множество $R(y) = \{z \in Y \mid z \geqq y\}$ компактно. Пусть Q — произвольная цепь из Y, т. е. любые две точки из Q сравнимы по $\geqq$. Проверим, что для Q существует верхняя грань, т. е. точка $y^0 \in Y$ такая, что $y^0 \geqq z$ для всякого $z \in Q$. Возьмем произвольную точку $z^0 \in Q$ и рассмотрим совокупность S^0 множеств $R(z)$ для всех $z \in Q$ таких, что $z \geqq z^0$. Поскольку во всяком конечном наборе точек $\{z^1, z^2, \ldots, z^n\}$ из цепи Q имеется наибольшая, то пересечение $\bigcap\limits_{t=1}^{n} R(z^i)$ непусто, так что система множеств S^0 — центрирован-

*) Существование эффективных решений в предположении, что X — непустой компакт и f непрерывна, доказано в [12].

ная. Следовательно, в силу компактности $R(z^0)$ пересечение всех множеств $R(z)$ из S^0 непусто ([42] § 2.6, теорема 1). Легко понять, что всякая точка этого пересечения — верхняя грань Q. Следовательно, согласно лемме Цорна $P(Y)$ внешне устойчиво.

Для вогнутых многокритериальных задач с неограниченным множеством X представляет интерес следующий критерий существования.

Теорема 5. *Предположим, что множество X непусто и выпукло, вектор-функция f вогнута и множество Y замкнуто. Для существования эффективных и собственно эффективных точек и внешней устойчивости множества $P_f(X)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись вектор $\mu \in \mathrm{M}$ и число α, для которых верно неравенство* (1.4), *где $y = f(x)$.*

Доказательство. Достаточность обеспечивается теоремой 2. Если же $P_f(X) \neq \varnothing$, то согласно лемме 1.1 выпуклое множество Y_* замкнуто. В этом случае следствие 1.3 гарантирует выполнение неравенства $G(Y_*) \neq \varnothing$. Но $G(Y_*) = G(Y)$ (см. лемму 2.2.1), а значит, и $G_f(X) \neq \varnothing$. Отсюда в силу теоремы 2.2.4 вытекает существование требуемых μ и α. ∎

Из этой теоремы очевидным образом вытекает следующее обобщение следствия 1.3 (с условием 2) [71]: *в предположениях теоремы 5 $P_f(X) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $G_f(X) \neq \varnothing$.*

Если $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$, то пусть $M_0 = \{i \in M \mid \mu_i > 0\}$, а f_0 означает вектор-функцию, образованную из тех компонент f_i, для которых $i \in M_0$.

Следствие 1. *Пусть вектор-функция f вогнута на непустом выпуклом множестве X. Необходимым условием существования слабо эффективных решений является выполнение неравенства* (1.4) *для некоторого $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$. Если, кроме того, $f_0(X)$ замкнуто, то указанное условие является достаточным.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.2.2. Докажем достаточность. Из (1.4) имеем

$$\langle \mu^0, f_0(x) \rangle \leqq \alpha \quad \text{для всех} \quad x \in X,$$

где $\mu_i^0 = \mu_i > 0$ для каждого $i \in M_0$. Множество $f_0(X)$ по условию замкнуто. Согласно теореме 5 эффективные точки по вектор-функции f_0 относительно X существуют. Нетрудно понять, что каждая такая точка слабо эффективна по вектор-функции f. ∎

Нижеследующий пример показывает, что условие замкнутости множества $f_0(X)$ в следствии 1 существенно.

Пример 3. Пусть $m = n = 2$, $X = \{x \in E^2 \mid x_2 \leqq -1/x_1, x_1 > 0\}$, $f(x) = (x_1, x_2)$. Существует вектор $\mu = (0, 1)$, для которого справедливо неравенство (1.4):

$$\langle \mu, f(x) \rangle = x_2 \leqq -1/x_1 < 0 \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Однако слабо эффективных точек не существует, так как множество $f_2(X) = \{x \in E \mid x < 0\}$ незамкнуто.

3. Пусть вектор-функция f линейна:

$$f(x) = (\langle c^1, x \rangle, \langle c^2, x \rangle, \ldots, \langle c^m, x \rangle), \tag{1}$$

где $c^i \neq 0_{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Через X_π обозначим проекцию выпуклого замкнутого множества X на аффинную оболочку *) L множества $\{0, c^1, c^2, \ldots, c^m\}$. Для любого $x \in X$ имеет место представление $x = x' = x''$, где $x' \in X_\pi$, $x'' \in L^\perp$ ($L^\perp$ — ортогональное дополнение L). Поскольку $f(x'') = 0_{(m)}$ для всякого $x'' \in L^\perp$, то $f(x) = f(x')$. Следовательно, $Y = f(X) = f(X_\pi)$. Точки z, для которых $f(z) = 0_{(m)}$, лежат в множестве $L^\perp$, имеющем с L, в котором находится X_π, единственную общую точку $0_{(n)}$. В этих условиях теорема 9.1 из [93] гарантирует замкнутость множества $f(X_\pi)$, если X_π замкнуто. Таким образом, когда X_π замкнуто, то замкнутым является и множество Y. Благодаря этому факту из теоремы 5 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть X — непустое выпуклое замкнутое множество, вектор-функция f линейна и множество X_π замкнуто. Эффективные и собственно эффективные точки существуют в том и только том случае, если найдутся вектор $\mu \in \mathrm{M}$ и число α такие, что выполняется* (1.4), *где $y = f(x)$.*

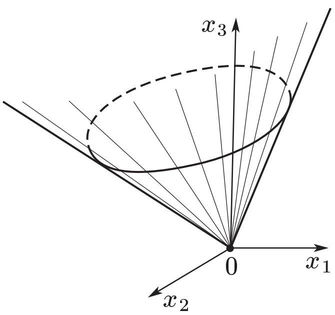

Рис. 5

В том что требование замкнутости X_π в следствии 2 является существенным, убеждает следующий

Пример 4. Множество $X \subset E^3$ представляет собой неограниченный круговой конус с вершиной в начале координат, касающийся плоскости x_2Ox_3 по оси Ox_3 (см. рис. 5). Для

*) Минимальное аффинное множество, содержащее данное множество $Z \subseteq E^m$, называется аффинной оболочкой множества Z (см. [93]).

линейной вектор-функции $f(x) = (x_1, x_2)$ легко убедиться в справедливости равенств

$$Y = X_\pi = 0_{(2)} \cup \{x \in E^2 \mid x_1 < 0\}.$$

Эффективными здесь являются все точки вида $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \geqq 0$. Однако не существует $\mu \in \mathrm{M}$ и α, для которых выполняется (1.4) (заметим, что отсюда, в частности, следует $G_f(X) = \varnothing$).

4. Рассмотрим линейную задачу, в которой f имеет вид (1) и

$$X = \{x \in E^n \mid \langle a^j, x\rangle \leqq b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $a^j \in E^n, b_j \in E, j = 1, 2, \ldots, k$. В линейной задаче, как указывает следствие 2.2.3, $P_f(X) = G_f(X)$. Поэтому условия существования собственно эффективных точек будут иметь такой же вид, как и условия существования эффективных точек.

В нижеследующем утверждении формулируется простой критерий существования эффективных (а, значит, и собственно эффективных) и слабо эффективных точек. Этот критерий для эффективных точек впервые был получен Д. Гейлом, Х. Куном и А. Таккером [154], а позднее — С. Н. Черниковым [101].

Теорема 6. *В линейной задаче эффективные* (*слабо эффективные*) *точки существуют тогда и только тогда, когда найдутся такие векторы* $\mu \in \mathrm{M}$ ($\mu \in \overline{\mathrm{M}}$) *и* $\lambda \in E^k_>$, *что*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточность. Для любого $x \in X$ из (2) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle c^i, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle a^j, x\rangle \leqq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j = \alpha. \tag{3}$$

В линейной задаче множество Y полиэдрально, а значит, замкнуто. Поэтому последнее неравенство согласно теореме 5 (следствию 1) влечет существование эффективных (слабо эффективных) точек.

Необходимость. Если существует эффективная (слабо эффективная) точка, то благодаря теореме 2.2.7 равенство (2) при $\mu \in \mathrm{M}$ ($\mu \in \overline{\mathrm{M}}$) и $\lambda \in E^k_{\geqq}$ выполняется. ■

Подчеркнем, что теорема 6 получена в предположении $X \neq \varnothing$. Критерий существования эффективных точек в линейной задаче, где заранее не предполагается наличие допустимых решений, будет сформулирован в § 4.4 (п. 2).

Если в линейной задаче множество X задано ограничениями

$$\langle a^j, x\rangle \leqq b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k; \quad x \geqq 0_{(n)},$$

то, как легко проверить, необходимое и достаточное условие (2) принимает вид неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i \leqq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j.$$

Если же X является решением системы

$$\langle a^j, x\rangle = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k; \quad x \geqq 0_{\{n)},$$

то условие существования будет иметь тот же вид неравенства, однако на вектор λ не будет налагаться никаких ограничений (т. е. $\lambda \in E^k$).

В заключение заметим, что из (2) для всякого $x \in X$ следует неравенство (3). Поэтому в линейных задачах согласно теореме 5 непустое множество $P_f(X)$ (а также и $S_f(X)$) всегда внешне устойчиво [71].

§ 3.3. Структура множеств эффективных решений в линейных задачах

Учитывая тот факт, что в линейных задачах множество оценок Y всегда полиэдрально (см. теорему 19.3 из [93]), а значит, выпукло и замкнуто, результаты, полученные в § 3.1 для вогнутых задач, можно без труда переформулировать применительно к линейной задаче. В данном параграфе мы рассмотрим такие свойства множеств эффективных решений, которые имеют место только для линейных задач и отражают специфику последних.

На протяжении параграфа предполагается, что линейная вектор-функция f имеет вид $f(x) = \big(\langle c^1, x\rangle, \langle c^2, x\rangle, \ldots, \langle c^m, x\rangle\big)$, где $c^i \neq 0_{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

1. Вначале установим одно полезное свойство множества эффективных решений, которое справедливо благодаря линейности f.

Теорема 1. *Если существует вектор* $\mu \in \mathrm{M}$ $(\mu \in \overline{\mathrm{M}})$, *для которого выполняется равенство*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i = 0_{(n)}, \tag{1}$$

то $G_f(X) = X$ $(S_f(X) = X)$. *В противном случае эффективными (слабо эффективными) решениями могут являться лишь граничные точки множества* X.

Сформулированное утверждение для эффективных решений было доказано С. Н. Черниковым [101], а позднее и в работах [115, 126].

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x^0 \in X$. Из равенства (1) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle c^i, x^0 \rangle \geqq \sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle c^i, x \rangle,$$

справедливое для всех $x \in X$. Поэтому, согласно следствию 2.1.5 (теореме 2.1.3), если $\mu \in \mathrm{M}$ $(\mu \in \overline{\mathrm{M}})$, то x^0 — собственно эффективная (слабо эффективная) точка.

Докажем вторую часть теоремы. Предположим, напротив, что $x^0 \in \operatorname{int} X$ является эффективной (слабо эффективной) точкой. Очевидно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$X_\varepsilon = \left\{ x \in E^n \;\middle|\; |x_j - x_j^0| \leqq \varepsilon, \;\; j = 1, 2, \ldots, n \right\} \subseteq X.$$

Легко понять, что $x^0 \in P_f(X_\varepsilon)$ (соответственно $x^0 \in S_j(X_\varepsilon)$), причем множество X_ε полиэдрально. На основании теоремы 2.2.7 можно утверждать, что в линейной задаче с вектор-функцией $\big(\langle c^1, x\rangle, \langle c^2, x\rangle, \ldots, \langle c^m, x\rangle\big)$ и множеством X_ε для точки x^0 существуют векторы $\mu \in \mathrm{M}$ $(\mu \in \overline{\mathrm{M}})$ и $\lambda \in E^n_{\geqq}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\varepsilon + x_j^0 - x_j^0) + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j (\varepsilon - x_j^0 + x_j^0) = 0.$$

Из второго равенства благодаря $\varepsilon > 0$ следует $\lambda = 0_{(2n)}$. Поэтому первое равенство принимает вид (1). Полученное противоречие говорит о том, что эффективные (слабо эффективные) решения могут быть лишь граничными точками. ■

Итак, эффективные, собственно эффективные и слабо эффективные решения в случае линейной вектор-функции f независимо от строения допустимого множества X могут либо составлять все множество X, либо располагаться лишь на границе этого множества.

2. До конца параграфа считается, что

$$X = \{x \in E^n \mid \langle a^j, x\rangle \leqq b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, k\}.$$

В линейных задачах $P_j(X) = G_f(X)$ (см. следствие 2.2.3); поэтому в формулировках приводимых ниже утверждений участвуют лишь эффективные точки.

Отличительной особенностью линейных многокритериальных задач является то, что для этих задач множества $P_f(X)$ и $S_f(X)$ всегда можно представить в виде конечного объединения решений скалярных задач линейного программирования вида $\langle \mu, f(x)\rangle \to \max$.

Введем множество

$$V = \Big\{v \in E^n \mid v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i \ \text{ для некоторого } \ \mu \in \mathrm{M}\Big\}.$$

Теорема 2 (Эрроу–Баранкин–Блекуэлл). *Существует такой конечный набор векторов $v^1, v^2, \ldots, v^r \in V$, что*

$$P_f(X) = \bigcup_{i=1}^{r} X(v^i), \tag{2}$$

где

$$X(v^i) = \big\{x^0 \in X \mid \langle v^i, x^0\rangle = \max_{x \in X}\langle v^i, x\rangle\big\}.$$

Доказательство. Включение $P_f(X) \supseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} X(v^i)$ очевидно (см. пример 2.1.2). Докажем обратное. Полиэдральное множество X представим в виде выпуклой оболочки конечного числа точек и направлений (см. [93]):

$$X = \Big\{x \,\Big|\, x = \sum_{i=1}^{l} \omega_i x^i + \sum_{j=l+1}^{N} \omega_j x^j \quad \text{для некоторых} \\ \omega_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N; \quad \sum_{i=1}^{l} \omega_i = 1\Big\}. \tag{3}$$

Подмножество U множества точек $\{x^1, x^2, \ldots, x^l\}$ назовем *подходящим*, если найдется $v \in V$ такое, что $U \subseteq X(v)$. В силу конечности l число подходящих множеств конечно. Обозначим их через $U_1, U_2, \ldots, U_r$, а соответствующие им v — через $v^1, v^2, \ldots, v^r$.

Возьмем произвольную точку $x^0 \in P_f(X)$. Существует такой вектор $v \in V$, что $x^0 \in X(v)$ (см. лемму 2.2.4). С другой стороны, в силу (3) выполняется

$$x^0 = \sum_{i=1}^{l} \omega_i x^i + \sum_{j=l+1}^{N} \omega_j x^j \tag{4}$$

при некоторых $\omega_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N;\ \sum_{i=1}^{l} \omega_i = 1$. И поскольку $\sum_{i=1}^{l} \omega_i x^i \in X$, то

$$\langle v, x^0 \rangle \geqq \left\langle v, \sum_{i=1}^{l} \omega_i x_i \right\rangle,$$

а значит,

$$\left\langle v, \sum_{j=l+1}^{N} \omega_j x^j \right\rangle \geqq 0.$$

А так как $\sum_{i=1}^{l} \omega_i x^i + \sum_{j=l+1}^{N} 2\omega_j x^j \in X$, то

$$\langle v, x^0 \rangle \geqq \langle v, x^0 \rangle + \left\langle v, \sum_{j=l+1}^{N} \omega_j x^j \right\rangle.$$

Поэтому

$$\left\langle v, \sum_{j=l+1}^{N} \omega_j x^j \right\rangle = 0. \tag{5}$$

Пусть U — множество тех x^i, для которых соответствующие ω_i в представлении (4) положительны, и M_0 — множество соответствующих индексов i. Справедливо включение $U \subseteq X(v)$. В самом деле, если это не так и, например, $\langle v, x^s \rangle < \max\limits_{x \in X} \langle v, x \rangle$, то, используя (5), получаем

$$\langle v, x^0 \rangle < \sum_{i=1}^{l} \omega_i \max_{x \in X} \langle v, x \rangle = \max_{x \in X} \langle v, x \rangle,$$

что противоречит условию $x^0 \in X(v)$.

Следовательно, множество U — подходящее. Пусть для определенности $U = U_1$, $v = v^1$. Тогда из равенства

$$\langle v^1, x^i \rangle = \max_{x \in X} \langle v^1, x \rangle \ \text{ для всех } \ i \in M_0,$$

учитывая (4) и (5), получим

$$\langle v^1, x^0 \rangle = \max_{x \in X} \langle v^1, x \rangle,$$

т. е. $x^0 \in X(v^1)$. ■

Анализ доказательства теоремы 2 показывает, что подобного рода утверждение будет справедливо и для множества слабо эффективных точек; при этом роль множества V будет выполнять замыкание

$$\overline{V} = \Big\{ v \in E^n \mid v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i c^i \ \text{ для некоторого } \ \mu \in \overline{\mathrm{M}} \Big\}.$$

Теорема 3. *Существует такой набор векторов* $v^1, v^2, \ldots$ $\ldots, v^r \in \overline{V}$, *что* $S_f(X) = \bigcup\limits_{i=1}^{r} X(v^i)$.

Поскольку множество решений $X(v^i)$ обычной задачи линейного программирования представляет собой некоторую грань множества X, то согласно доказанному множества $P_f(X)$ и $S_f(X)$ являются объединениями некоторых граней множества X. Возможен и случай, когда все множество X выступает в роли подобной грани.

3. Здесь мы будем дополнительно предполагать, что полиэдральное множество X содержит по крайней мере одну вершину (крайнюю точку) *).

Напомним, что точка $x^0 \in X$ называется вершиной множества X, если из соотношений

$$x^0 = \lambda x' + (1 - \lambda) x''; \quad x', x'' \in X; \quad \lambda \in (0, 1),$$

следует $x' - x'' = x^0$.

При сделанном предположении о существовании вершины множества X имеем, что если $P_f(X) \neq \varnothing$, то существует по крайней мере одна эффективная вершина, т. е. эффективная точка, являющаяся вершиной. Действительно, если $x^0 \in P_f(X)$, то согласно лемме 2.2.4 точка x^0 является решением задачи линейного про-

*) Множество X заведомо будет содержать вершину, если, например, компоненты допустимых векторов еще и неотрицательны, т. е. $x \geqq 0_{(n)}$ (см. [105]).

граммирования

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle c^i, x\rangle \to \max_x \quad \text{для некоторого} \quad \mu \in M.$$

Как известно из курса линейного программирования (теорема 3.2 из [105]), среди решений этой задачи имеется хотя бы одно опорное решение, т. е. вершина. В силу $\mu > 0_{(m)}$ эта вершина будет эффективной.

Введем множество V^* векторов v из E^n, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $v = \lambda v'$, где $v' \in V$ и $\lambda \geqq 0$;

2) задача линейного программирования $\max\limits_X \langle v, x\rangle$ имеет решение (и это решение эффективно!).

Нетрудно понять, что V^* — выпуклый конус. Обозначим вершины полиэдрального множества X через $x^1, x^2, \ldots, x^N$, $N \geqq 1$, и введем множества

$$V^*(j) = \bigl\{v \in E^n \mid \langle v, x^j\rangle = \max_{x\in X}\langle v, x\rangle\bigr\}, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Непосредственной проверкой легко установить, что каждое из введенных множеств представляет собой выпуклый замкнутый конус *).

Лемма 1. *Пусть $V^* \neq \varnothing$. Тогда*

$$V^* \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V^*(j).$$

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $v \in V^*$. Среди решений задачи линейного программирования $\max\limits_{x\in X}\langle v, x\rangle$ имеется вершина множества X. Обозначим ее через x^j. Таким образом, $\langle v, x^j\rangle = \max\limits_{x\in X}\langle v, x\rangle$, и поэтому $v \in V^*(j)$ при некотором $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. ■

Говорят, что две вершины x^i и x^j множества X являются смежными (соединены ребром), если для любой внутренней точки x отрезка $[x^i, x^j]$, соединяющего данные вершины, из соотношений

$$x = \lambda x' + (1-\lambda)x''; \quad x', x'' \in X; \quad \lambda \in (0, 1),$$

следует $x', x'' \in [x^i, x^j]$.

*) Более того, каждое из этих множеств является полиэдральным конусом.

Множество (подмножество) вершин множества X называется *реберно связным* в том случае, если оно состоит лишь из одной вершины, либо если для любой пары вершин x^i, x^j этого множества (подмножества) найдется такая конечная последовательность вершин $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_l} \in \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$, что $x^{i_1} = x^i, x^{i_l} = x^j$, и любые две соседние вершины этой последовательности являются смежными.

Лемма 2. *Справедливы утверждения:*

1) *множество вершин полиэдрального X реберно связно;*

2) *подмножество всех вершин, доставляющих максимум линейной функции на X, реберно связно.*

Доказательство. 1) Если X содержит всего одну вершину, утверждение справедливо. Пусть x^i, x^j — произвольная пара вершин множества X. Из курса линейного программирования известно (см. [105]), что для вершины x^j должны выполняться равенства

$$\langle a^{i_p}, x^j \rangle = b_{i_p}, \quad p = 1, 2, \ldots, n; \quad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\},$$

причем векторы $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_n}$ линейно независимы. Пусть $\overline{a} = \sum\limits_{p=1}^{n} a^{i_p}$, $\overline{b} = \sum\limits_{p=1}^{n} b^{i_p}$. Ясно, что неравенство $\langle \overline{a}, x \rangle \leqq \overline{b}$ выполняется для всякого $x \in X$, причем $\langle \overline{a}, x^j \rangle = \overline{b}$. Кроме того, если $x' \in X$ и $\langle \overline{a}, x' \rangle = \overline{b}$, то $x' = x^j$ (в противном случае нарушается условие линейной независимости векторов $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_n}$). Все это означает, что линейная функция $\langle \overline{a}, x \rangle$ достигает своего максимального значения на X в единственной точке x^j.

Теперь, если вершину x^i принять за начальное опорное решение в задаче линейного программирования $\max\limits_{x \in X} \langle \overline{a}, x \rangle$, то применение симплекс-метода даст искомую последовательность смежных вершин, в которой первым элементом является x^i, а последним x^j.

2) Множество X' всех точек, доставляющих максимум данной линейной функции, является, как известно, полиэдральным множеством. Согласно доказанному пункту 1), множество всех вершин из X' реберно связно. Легко понять, что вершина в множестве X' будет вершиной и в множестве X и, кроме того, любые две смежные вершины в X' смежны и в X. ■

Теорема 4. *Если $P_f(X) \neq \varnothing$, то множество эффективных вершин реберно связно.*

Доказательство. В начале данного пункта было показано, что из неравенства $P_f(X) \neq \varnothing$ следует существование эффективных вершин. Если имеется лишь одна эффективная вершина, то утверждение справедливо.

Пусть x^i и x^j — две произвольные эффективные вершины и им соответствуют множества $V^*(i)$ и $V^*(j)$. Согласно лемме 2.2.4 $V^* \cap V^*(i) \neq \varnothing$ и $V^* \cap V^*(j) \neq \varnothing$. Возьмем $v^1 \in V^* \cap V^*(i)$ и $v^2 \in V^* \cap V^*(j)$ и рассмотрим отрезок $[v^1, v^2]$, соединяющий точки v^1 и v^2. Поскольку V^* — выпуклый конус, то $[v^1, v^2] \subseteq V^*$. Согласно лемме 1 $[v^1, v^2] \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} V^*(j)$, причем каждое $V^*(j)$ есть выпуклый замкнутый конус. Таким образом, отрезок $[v^1, v^2]$ покрывается конечным числом отрезков $T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_l}$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ и $T_{i_s} = [v^1, v^2] \cap V^*(i_s)$, $s = 1, 2, \ldots$ $\ldots, l$. Благодаря замкнутости $V^*(i_s)$ отрезки T_{i_s} замкнуты. А так как они покрывают весь отрезок $[v^1, v^2]$, то можно считать, что

$$v^1 \in T_{i_1}, \quad v^2 \in T_{i_l}, \quad T_{i_s} \cap T_{i_{s+1}} \neq \varnothing, \quad s = 1, 2, \ldots, l-1.$$

Пусть $v^{i_s} \in T_{i_s} \cap T_{i_{s+1}}$, $s = 1, 2, \ldots, l-1$. Множество вершин, являющихся решениями каждой из задач $\max\limits_{x \in X} \langle v^{i_s}, x \rangle$, $s = 1, 2, \ldots$ $\ldots, l-1$, представляет собой подмножество из $P_f(X)$ и, кроме того, согласно лемме 2 реберно связно. Более того, ясно, что объединение по $s = 1, 2, \ldots, l-1$ всех подобного рода вершин также реберно связно. Но x^i — точка максимума функции $\langle v^{i_1}, x \rangle$, а x^j — точка максимума функции $\langle v^{i_{l-1}}, x \rangle$ на X. Следовательно, вершины x^i, x^j входят в указанное объединение, и поэтому их можно соединить последовательностью ребер, каждое из которых соединяет пару эффективных вершин. ■

Анализ приведенных рассуждений показывает, что подобным образом можно установить реберную связность множества слабо эффективных вершин. Для этого вместо множеств V и V^* следует использовать их замыкания $\overline{V}$ и $\overline{V}^*$, а вместо леммы 2.2.4 — теорему 2.2.2.

§ 3.4. Оценка числа эффективных точек в дискретных задачах

Когда множество $Y \subset E^m$ конечно (состоит из N элементов), то множество эффективных точек $P(Y)$ всегда непусто и, более того, внешне устойчиво. Хотя в каждой конкретной задаче все эффективные точки можно перечислить, несомненный интерес представляет вопрос о получении «априорной» оценки числа таких точек. Подобного рода оценки могут оказаться полезными при анализе трудоемкости различных алгоритмов построения множества эффективных решений, а также процедур выделения наиболее приемлемого решения среди всех эффективных.

Количество эффективных точек $|P(Y)|$ в зависимости от конфигурации множества Y, очевидно, может изменяться в пределах от 1 до N. Поэтому в общем случае N — точная верхняя, а 1 — точная нижняя оценки числа $|P(Y)|$ (а также и $|S(Y)|$). Однако, если каким-либо образом учитывать особенности конфигурации множества Y, то указанную верхнюю оценку можно уточнить. Наиболее просто это сделать в том случае, когда множество Y_i значений i-го критерия (§ 1.1) конечно при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$. Поскольку числа $|P(Y)|$ и $|S(Y)|$ инвариантны относительно монотонных преобразований критериев (§ 1.8), то удобно полагать, что каждое множество Y_i состоит из целых чисел, так что множество оценок $\widehat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$ — это множество точек m-мерного гиперпараллелепипеда с целочисленными координатами. Точная верхняя оценка числа $|P(Y)|$ для указанного случая была получена В. Б. Алексеевым [2], Т. М. Виноградской и М. Г. Гафтом [15], а также М. К. Альбертьяном [3]. Их результаты изложены в первом пункте параграфа. Во втором пункте получена точная верхняя оценка числа $|S(Y)|$ слабо эффективных точек.

Другой подход к оценке количества эффективных точек — вероятностный и состоит в том, что точки $y \in Y$ рассматриваются как независимые случайные векторы. Тогда $|P(Y)|$ и $|S(Y)|$ оказываются случайными величинами, и можно искать их распределения и числовые характеристики — математическое ожидание, дисперсию и т. д. В предположении, что координаты случайных точек $y \in Y$ — независимые непрерывные одинаково распределенные величины, этот подход реализовали О. Барндорф-Нилсон и М. Собль [5], Б. А. Березовский и С. И. Травкин [7], Т. М. Виноградская [14], Х. Кэлпайн и А. Гоулдинг [128] *). Их результаты, касающиеся математического ожидания $|P(Y)|$, приведены в третьем пункте параграфа.

*) Случаю, когда точки $y \in Y$ получаются в результате независимых реализаций нормально распределенного случайного вектора, посвящен ряд работ, указанных в [5], а также статьи [38, 39, 48].

1. Будем рассматривать случай, когда $\widehat{Y}$ — m-мерная целочисленная гиперпараллелепипедная решетка:

$$\widehat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m, \tag{1}$$

где $Y_i = \{0, 1, \ldots, l_i\}$, l_i — натуральное число, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Каждое множество $Y \subseteq \widehat{Y}$ содержит $|P(Y)|$ эффективных точек. Обозначим через w наибольшее из всех чисел $|P(Y)|$ для всевозможных $Y \subseteq \widehat{Y}$. Число w называется *шириной* множества $\widehat{Y}$, частично упорядоченного отношением $\geqq$. Это число и есть искомая точная верхняя оценка количества $|P(Y)|$ эффективных точек для $Y \subseteq \widehat{Y}$.

Очевидно, что при отыскании w можно ограничиться рассмотрением только тех множеств $Y \subseteq Y$, которые состоят из несравнимых по $\geqq$ точек, т. е. для которых $Y = P(Y)$. Такие множества называются *независимыми*. Независимое множество, содержащее w точек, называется максимальным независимым множеством.

Числовую функцию η, определенную на $\widehat{Y}$, назовем весовой, если для любых $y', y'' \in Y$ из $y' \geqq y''$ следует $\eta(y') - \eta(y'') \geqq 1$. Последовательность точек $y^1, y^2, \ldots, y^s$ из $\widehat{Y}$ называется *цепью*, если $y^1 \leq y^2 \leq \ldots \leq y^s$. Число s называется *длиной цепи*, а точка y^s — *максимальной* в цепи. Отдельная точка является цепью длины 1. *η-центром* цепи $y^1, y^2, \ldots, y^s$ будем называть число η^*, определяемое так:

$$\eta^* = \begin{cases} \eta(y^{t+1}) & \text{при} \quad s = 2t + 1, \\ \dfrac{1}{2}\big[\eta(y^t) + \eta(y^{t+1})\big] & \text{при} \quad s = 2t. \end{cases}$$

Цепь назовем *η-центрированной*, если $\eta^* = 0$.

Множество $\widehat{Y}$ допускает симметричное покрытие цепями при весовой функции η, если его можно разбить на цепи так, что:

1) цепи попарно не пересекаются и в объединении дают $\widehat{Y}$;
2) если $y^1, y^2, \ldots, y^s$ — произвольная цепь из разбиения, то $\eta(y^{j+1}) = \eta(y^j) + 1$, $j = 1, 2, \ldots, s - 1$;
3) все цепи η-центрированы.

Лемма 1. *Пусть $\widehat{Y}$ допускает симметричное покрытие цепями при весовой функции η. Тогда множество*

$$W = \big\{y \in \widehat{Y} \mid -1/2 \leqq \eta(y) < 1/2\big\} \tag{2}$$

является максимальным независимым множеством.

Доказательство. Пусть q — число цепей в симметричном покрытии. Так как любое независимое множество $Y \subset \widehat{Y}$ имеет на каждой цепи не более одной точки, то $w \leqq q$. С другой стороны, в силу условия 2 из определения симметричного покрытия любые две точки из W несравнимы по $\geqq$, и поэтому $w \geqq |W|$. Следовательно, $|W| \leqq w \leqq q$.

Из определения симметричного покрытия видно, что каждая цепь содержит ровно одну точку из W, так что $|W| = q$. Поэтому $w = |W|$. ■

Лемма 2. *Множество $\widehat{Y}$ допускает симметричное покрытие цепями при*

$$\eta(y) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(y_i), \tag{3}$$

где

$$\eta_i(y_i) = -l_i/2 + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Доказательство проводится индукцией по размерности m. При $m=1$ множество $\widehat{Y} = Y_1$ покрывается одной цепью $0, 1, \ldots, l_1$, причем условия 2 и 3 из определения симметричного покрытия, очевидно, выполняются.

Допустим, что утверждение о возможности симметричного покрытия $\widehat{Y}$ при (3) верно для некоторого $m = k - 1 \geqq 1$, и покажем, что оно верно и для $m = k$.

Введем обозначения:

$$Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_j = Y^{[j]}, \qquad \sum_{i=1}^{j} \eta_i = \eta^j, \quad j = k-1, k.$$

Для каждого $j \in Y_k$ множество $Y^{[k-1]} \times \{j\}$ — это совокупность всех пар вида (y^{k-1}, j), где $y^{k-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}) \in Y^{[k-1]}$. Поэтому симметричное покрытие цепями множества $Y^{[k-1]}$ существующее по предположению при η^{k-1} индуцирует покрытие и множества $Y^{[k-1]} \times \{j\}$ цепями, обладающее, очевидно, свойствами 1 и 2 симметричного покрытия. Однако цепи индуцированного покрытия не являются η^k-центрированными: для них

$$\eta^{k^*} = \eta^{(k-1)^*} + \eta_k(j) = 0 + \eta_k(j) = \eta_k(j). \tag{5}$$

Рассмотрим множества $Y^{[k-1]} \times \{0\}$, $Y^{[k-1]} \times \{1\}, \ldots$ $\ldots, Y^{[k-1]} \times \{l_k\}$. Так как покрытие цепями множеств $Y^{[k-1]} \times$ $\times \{j\}$ построено по одному и тому же принципу, то каждой цепи из любого множества $Y^{[k-1]} \times \{j\}$ соответствует некоторая цепь во всяком множестве $Y^{[k-1]} \times \{r\}$, $r \neq j$. Это условно изображено на рис. 6, *а*).

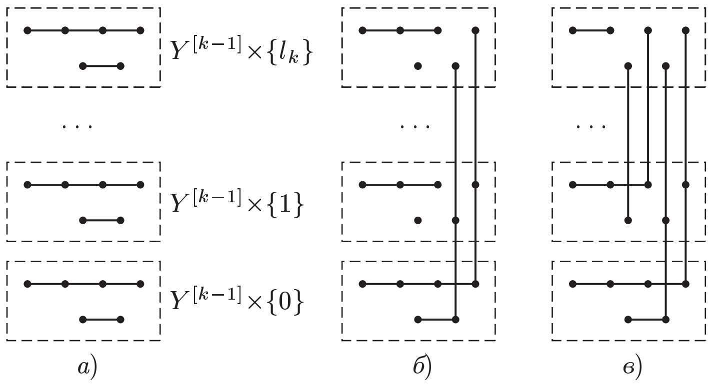

Рис. 6

Удлиним каждую цепь из $Y^{[k-1]} \times \{0\}$ на l_k, добавив к ней максимальные точки всех соответствующих ей цепей из $Y^{[k-1]} \times \{1\}, \ldots, Y^{[k-1]} \times \{l_k\}$, одновременно укорачивая все цепи в перечисленных множествах на 1 (рис. 6, *б*). Далее удлиним каждую укороченную цель из $Y^{[k-1]} \times \{1\}$ на $l_k - 1$, добавляя к ней максимальные точки соответствующих укороченных цепей из $Y^{[k-1]} \times \{2\}, \ldots, Y^{[k-1]} \times \{l_k\}$, одновременно укорачивая цепи в этих множествах еще на 1 (рис. 6, в)). Аналогично будем действовать и дальше, переходя от множества $Y^{[k-1]} \times \{j\}$ к $Y^{[k-1]} \times \{j+1\}$, пока не реализуется одна из двух возможностей:

а) последняя укороченная цепь длины 1 оказалась в очередном множестве $Y^{[k-1]} \times \{t\}$, $t < l_k$, и она удлинена на $l_k - t$ (таких цепей может быть несколько);

б) последняя укороченная цепь осталась во множестве $Y^{[k-1]} \times \{l_k\}$ (таких цепей может быть несколько).

В итоге получим некоторое разбиение множества $Y^{[k]}$ на цепи. Остается показать, что это разбиение — симметричное покрытие $Y^{[k]}$ цепями при η^k.

Условия 1 и 2 определения симметричного покрытия, очевидно, выполняются. Проверим условие 3. Понятно, что при отбрасывании максимальной точки из цепи исходного покрытия $Y^{[k]}$ ее η^k-центр уменьшается на $1/2$, а при добавлении — увеличивается на $1/2$. Предположим вначале, что реализовалась возможность а). В процессе перестройки покрытия при рассмотрении каждого очередного множества $Y^{[k-1]} \times \{j\}$, $j \leqq t$, всякая оставшаяся в нем укороченная цепь уменьшилась всего на j (j раз по 1), а затем удлинилась на $l_k - j$. Так как до перестройки согласно (4) и (5) η^k-центр этой цепи был равен $-l_k/2 + j$, то после перестройки η^k-центр полученной из нее цепи равен

$$-\frac{l_k}{2} + j - \frac{j}{2} + \frac{l_k - j}{2} = 0.$$

Таким образом, всякая цепь покрытия является η^k-центрированной.

Предположим, наконец, что реализовалась возможность б). Точно так же, как и в предыдущем случае, проверяется, что всякая цепь, полученная из цепей множеств $Y^{[k-1]} \times \{j\}$, $j < l_k$, является η^k-центрированной. Остается рассмотреть укороченные цепи из $Y^{[k-1]} \times \{l_k\}$. Каждая такая цепь была получена из некоторой исходной цепи, η^k-центр которой согласно (5) и (4) был равен $l_k/2$, укорачиванием l_k раз на 1. Следовательно, ее η^k-центр равен $l_k/2 - l_k/2 = 0$, т. е. она центрирована. ■

Согласно лемме 1 множество (2) является максимальным независимым множеством. Для весовой функции (3) условие $-1/2 \leqq \eta(y) < 1/2$ равносильно условию

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \mathrm{Ent}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} l_i\right], \tag{6}$$

где через $\mathrm{Ent}[z]$ обозначена целая часть числа z. Это означает, что искомое число $w = |W|$ равно числу $N_m(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ целочисленных решений уравнения (6) при ограничениях

$$0 \leqq y_i \leqq l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Для произвольного множества $Y \subseteq \widehat{Y}$ справедлива точная оценка*

$$|P(Y)| \leqq N_m(l_1, l_2, \ldots, l_m). \tag{8}$$

Число $N_m(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ согласно (6) и (7) на языке комбинаторного анализа можно интерпретировать как число способов размещения $n = \mathrm{Ent}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} l_i\right]$ одинаковых предметов по m различным ячейкам, причем емкость i-й ячейки равна l_i. Следовательно, это число равно коэффициенту при t^n в разложении производящей функции вида [91]:

$$F_m(t; l_1, l_2, \ldots, l_m) = \prod_{i=1}^{m}(1 + t + \ldots + t^{l_i}). \tag{9}$$

Для вычисления числа $N_m(l_1, \ldots, l_m)$ в [15] приведена довольно сложная формула. Там же указано, что в случае $l_1 = l_2 = \ldots = l_m = l$ число $N_m(l) = N_m(l, \ldots, l)$ может быть найдено подсчетом коэффициента при t^n, где $n = \mathrm{Ent}[l/2]$, в разложении производящей функции [см. (9)]

$$F_m(t; l) = (t + t + \ldots + t^l)^m$$

или вычислено по формуле [91, с. 126]

$$N_m(l) = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_m^r C_{m+n-r(l+1)-1}^{n-r(l+1)} = \sum_{r=0}^{\gamma}(-1)^r C_m^r C_{m+n-r(l+1)-1}^{n-r(l+1)}, \tag{10}$$

где $\gamma = \mathrm{Ent}\left[\dfrac{n}{l+1}\right]$. В частности, если $l = 1$, т. е. если $\widehat{Y}$ — булев m-мерный куб, то $n = \mathrm{Ent}\left[\dfrac{m}{2}\right]$ и формула (10) указывает хорошо известное выражение для ширины такого куба

$$N_m(1) = C_m^n.$$

В этом легко убедиться, если учесть, что $N_m(1)$ — коэффициент при t^n в разложении производящей функции $F_m(t; 1) = (1 + t)^m$.

2. Перейдем к рассмотрению слабо эффективных точек. Будем по-прежнему считать, что $\widehat{Y}$ — m-мерная целочисленная решетка (1).

Т е о р е м а 2. *Для произвольного множества $Y \subseteq \widehat{Y}$ справедлива точная оценка*

$$|S(Y)| \leqq \prod_{i=1}^{m}(l_i + 1) - \prod_{i=1}^{m} l_i. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau : \widehat{Y} \to \widehat{Y}$ — отображение, вводимое по следующему правилу:

$$\tau(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \\ = \bigl(y_1 + \min_{i \in M}(l_i - y_i), y_2 + \min_{i \in M}(l_i - y_i), \ldots, y_m + \min_{i \in M}(l_i - y_i)\bigr).$$

Если для некоторого $i \in M$ выполнено $y_i = l_i$, то $\min\limits_{i \in M}(l_i - y_i) = 0$ и $\tau(y_1, y_2, \ldots, y_m) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Далее, из определения отображения τ следует, что для любого $Y \subseteq \widehat{Y}$ множество $\tau(Y) = \bigcup\limits_{y \in Y} \tau(y)$ состоит из точек, по крайней мере одна координата которых принимает свое наибольшее значение ($y_j = l_j$ для некоторого $j \in M$). Поэтому все точки множества $\tau(Y)$ несравнимы между собой по отношению $>$. Кроме того, если двум различным точкам y^i, $y^j \in Y$ соответствует одна и та же точка из $\tau(Y)$, то либо $y^i > y^j$, либо $y^j > y^i$. Следовательно, для произвольного множества $Y \subseteq \widehat{Y}$

$$|S(Y)| \leqq |\tau(Y)| \leqq |\tau(\widehat{Y})| = \mathrm{T}.$$

Понятно, что Т — это число тех точек из $\widehat{Y}$, у которых по крайней мере одна координата принимает свое наибольшее значение. Найдем это число. Решетка $\widehat{Y}$ содержит $\prod\limits_{i=1}^{m}(l_i + 1)$ точек. А число точек, ни одна из координат которых не принимает своего наибольшего значения, есть $\prod\limits_{i=1}^{m} l_i$. Поэтому $\mathrm{T} = \prod\limits_{l=1}^{m}(l_i + 1) - \prod\limits_{i=1}^{m} l_i$. ■

Если $l_i = l$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то (11) принимает вид

$$|S(Y)| \leqq (l+1)^m - l^m.$$

Отсюда в частном случае $l = 1$ (т. е. когда координаты точек y являются булевыми) получаем

$$|S(Y)| \leqq 2^m - 1 = |\widehat{Y}| - 1.$$

Эта оценка очевидна: в булевом m-мерном гиперкубе не является слабо эффективной лишь одна точка, все координаты которой — нули.

3. Рассмотрим следующую вероятностную модель генерирования конечного множества $Y \subset E^m$, содержащего N точек. Пусть $\widetilde{y}$ — случайный вектор, компоненты которого $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots \ldots \widetilde{y}_m$ — независимые случайные величины, и F_i — функции распределения $\widetilde{y}_i$. Точки $y^1, y^2, \ldots, y^N$, полученные в результате реализаций вектора $\widetilde{y}$ (т. е. являющиеся выборкой N значений этого вектора), и образуют множество Y. Следовательно, числа $|P(Y)|$ и $|S(Y)|$ эффективных и слабо эффективных точек этого множества оказываются случайными величинами. Наша цель состоит в исследовании и получении формул для математических ожиданий этих случайных величин.

Будем предполагать, что все функции распределения F_i непрерывны. Тогда вероятность того, что две одноименные координаты произвольных точек y^j и y^k совпадут (т. е. при некоторых $j \neq k$ и i окажется справедливым равенство $y_i^j = y_i^k$) равна нулю. Отсюда следует, что числа эффективных и слабо эффективных точек множества Y равны почти наверное, так что $\mathsf{E}[|P(Y)|] = \mathsf{E}[|S(Y)|]$. Поэтому в дальнейшем будем вести речь лишь о случайной величине $|P(Y)|$.

Кроме того, из непрерывности функций F_i следует, что достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда при каждом $i \in M$ компоненты $y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^N$ можно строго ранжировать, т. е. записать равенства

$$y_i^{j_1} > y_i^{j_2} > \cdots > y_i^{j_N}, \tag{12}$$

где $\langle j_1, j_2, \ldots, j_N \rangle$ — некоторая перестановка множества $\{1, 2, \ldots \ldots, N\}$. Следовательно, каждой точке y^j можно поставить в соответствие ранговый вектор r^j, где r_i^j — ранг компоненты y_i^j в (12), т. е. номер занимаемого ею места, отсчитываемый справа. Например, если при $N = 3$ и $i = 2$ неравенства (12) имеют вид $y_2^3 > y_2^1 > y_2^2$, то $r_2^3 = 3$, $r_2^1 = 2$, $r_2^2 = 1$.

Нетрудно понять, что для выделения $P(Y)$, а значит, и для подсчета числа $|P(Y)|$, достаточно знания не самих точек y^j, а лишь ранговых векторов r^j. Поскольку точки y_i^j являются реализациями одной и той же случайной величины, то из соображений симметрии ясно, что вероятность получения любой перестановки $\langle j_1, j_2, \ldots, j_N \rangle$, соответствующей неравенствам (12) при произвольном фиксированном $i \in M$, одна и та же и равна $\dfrac{1}{N!}$. Отсюда сразу следует, что вероятность события $r_i^j = k$ для этого i, где k — произвольное заданное число из $\{1_1 2, \ldots, N\}$ равна $\dfrac{1}{N}$. Все это означает, что распределение случайной величины $|P(Y)|$ не зависит от конкретного вида распределений случайных величин $\widetilde{y}_i$ (т. е. вида функций F_i) и определяется лишь числами m и N. Поэтому для математического ожидания числа эффективных точек $\mathsf{E}[|P(Y)|]$ можно ввести обозначение $E_N(m)$.

Т е о р е м а 3. *Справедливо соотношение*

$$E_N(m) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} E_k(m-1), \quad E_N(1) = 1. \tag{13}$$

Доказательство [128]. Так как вероятность выполнения равенств $y_i^p = y_i^k$, $p \neq k$ точек из Y, равна нулю, то будем полагать, что координаты $y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^N$ попарно различны $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Поскольку число эффективных точек не меняется от перенумерации точек множества Y, то можно считать, что
$$y_m^1 > y_m^2 > \ldots > y_m^N. \tag{14}$$
Поэтому при $m = 1$, очевидно, $E_N(m) = 1$.

Рассмотрим случай $m > 1$. Обозначим через $p(N, m)$ вероятность того, что наугад выбранная точка из Y эффективна. Как уже отмечалось, вероятность наугад выбранной точки из Y быть k-й в (14) (т. е. y^k) равна $1/N$.

Введем в рассмотрение векторы $z^j = (y_1^j, y_2^j, \ldots, y_{m-1}^j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. В силу (14) $y_m^k > y_m^j$ при $j = k+1, \ldots, N$ и $y_m^j > y_m^k$ при $j = 1, \ldots, k-1$. Следовательно, y^k эффективна в том и только том случае, если вектор z^k эффективен во множестве $\{z^1, z^2, \ldots, z^k\} \subset E^{m-1}$. А вероятность последнего события есть $p(k, m-1)$. Следовательно, вероятность того, что точка из Y, выбранная наугад, будет k-й и эффективной, равна $p(k, m-1)/N$. Поэтому по формуле полной вероятности
$$p(N, m) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p(k, m-1). \tag{15}$$

Учтя, что $E_N(m) = Np(N, m)$ и $E_k(m-1) = kp(k, m-1)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, из (15) сразу получаем (13). ■

При помощи (13) для небольших N и m можно легко подсчитать среднее число эффективных решений.

Когда N велико, вычисление среднего значения усложняется. Для $m=2$ из (13) получаем следующую асимптотическую формулу:
$$E_N(2) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim \ln N + C,$$
где $C = 0,5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

Таким образом, среднее число эффективных точек в случае $m = 2$ растет как натуральный логарифм числа N.

Если $m = 3$, то несложно проверить справедливость следующей асимптотической оценки:
$$E_N(3) \sim \frac{1}{2} \ln^2 N$$
при $N \to \infty$.

Вообще, для фиксированного m при $N \to \infty$ имеет место формула (см. [5, 7]):

$$E_N(m) \sim \frac{1}{(m-1)!} \ln^{m-1} N,$$

которая свидетельствует о том, что среднее число эффективных точек растет как $(m-1)$-я степень натурального логарифма числа N допустимых решений. Эту формулу можно использовать для приближенной оценки числа эффективных точек, если N достаточно велико.

Теорема 4. *Справедлива точная формула*

$$E_N(m) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{(k+1)^m}. \tag{16}$$

Доказательство. Рекуррентное соотношение (13) можно переписать следующим образом:

$$E_N(m) = \frac{1}{N} E_N(m-1) + E_{N-1}(m).$$

Докажем, что (16) является решением этого разностного уравнения. Действительно,

$$\frac{1}{N} E_N(m-1) + E_{N-1}(m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-I}^k}{(k+1)^{m-1}} + (N-1) \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^k \frac{C_{N-2}^k}{(k+1)^m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{(k+1)^{m-1}} + \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^k \frac{C_{N-1}^{k+1}}{(k+1)^{m-1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k + c_{N-1}^{k+1}}{(k+1)^{m-1}} + (-1)^{N-1} \frac{C_{N-1}^{N-1}}{N^{m-1}} =$$

$$= N \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{(k+1)^m} + N(-1)^{N-1} \frac{C_{N-1}^{N-1}}{N^m} =$$

$$= N \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{(k+1)^m} = E_N(m).$$

Кроме того,

$$N \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k C_N^{k+1} = 1,$$

т. е. начальное условие в (13) выполнено. ■

Пусть N фиксировано и $m \to \infty$. Из (16) вытекает равенство

$$E_N(m) = N + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \frac{C_{N-1}^k}{(k+1)^m}.$$

Предел выражения под знаком суммы при $m \to \infty$ равен нулю. Следовательно,

$$E_N(m) \sim N,$$

т. е. при достаточно большой размерности m (большом числе критериев) среднее число эффективных точек незначительно отличается от общего фиксированного числа N допустимых точек.

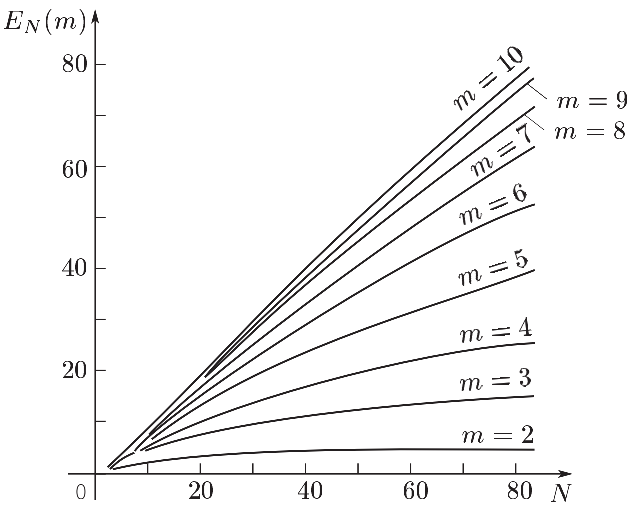

Рис. 7

На рис. 7, взятом из [7], приведены кривые зависимостей величины $E_N(m)$ от N и m для $N = 10, 20, \ldots, 80$ и $m = 2, 3, \ldots, 10$.

§ 3.5. О построении множества эффективных решений и проверке эффективности выделенного решения

Проблема отыскания всех эффективных решений (оценок) представляет не только теоретический, но и большой практический интерес. Это объясняется тем, что построение всего множества эффективных решений или же некоторого достаточно широкого его подмножества, как уже указывалось в § 1.5, является одним из первых этапов в целом ряде процедур оптимального выбора при многих критериях. В настоящее время разработано уже достаточно большое число различных методов выделения множества эффективных решений *). Подробное изложение этих методов выходит за рамки данной книги. Поэтому мы ограничимся лишь очень кратким обсуждением проблемы и указанием работ, в которых излагаются соответствующие методы и алгоритмы.

1. Подавляющее большинство методов построения множества эффективных решений основано на тех или иных условиях оптимальности. Чаще всего используются необходимые условия, состоящие в том, что если точка x^0 эффективна (в том или ином смысле), то она является решением задачи максимизации или минимизации (возможно, при некоторых дополнительных ограничениях) числовой функции специального вида при надлежащим образом назначенных величинах параметров, входящих в эту функцию и (или) ограничения. Следовательно, задача выделения всех эффективных решений сводится к соответствующей скалярной параметрической задаче математического программирования. Такую замену задачи с векторным критерием параметрическим семейством обычных экстремальных задач часто называют *скаляризацией* (исходной задачи). Если используемые условия оптимальности являются и достаточными, то множество решений параметрической задачи является искомым множеством эффективных решений. В противном случае построенное путем скаляризации множество может содержать «лишние» точки, которые следует выявить и отсеять.

Например, в общем случае (если все f_i положительны) множество слабо эффективных решений $S_f(X)$ согласно теореме 2.1.1 совпадает с множеством решений параметрической задачи максимизации на X функции

$$\min_{i \in M} \mu_i f_i(x)$$

при $\mu \in$ M. Указанный способ скаляризации разбирается, например, в работах [19, 21, 77, 125, 156].

Множество слабо эффективных решений, как показывают теорема 2.1.5 и пример 2.1.1, можно выделить, решая параметрическую задачу максимизации на X функции f_l при условии

*) Однако сразу следует отметить, что современный арсенал таких методов пока еще далеко не обеспечивает практических запросов. Исключение составляют, пожалуй, лишь группы методов, разработанных для двухкритериальных и линейных многокритериальных задач.

$f_i(x) \geqq t_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $i \neq l$, для $t_i \in Y$, $i \in M$. Такой подход анализируется в работах [31–33, 76, 77, 133, 135, 162, 166, 191, 193–196, 206, 227]. Заметим, что если X выпукло, а f квазивогнута, то обе рассмотренные параметрические задачи являются квазивогнутыми. При построении $P_f(X)$ в последней задаче удобнее брать ту функцию f_l, которая достигает максимума в единственной точке (см. теорему 2.1.8), например, строго квазивогнутую функцию (разумеется, если таковая среди функций f_i имеется).

Скаляризация многокритериальных задач при помощи функций вида $\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(\mu_i f_i)^s\right]^{1/s}$, где $s \geqq 1$, $\mu \in \mathrm{M}$, разбирается в статьях [17, 55, 158].

Для вогнутых многокритериальных задач согласно теореме 2.2.2 $S_f(X)$ совпадает со множеством решений параметрической задачи вогнутого программирования, состоящей в максимизации на X функции $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$ при $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$. Если заменить $\overline{\mathrm{M}}$ на M, то таким путем будет выделено множество собственно эффективных решений (теорема 2.2.4). Указанный подход берет свое начало со статей [155, 159].

Примечание. Скаляризацией называют также «свертывание» векторного критерия $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ в одну числовую функцию $F(\mu, f)$ (именуемую обобщенным, агрегированным или глобальным критерием), сводящее исходную многокритериальную задачу к однокритериальной. В F положительные числа μ_i, образующие вектор μ, характеризуют относительную важность критериев f_i и называются их коэффициентами важности, или относительными весами. Если допустить существование обобщенного критерия для рассматриваемой задачи, то встают вопросы: как установить вид функции F и как найти величины коэффициентов μ_i. На практике вид F часто назначается без каких-либо серьезных обоснований [96]. Следует, однако, подчеркнуть, что конкретизация вида обобщенного критерия часто настолько сужает множество выбора, т. е. далеко не для всякого эффективного решения могут существовать такие μ_i, при которых оно максимизирует F.

Для примера рассмотрим наиболее широко распространенный обобщенный критерий — «линейную свертку» $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i f_i$. Если исходная многокритериальная задача — вогнутая, то согласно теореме 2.2.4 любая собственно эффективная (т. е. по теореме 3.1.8

«почти любая» эффективная) оценка может еще быть выделена как оптимальная. В противном случае множество выбора может сильно сократиться, а то и вовсе оказаться пустым.

Это положение иллюстрирует следующий пример: $n = 1$, $m = 2$, $X = E$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^{-x}$. Здесь $P_f(X) = E$, т. е. каждое решение является эффективным. Однако какие положительные «веса» μ_1 и μ_2 ни взять, задача максимизации функции $\mu_1 x + \mu_2 e^{-x}$ решений иметь не будет, так как эта функция не ограничена сверху на E. Если же в качестве X взять, например, отрезок $[a, b]$, то максимизация указанной функции на этом отрезке при произвольных фиксированных положительных μ_1 и μ_2 будет приводить либо к $x = a$, либо к $x = b$, хотя каждая точка отрезка $[a, b]$ эффективна.

Такое положение объясняется тем, что в общем случае каждая эффективная точка x^0 характеризуется своим собственным набором уже не постоянных, а функциональных коэффициентов $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_m(x)$, при которых имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i(x) f_i(x^0) \geqq \sum_{i=1}^{m} \mu_i(x) f_i(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X$$

(см. переформулировку эффективности в п. 2 из § 2.1). И для невогнутых задач совсем не обязательно, чтобы эти функциональные коэффициенты были константами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

Для линейных задач разобранная скаляризация при $\mu \in \mathrm{M}$ позволяет, как указывает лемма 2.2.4, построить в точности множество $P_f(X)$ [36, 155, 77, 149, 186]. Однако практически обычно удобнее использовать специальные методы, являющиеся прямым обобщением известного симплекс-метода линейного программирования [105] на многокритериальный случай. Методам и алгоритмам такого рода посвящена уже довольно обширная литература [34, 36, 121, 142–145, 147, 151, 152, 174, 208, 210, 250, 252, 253]. Способ построения множества $P_f(X)$, основанный на решении систем линейных неравенств, определяемых «полным» набором конечного числа эффективных точек (т. е. содержащим точку из каждой гиперграни X, входящей в $P_f(X)$), разбирается в статье [139]. Для двухкритериальных линейных задач удобный способ последовательных приближений описан в [134].

Для отдельных важных классов линейных многокритериальных задач разработаны специальные методы, представляющие собой развитие методов решения соответствующих задач линейного программирования. Например, методы построения множества эффективных планов перевозок в транспортных многокритериальных задачах изложены в [108, 165, 177, 225].

Вопросы решения многокритериальных задач квадратичного программирования разбираются в статьях [209, 219], а геометрического — в [205, 213].

Методы и алгоритмы решения дискретных (точнее, конечных) многокритериальных задач, основанные на идеях «просеивания» решений, предложены в работах [18, 13, 212]. Алгоритм, использующий специальную процедуру построения последовательности решений, описан в [44]. Вопросы выделения эффективных решений при помощи параметрической задачи максимизации функции $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i f_i$ рассмотрены в статье [127]. Методы решения многокритериальных задач с булевыми переменными излагаются в работах [119, 120, 138, 215]. Статья [40] посвящена полиматричной задаче коммивояжера, а [180] и [239] — задачам составления расписаний. В [188] приведены некоторые оценки сложности задачи выделения максимальных точек из конечного множества.

Вопросы анализа чувствительности эффективных решений к изменению параметров задачи рассматриваются в работах [152, 167, 185, 203]. Методы регуляризации множества эффективных решений изложены в [35, 58] и [96, гл. 8].

Методы приближенного построения (аппроксимации) множества эффективных оценок с оценкой точности в двухкритериальных задачах разработаны в [87, 211]. Аппроксимация множества эффективных точек, состоящая в приближенном представлении множества X сложной структуры конечным числом специальным образом равномерно распределяемых точек и последующим выделением из них недоминируемых, рассматривается в [97].

2. Необходимость проверки эффективности решения может вызываться различными причинами. Например, такая проверка необходима, если решение выделено процедурой, относительно которой неизвестно, приводит ли она к получению лишь эффективных решений или может выделять и неэффективные. Проверка эффективности решений может осуществляться и при скаляризации, основанной на необходимых, но не достаточных условиях эффективности.

Нередко возникает необходимость проверки эффективности решения, которое уже было выбрано (назначено) по каким-либо соображениям или даже ранее использовалось. При этом целью проверки является выяснение принципиальной возможности улучшения рассматриваемого решения и, если такая возможность имеется, получения эффективного решения, более предпочтительного, чем исходное.

Для проверки эффективности решения можно использовать подходящие условия оптимальности, изложенные во второй главе. Как обычно, если для проверки используются необходимые условия и оказывается, что рассматриваемое решение им удовлетворяет, то гарантировать его эффективность нельзя. Однако если эти условия не выполняются, то решение неэффективно. Если для проверки используются достаточные условия, то решение, удовлетворяющее им, эффективно. Если же такие условия не выполняются, то вопрос об эффективности решения остается открытым. Наконец, если для проверки применяются необходимые и достаточные условия, то проверяемое решение эффективно в том и только том случае, когда оно этим условиям удовлетворяет.

Среди всех условий главы 2 специально отметим лишь условия, сформулированные в примере 2.1.7. Эти условия эффективности являются необходимыми и достаточными. Следовательно, проверяемое решение x^0 эффективно тогда и только тогда, когда оно максимизирует

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \tag{1}$$

на множестве

$$\bigl\{x \in X \mid f_i(x) \geqq f_i(x^0), \ \ i = 1, 2, \ldots, m\bigr\}. \tag{2}$$

Весьма ценно то, что в случае, когда решение x^0 неэффективно, максимизация функции (1) на множестве (2) приводит к получению эффективного решения x^*, которое более предпочтительно, чем x^0, т. е. $f(x^*) \geq f(x^0)$ (см. [77, 241]). Подчеркнем, что если исходная многокритериальная задача вогнута (линейна), то задача максимизации (1) на множестве (2) оказывается задачей вогнутого (соответственно линейного) программирования.

Г Л А В А 4

ДВОЙСТВЕННЫЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вопросы двойственности для многокритериальных задач значительно сложнее аналогичных вопросов для задач с одним критерием. Дело в том, что понятие двойственности в многокритериальной оптимизации основано на соотношении максимальных и минимальных элементов в частично упорядоченных множествах, в отличие от двойственности в обычной теории оптимизации [24], где двойственность связана с совпадением максимальных и минимальных элементов линейно упорядоченных множеств на вещественной прямой. Этот переход от линейно упорядоченных множеств на прямой к множествам в евклидовом пространстве при изучении двойственности оказывается нетривиальным. Грубо говоря, в скалярном случае для получения совпадения решений прямой и двойственной задач достаточно убедиться в отсутствии «разрыва» между множествами образов решений прямой и двойственной задач. Если такого «разрыва» нет, то указанные множества образов «склеиваются» в точке, которая дает одновременно решение прямой и двойственной задач. В многокритериальном случае этого «склеивания» прямого и двойственного множеств недостаточно; двойственная конструкция должна быть такой, чтобы прямое и двойственное множества «склеивались» в точности своими множествами максимальных и минимальных элементов.

Имеющиеся публикации, посвященные двойственности в многокритериальной оптимизации, условно можно разбить на две группы. В первой группе работ [67, 154, 173, 175, 176, 185, 214, 218, 232] двойственность так или иначе связана с определенного типа функциями Лагранжа. Во второй группе работ [164, 234, 254] двойственность изучается с использованием аппарата сопряженных функций и имеющиеся здесь результаты представляют собой дальнейшее обобщение теории двойственности Фенхеля. Не касаясь работ второго направления, в данной главе на основе результатов авторов [67, 84] предлагается такая конструкция двойственности, в рамки которой в той или иной степени укладываются подходы первой группы работ.

В первом параграфе этой главы рассматриваются общетеоретические вопросы о седловых точках, максиминах и минимаксах векторных функций. Во втором параграфе вводится общая конструкция двойственных многокритериальных задач. Третий и четвертый параграфы посвящены вопросам двойственности соответственно для вогнутых и линейных многокритериальных задач.

§ 4.1. Седловые пары, максимины и минимаксы векторных функций

Классическая теория двойственности в математическом программировании широко использует понятия седловой пары, максимина и минимакса числовой функции. В этом параграфе аналогичные понятия, необходимые для развития теории двойственности многокритериальной оптимизации, вводятся для векторных функций.

1. Пусть векторная функция $K(x, y) = (K_1(x, y), K_2(x, y), \ldots \ldots, K_m(x, y))$ определена на декартовом произведении $X \times Y$ (здесь и далее в этом параграфе непустые множества X и Y могут иметь произвольную природу).

Вектор $(x^0, y^0) \in X \times Y$ будем называть:
сильной седловой парой, если

$$K(x, y^0) \leqq K(x^0, y^0) \leqq K(x^0, y) \text{ для всех } x \in X, \quad y \in Y; \tag{1}$$

сильно-слабой седловой парой, если

$$K(x, y^0) \overline{\overline{\lessgtr}} K(x^0, y^0) \leqq K(x^0, y) \text{ для всех } x \in X, \quad y \in Y; \tag{2}$$

слабо-сильной седловой парой, если

$$K(x, y^0) \leqq K(x^0, y^0) \overline{\overline{\lessgtr}} K(x^0, y) \text{ для всех } x \in X, \quad y \in Y; \tag{3}$$

слабой седловой парой, если

$$K(x, y^0) \overline{\overline{\lessgtr}} K(x^0, y^0) \overline{\overline{\lessgtr}} K(x^0, y) \text{ для всех } x \in X, \quad y \in Y. \tag{4}$$

Согласно определению отношений $\geq$ и $\overline{\overline{\gtrless}}$ (§ 1.2) выполнение соотношения $K(x, y^0) \overline{\overline{\lessgtr}} K(x^0, y^0)$ при всех $x \in X$ означает, что соотношение $K(x^0, y^0) \geq K(x, y^0)$ не выполняется ни при каком

$x \in X$. Аналогично выполнение соотношения $K(x^0, y^0) \overset{=}{<} K(x^0, y)$ при всех $y \in Y$ означает, что соотношение $K(x^0, y^0) \geq K(x^0, y)$ не выполняется ни при каком $y \in Y$.

Понятно, что всякая сильная седловая пара является седловой в смысле (2)–(4), а всякая полусильная (сильно-слабая или слабо-сильная) седловая пара является также и слабой. Сильная седловая пара — это обычная седловая точка одновременно всех компонент вектор-функции K: (1) справедливо тогда и только тогда, когда при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ выполняются неравенства $K_i(x, y^0) \leqq K_i(x^0, y^0) \leqq K_i(x^0, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. В связи с этим ясно, что существуют сильные седловые пары довольно редко.

Введем в рассмотрение следующие четыре множества:

$$Q^1 = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \bigl\{q \in E^m \mid q \leqq K(x, y)\bigr\},$$

$$Q^2 = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} \bigl\{q \in E^m \mid q \geqq K(x, y)\bigr\},$$

$$H^1 = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{y \in Y} \bigl\{h \in E^m \mid h \overset{=}{<} K(x, y)\bigr\},$$

$$H^2 = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} \bigl\{h \in E^m \mid h \overset{=}{>} K(x, y)\bigr\}.$$

Эти множества имеют естественную интерпретацию в теоретико-игровых терминах, если K означает векторную функцию выигрыша, а X и Y — множества стратегий первого и второго игроков соответственно (первый игрок стремится «максимизировать» функцию выигрыша). В этом случае Q^1 — это множество выигрышей, которые может себе гарантировать первый игрок (короче, его гарантированные выигрыши), а H^1 — множество выигрышей, которые он может не позволить ухудшить второму игроку («защищаемые» выигрыши). Аналогичный смысл имеют множества Q^1 и H^2 для второго игрока.

Непосредственно из определений введенных множеств легко получить включения $Q^1 \subseteq H^1$, $Q^2 \subseteq H^2$, которые также имеют ясный теоретико-игровой смысл.

Теорема 1. *Справедливы соотношения*

$$q^1 \leqq q^2 \quad \text{для всех} \quad q^1 \in Q^1, \quad q^2 \in Q^2; \tag{5}$$

$$q \overset{=}{<} h \quad \text{для всех} \quad q \in Q^1, \quad h \in H^2; \tag{6}$$

$$h \overset{=}{<} q \quad \text{для всех} \quad h \in H^1, \quad q \in Q^2. \tag{7}$$

Доказательство. Из определений множеств Q^1 и Q^2 имеем

$$q^1 \in Q^1 \leftrightarrow q^1 \leqq K(x^0, y) \quad \text{для некоторого} \quad x^0 \in X \quad \text{и любого} \quad y \in Y; \tag{8}$$

$$q^2 \in Q^2 \leftrightarrow K(x, y^0) \leqq q^2 \quad \text{для некоторого} \quad y^0 \in Y, \quad \text{и любого} \quad x \in X_0. \tag{9}$$

Отсюда $q^1 \leqq K(x^0, y^0) \leqq q^2$.

Для доказательства (6) предположим противное: $q \geq h$, $q \in Q^1$, $h \in H^2$. Это означает, что при некоторых $x^0 \in X$, $y^0 \in Y$ справедливо

$$K(x^0, y) \geqq q \geq h \mathrel{\overline{\overline{>}}} K(x, y^0)$$

для всех $x \in X$, $y \in Y$. При $x = x^0$, $y = y^0$ отсюда вытекает противоречие: $K(x^0, y^0) \neq K(x^0, y^0)$.

Соотношение (7) доказывается аналогично. ■

Теорема 1 показывает, что *аналогом максимина* (*минимакса*) является пара множеств Q^1 и H^1 (соответственно Q^2 и H^2), а неравенству $(m = 1)$

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) \leqq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y)$$

соответствуют свойства этих множеств (5)–(7).

2. Простейшие примеры показывают, что пары (x', y') и (x'', y''), седловые в смысле (2), (3) или (4), могут быть несравнимыми (т. е. не верно ни $K(x', y') \geqq K(x'', y'')$, ни $K(x', y') \leqq K(x'', y'')$) или доминировать одна над другой (например, $K(x', y') \geq K(x'', y'')$). А пары (x', y'') и (x'', y') могут не быть седловыми. Однако согласно нижеследующему утверждению существование сильной седловой пары накладывает существенные ограничения на структуру множеств полусильных седловых пар.

Пусть W^{ss} (соответственно W^{sw}, W^{ws}, W^{ww}) — множество сильных (соответственно остальных трех типов) седловых пар, а W_0^{sw} и W_0^{ws} (W_0^{ww}) — множества пар типов (2) и (3) (типа (4)), которые не являются сильными (полусильными).

Теорема 2. *Если $W^{ss} \neq \varnothing$, то имеют место представления*

$$W^{ss} = X^s \times Y^s, \quad W_0^{sw} = X^s \times Y^w, \quad W_0^{ws} = X^w \times Y^s$$

(когда $W_0^{sw} = \varnothing$ или $W_0^{ws} = \varnothing$, то $Y^w = \varnothing$ или $X^w = \varnothing$). При этом все сильные и полусильные седловые пары эквивалентны *), *а каждая слабая седловая пара либо эквивалентна сильной, либо несравнима с ней.*

Доказательство. Пусть (x^1, y^1) и (x^2, y^2) — две сильные седловые пары. Тогда, согласно (1)

$$K(x^1, y^2) \geqq K(x^1, y^1) \geqq K(x^2, y^1) \geqq K(x^2, y^2) \geqq K(x^1, y^2),$$

так что все пары (x^1, y^1), (x^1, y^2), (x^2, y^1), (x^2, y^2) эквивалентны. Кроме того, для (x^1, y^2) имеем

$$K(x^1, y) \geqq K(x^1, y^1) = K(x^1, y^2),$$
$$K(x, y^2) \leqq K(x^2, y^2) = K(x^1, y^2)$$

для любых $x \in X$, $y \in Y$, и поэтому (x^1, y^2) — сильная седловая пара. Аналогичный вывод получается и для (x^2, y^1). Следовательно, $W^{ss} = X^s \times Y^s$.

Пусть $(x^3, y^3) \in W_0^{sw}$. Тогда для произвольной сильной седловой пары (x^s, y^s) согласно (1)–(2) имеем

$$K(x^3, y^3) \leqq K(x^3, y^s) \leqq K(x^s, y^s) \leqq K(x^s, y^3).$$

А так как $K(x^3, y^3) \leq K(x^s, y^3)$ не имеет места, то

$$K(x^s, y^3) = K(x^s, y^s) = K(x^3, y^s) = K(x^3, y^3),$$

так что пары (x^3, y^3) и (x^s, y^s) эквивалентны, а для (x^3, y^s) верно

$$K(x^3, y) \geqq K(x^3, y^3) = K(x^3, y^s) = K(x^s, y^s) \geqq K(x, y^s)$$

при любых $x \in X$, $y \in Y$. Отсюда сразу следует $(x^3, y^s) \in W^{ss}$.

Для (x^s, y^3) при любых $x \in X$, $y \in Y$ имеем лишь

$$K(x^s, y) \geqq K(x^s, y^s) = K(x^s, y^3) \mathrel{\overline{\overline{>}}} K(x, y^3),$$

причем если для некоторого x' пары (x', y^s) и (x^3, y^3) были несравнимы (а такой элемент x' по условию найдется), то и (x', y^3) и (x^s, y^3) очевидно, также несравнимы. Поэтому $(x^s, y^3) \in W_0^{sw}$.

Предположим, что и $(x^4, y^4) \in W_0^{sw}$. Согласно (1), (2)

$$K(x^3, y^4) \geqq K(x^3, y^3) = K(x^s, y^s) \geqq K(x^4, y^s) \geqq K(x^4, y^4).$$

А так как в соответствии с (2) $K(x^3, y^4) \mathrel{\overline{\overline{<}}} K(x^4, y^4)$, то пары (x^3, y^4), (x^3, y^3) и (x^4, y^4) эквивалентны. Поэтому для любых

*) Пары (x', y') и (x'', y'') эквивалентны, когда $K(x', y') = K(x'', y'')$.

$x \in X$, $y \in Y$ можно записать

$$K(x^3, y) \geqq K(x^3, y^3) = K(x^3, y^4) \overline{\overline{>}} K(x, y^4),$$

причем если пары (x'', y^4) и (x^4, y^4) были несравнимы (такой элемент x'' по условию существует), то и (x'', y^4) и (x^3, y^4) также несравнимы. Поэтому $(x^3, y^4) \in W_0^{sw}$. Аналогично проверяется $(x^4, y^3) \in W_0^{sw}$. Следовательно, $W_0^{sw} = X^s \times Y^w$. Равенство $W_0^{ws} = X^w \times Y^s$ получается из доказанного равенства для W_0^{sw} заменой x на y, а y на x.

Наконец, если $(x^5, y^5) \in W_0^{ww}$, то предположение $K(x^5, y^5) \geq \geq K(x^s, y^s)$ приводит согласно (1) к $K(x^5, y^5) \geq K(x^5, y^s)$, а предположение $K(x^s, y^s) \geq K(x^5, y^5)$ — к $K(x^s, y^5) \geq K(x^5, y^5)$. Любое из этих неравенств противоречит (4). ■

3. Взаимосвязь между значениями вектор-функции K на седловых парах и множествами Q^1, Q^2, H^1 и H^2 устанавливает

Теорема 3. *Справедливо включение*

$$K(W^{ww}) \subseteq H^1 \cap H^2 \tag{10}$$

и равенства

$$K(W^{ss}) = Q^1 \cap Q^2, \quad K(W^{sw}) = Q^1 \cap H^2, \quad K(W^{ws}) = H^1 \cap Q^2, \tag{11}$$

причем

а) *всякий элемент $z^{ss} \in K(W^{ss})$ является наибольшим во множестве Q^1, максимальным во множестве H^1, наименьшим в Q^2 и минимальным в H^2;*

б) *всякий элемент $z^{sw} \in K(W^{sw})$ является максимальным в Q^1 и минимальным в H^2;*

в) *всякий элемент $z^{ws} \in K(W^{ws})$ является минимальным в Q^2 и максимальным в H^1.*

Заметим, что утверждения а)–в) теоремы почти целиком вытекают из результатов работы [92].

Доказательство. Опираясь непосредственно на определения (1)–(4), можно легко установить включения

$$K(W^{ww}) \subseteq H^1 \cap H^2, \quad K(W^{ss}) \subseteq Q^1 \cap Q^2,$$
$$K(W^{sw}) \subseteq Q^1 \cap H^2, \quad K(W^{ws}) \subseteq Q^2 \cap H^1.$$

Например, если $z^{sw} = K(x^s, y^w)$, то согласно первому неравенству (2) $z^{sw} \leqq K(x^s, y)$ для всех $y \in Y$, и поэтому $z^{sw} \in Q^1$.

Аналогично, из второго соотношения (2) следует $z^{sw} \gtreqqless K(x, y^w)$ для всех $x \in X$, что влечет $z^{sw} \in H^2$.

Докажем требуемые обратные включения. Пусть $q^* \in Q^1 \cap Q^2$. При $y = y^0$ и $x = x^0$ из (8)–(9) для $q^0 = K(x^0, y^0)$ получаем $q^0 \geqq q^* \geqq q^0$, так что $q^0 = q^*$. Поэтому из (8), (9) сразу следует, что (x^0, y^0) — сильная седловая пара. Таким образом, $K(W^{ss}) \supseteq \supseteq Q^1 \cap Q^2$.

Далее, для $q^* \in Q^1 \cap Q^2$, $q^1 \in Q^1$, $q^2 \in Q^2$, $h^1 \in H^1$, $h^2 \in H^2$ по теореме 1 имеем $q^* \geqq q^1$, $q^* \leqq q^2$, $q^* \gtreqqless h^1$, $q^* \lesseqqgtr h^2$. Поэтому элемент q^* является наибольшим в множестве Q^1, наименьшим в Q^2, максимальным в H^1 и минимальным в H^2. Утверждение а) доказано.

Теперь пусть $z^* \in Q^1 \cap H^2$. Для $y = y^0$ и $x = x^0$ из (8) и

$$h \in H^2 \leftrightarrow h \gtreqqless K(x, y^0) \ \text{ при некотором } \ y^0 \in Y \ \text{ и каждом } \ x \in X$$

получаем $K(x^0, y^0) \geqq z^* \gtreqqless K(x^0, y^0)$, так что $K(x^0, y^0) = z^*$. Поэтому $(x^0, y^0) \in W^{sw}$. Таким образом, $K(W^{sw}) \supseteq Q^1 \cap H^2$, и, учитывая полученное ранее обратное включение, приходим к равенству $K(W^{sw}) = Q^1 \cap H^2$. Далее, для $z^* \in Q^1 \cap H^2, q \in Q^1, h \in H^2$ согласно теореме 1 имеем $z^* \gtreqqless q$ и $z^* \lesseqqgtr h$. Утверждение б) доказано.

Для слабо-сильной седловой пары доказательство проводится аналогично приведенному выше. ■

Обозначим через $\mathrm{Max}\, Q^1$ ($\mathrm{Min}\, H^2$) множество максимальных (минимальных) по $\geq$ элементов множества Q^1 (H^2). Поскольку

$$\mathrm{Max}\, Q^1 \cap \mathrm{Min}\, H^2 \subseteq Q^1 \cap H^2,$$

а по утверждению б) из теоремы 3

$$K(W^{sw}) \subseteq \mathrm{Max}\, Q^1 \cap \mathrm{Min}\, H^2,$$

то с учетом (11) можно записать

$$K(W^{sw}) = \mathrm{Max}\, Q^1 \cap \mathrm{Min}\, H^2. \tag{12}$$

Аналогичные равенства справедливы также для $K(W^{ws})$ и $K(W^{ss})$.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих доказанные теоремы. Во всех этих примерах $X = Y = \{1, 2\}$, а значения вектор-функции $K(x, y) = (K_1(x, y), K_2(x, y))$ задаются матрицей, причем x — номер ее строки, y — номер столбца.

Пример 1. Пусть вектор-функция K задана с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} (3,0) & (0,1) \\ (2,0) & (1,0) \end{Vmatrix}.$$

В этом случае имеются три седловых пары: сильно-слабая $(2,2)$, слабо-сильная $(1,1)$ и слабая $(1,2)$. Поэтому $(3,0) = K(1,1)$ — единственная точка пересечения множеств Q^2 и H^1, а $(1,0) = K(2,2)$ — единственная точка пересечения множеств Q^1 и H^2 (см. рис. 1). Заметим, что здесь $(2,0) \in H^1 \cap H^2$, так что включение (10) оказывается строгим.

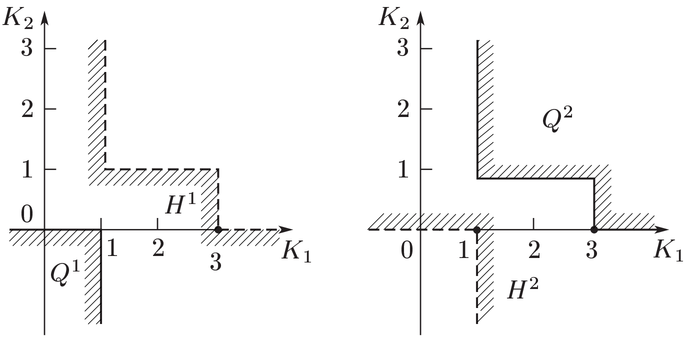

Рис. 1

Пример 2. Функция K, заданная с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (1,1) & (3,0) \end{Vmatrix},$$

имеет две седловые пары: сильную $(1,1)$ и слабую $(2,2)$. Множества Q^1 и Q^2 имеют единственную общую точку $(2,2) = K(1,1)$ (см. рис. 2).

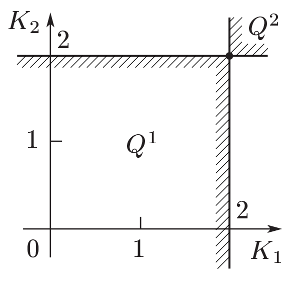

Рис. 2

Пример 3. Функция K, заданная матрицей

$$\begin{Vmatrix} (0,2) & (1,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{Vmatrix},$$

имеет две седловые пары: $(1,1)$ и $(2,2)$, и обе — слабосильные. Множества Q^2 и H^1 пересекаются в двух точках: $(0,2) = K(1,1)$ и $(2,0) = K(2,2)$, а пересечение множеств Q^1 и H^2 пусто (рис. 3).

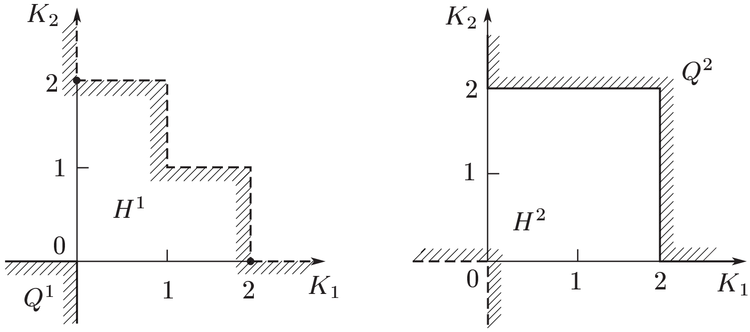

Рис. 3

Дальнейшее развитие изложенного материала в теоретико-игровых терминах можно найти в работе В. В. Подиновского [84], на основе которой и написан данный параграф.

§ 4.2. Общая конструкция двойственных задач

В этом параграфе вводится векторная функция Лагранжа и показывается, что задача отыскания эффективных решений в исходной многокритериальной задаче тесно связана с задачей отыскания седловых пар функции Лагранжа. Формулируется пара двойственных задач, которые заключаются в нахождении максимальных элементов прямого множества и минимальных элементов двойственного множества соответственно. Устанавливается, что множество решений, являющихся одновременно решениями прямой и двойственной задач, представляет собой пересечение прямого и двойственного множеств и совпадает с множеством значений функции Лагранжа на совокупности ее седловых пар.

1. Пусть, как и в предыдущих главах, вектор-функции $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ и $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ заданы на множестве $D \subseteq E^n$, а

$$X = \{x \in D \mid g(x) \geqq 0_{(k)}\}. \tag{1}$$

Введем *векторную функцию Лагранжа*

$$L(x, \lambda) = \big(f_1(x) + \langle \lambda, g(x)\rangle, f_2(x) + \langle \lambda, g(x)\rangle, \ldots \\ \ldots, f_m(x) + \langle \lambda, g(x)\rangle\big) \tag{2}$$

и рассмотрим свойства различного типа седловых пар этой функции на множестве $D \times E^k_{\geqq}$.

Т е о р е м а 1. *Для функции Лагранжа* (2) *понятия сильной и слабо-сильной, а также сильно-слабой и слабой седловых пар на* $D \times E^k_{\geqq}$ *эквивалентны:*

$$W^{ss} = W^{ws}, \quad W^{sw} = W^{ww}. \tag{3}$$

Если (x^0, λ^0) — *седловая пара* L *любого типа, то*

$$g(x^0) \geqq 0_{(k)}, \quad \langle \lambda^0, g(x^0) \rangle = 0, \tag{4}$$

так что $x^0 \in X$. *При этом если* $(x^0, \lambda^0) \in W^{ww}$, *то* x^0 — *эффективное решение* (*т. е.* $x^0 \in P_f(X)$), *а если* $(x^0, \lambda^0) \in W^{ss}$, *то* x^0 — *точка максимума на* X *каждой из функций* $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для седловой пары $(x^0, \lambda^0) \in D \times E^k_{\geqq}$ произвольного типа всегда выполняется

$$L(x^0, \lambda^0) \mathrel{\overline{\overline{<}}} L(x^0, \lambda) \text{ для всех } \lambda \in E^k_{\geqq}. \tag{5}$$

Отсюда, учитывая (2), получаем (4) и в силу (1) $x^0 \in X$. Далее, если верно (4), то, очевидно, верно и

$$L(x^0, \lambda^0) \leqq L(x^0, \lambda) \text{ для всех } \lambda \in E^k_{\geqq}. \tag{6}$$

Наконец, при выполнении (6) справедливо и (5). Следовательно, для седловой пары (x^0, λ^0) произвольного типа условия (4), (5) и (6) эквивалентны. Отсюда следуют, в частности, равенства (3). Для $(x^0, \lambda^0) \in W^{ww}$ выполнено

$$L(x^0, \lambda^0) \mathrel{\overline{\overline{>}}} L(x, \lambda^0) \text{ для всех } x \in D.$$

Согласно (4) отсюда следует, что $f(x^0) \mathrel{\overline{\overline{>}}} f(x)$ для всех $x \in X$, т. е. x^0 — эффективное решение.

Наконец, если $(x^0, \lambda^0) \in W^{ss}$, то

$$L(x^0, \lambda^0) \geqq L(x, \lambda^0) \text{ для всех } x \in D,$$

откуда в силу (4) $f_i(x^0) \geqq f_i(x)$ для каждого $i \in M$ и всех $x \in X$. ∎

Теорема 1 показывает, что слабые седловые пары функции L прямым образом связаны с эффективными решениями исходной многокритериальной задачи. В дальнейшем будем рассматривать лишь слабые седловые пары L и, ради краткости, будем просто называть их седловыми парами, а множество всех таких пар будем обозначать через W.

2. Введем множества $Q = Q^1$ и $H = H^2$ (§ 4.1), которые будем называть прямым и двойственным соответственно:

$$Q = \bigcup_{x \in D} Q(x), \qquad Q(x) = \bigcap_{\lambda \in E^k_{\geqq}} \{q \in E^m \mid q \leqq L(x,\lambda)\},$$

$$H = \bigcup_{\lambda \in E^k_{\geqq}} H(\lambda), \quad H(\lambda) = \bigcap_{x \in D} \{h \in E^m \mid h \overline{\gtrless} L(x,\lambda)\}.$$

Нетрудно проверить, что если $x \in D \backslash X$, то $Q(x) = \varnothing$, поэтому

$$Q = \bigcup_{x \in X} Q(x) = \bigcup_{x \in X} \{q \in E^m \mid q \leqq f(x)\} = Y_*, \tag{7}$$

где, как и ранее, $Y_* = Y - E^m_{\geqq}$.

Заметим также, что согласно лемме 1.2.1 множество $H(\lambda)$ можно представить и в таком виде:

$$H(\lambda) = \bigcap_{x \in D} \bigcup_{\mu \in M} \{h \mid \langle \mu, h\rangle \geqq \mathscr{L}(\mu, x, \lambda)\}, \tag{8}$$

где $\mathscr{L}$ — скалярная функция Лагранжа:

$$\mathscr{L}(\mu, x, \lambda) = \langle \mu, L(x,\lambda)\rangle.$$

Множество максимальных (минимальных) по $\geq$ элементов множества Q (множества H) будем обозначать через $\mathrm{Max}\,Q$ ($\mathrm{Min}\,H$). Теорема 3, теорема 1.3 и равенство (1.12) показывают, что множество значений функции Лагранжа L на множестве седловых пар W тесно связано с множествами $\mathrm{Max}\,Q$ и $\mathrm{Min}\,H$.

Теорема 2. *Справедливы равенства*

$$\mathrm{Max}\,Q \cap \mathrm{Min}\,H = Q \cap H = L(W). \tag{9}$$

Согласно этой теореме, если $\mathrm{Max}\,Q \subseteq \mathrm{Min}\,H$ *), то

$$\mathrm{Max}\,Q = Q \cap H = L(W);$$

если $\mathrm{Max}\,Q \supseteq \mathrm{Min}\,H$, то

$$\mathrm{Min}\,H = Q \cap H = L(W);$$

наконец, если $\mathrm{Max}\,Q = \mathrm{Min}\,H$, то

$$\mathrm{Max}\,Q = \mathrm{Min}\,H = Q \cap H = L(W). \tag{10}$$

---

*) Заметим, что в скалярном случае строгие включения $\mathrm{Max}\,Q \subset \mathrm{Min}\,H$ ($\mathrm{Max}\,Q \supset \mathrm{Min}\,H$) смысла не имеют, так как при $m = 1$ неравенство $\mathrm{Max}\,Q \cap \mathrm{Min}\,H \neq \varnothing$ влечет равенство $\mathrm{Max}\,Q = \mathrm{Min}\,H$.

3. Благодаря (7) и лемме 2.2.1 имеют место равенства

$$\mathrm{Max}\,Q = \mathrm{Max} \bigcup_{x \in X} Q(x) = \mathrm{Max}\,Y_* = P(Y), \tag{11}$$

где, как и раньше, $P(Y)$ — множество эффективных оценок исходной многокритериальной задачи.

Итак, следующие две задачи являются эквивалентными.

Прямая задача 1. *Найти множество* $\mathrm{Max}\,Q$.

Прямая задача 2. *Найти множество* $P(Y)$.

Если ввести обозначение

$$\mathop{\mathrm{Inf}}_{\lambda} L(x,\lambda) = \big(\inf_{\lambda} L_1(x,\lambda), \ldots, \inf_{\lambda} L_m(x,\lambda)\big),$$

то, как легко заметить, множество $Q(x)$ можно представить в следующем виде:

$$Q(x) = \Big\{q \in E^m \mid q \leqq \mathop{\mathrm{Inf}}_{\lambda \in E^k_{\geqq}} L(x,\lambda)\Big\}.$$

В соответствии с этим прямая задача будет заключаться в нахождении множества

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{Max}}_{x \in D} \mathop{\mathrm{Inf}}_{\lambda \in E^k_{\geqq}} L(x,\lambda) = \\ &= \mathrm{Max}\Big\{z \in \overline{E}^m | z = \mathop{\mathrm{Inf}}_{\lambda \in E^k_{\geqq}} L(x,\lambda) \ \text{ при некотором } \ x \in D\Big\}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\overline{E}^m = \overline{E} \times \overline{E} \times \ldots \times \overline{E}$ и $\overline{E}$ — расширенная числовая прямая, полученная из E добавлением символов $-\infty$ и $+\infty$. Эта формулировка прямой задачи эквивалентна приведенным выше (поскольку по определению максимальных элементов они обязаны принадлежать E^m).

Прямой задаче сопоставим следующую двойственную задачу.

Двойственная задача. *Найти множество* $\mathrm{Min}\,H$.

Построенная конструкция двойственных многокритериальных задач была предложена в работе В. Д. Ногина [67]; там же было установлено равенство $\mathrm{Max}\,Q \cap \mathrm{Min}\,H = Q \cap H$.

В скалярном случае ($m = 1$) прямая задача 1 приобретает обычный вид (см. (12)): *найти*

$$\max_{x \in D} \inf_{\lambda \in E^k_{\geqq}} L(x,\lambda).$$

А так как при этом множество $H(\lambda)$ представимо в виде

$$H(\lambda) = \big\{ h \in E \mid h \geqq \sup_{x \in D} L(x, \lambda) \big\},$$

то двойственную задачу можно сформулировать следующим образом: *найти*

$$\min_{\lambda \in E^k_{\geqq}} \sup_{x \in D} L(x, \lambda).$$

При изучении двойственных многокритериальных задач так же, как и для двойственных скалярных задач, принципиально важным является случай, когда имеет место равенство $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H$, т. е. когда каждое решение прямой задачи является решением двойственной задачи, и наоборот. При этом согласно (10) и (11) каждое из множеств $\operatorname{Max} Q$, $\operatorname{Min} H$, $Q \cap H$ и $L(W)$ совпадает со множеством эффективных оценок $P(Y)$ исходной многокритериальной задачи. Формулированию условий, при которых указанное равенство выполняется, и посвящены следующие два параграфа.

§ 4.3. Вогнутый случай

Здесь формулируются условия, при которых имеет место равенство множеств решений прямой и двойственной задач в предположении, что исходная многокритериальная задача — вогнутая. Кроме того, при дополнительном предположении дифференцируемости максимизируемой вектор-функции и вектор-функции ограничений приводится специальная формулировка двойственной задачи. Изложение материала основано на работе В. Д. Ногина [67].

1. Будем рассматривать многокритериальную задачу, в которой множество $D \subseteq E^n$ выпукло, а вектор-функции f и g вогнуты и непрерывны на D. Тогда множество допустимых решений X вида (2.1) также выпукло (и обязательно замкнуто, если замкнуто D). Согласно (2.7) $Q = Y_*$ и в силу леммы 2.2.2 множество Q выпукло. По лемме 2.2.1 множество собственно эффективных точек множества Q совпадает с $G(Y)$.

Лемма 1. *Предположим, что выполнено условие регулярности Слейтера: существует такая точка $\widetilde{x} \in D$, что $g(\widetilde{x}) > 0_{(k)}$. Если q^0 — собственно эффективная точка, то $q^0 \in H$.*

Доказательство. Пусть $q^0 = f(x^0)$ при некотором $x^0 \in G_f(X)$. Согласно теореме 2.2.6 существует такой вектор $\lambda^0 \in E^k_{\geqq}$, что пара (x^0, λ^0) образует седловую точку скалярной функции $\mathscr{L}(\mu, x, \lambda)$ при некотором $\mu \in \mathrm{M}$, т. е.

$$\mathscr{L}(\mu, x, \lambda^0) \leqq \mathscr{L}(\mu, x^0, \lambda^0) \leqq \mathscr{L}(\mu, x^0, \lambda)$$

для всех $x \in D$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$. Из правого неравенства при $\lambda = 0_{(k)}$ и $g(x^0) \geqq 0_{(k)}$ следует равенство $\langle \lambda^0, g(x^0)\rangle = 0$. В таком случае левое неравенство принимает вид

$$\langle \mu, f(x^0)\rangle \geqq \mathscr{L}(\mu, x, \lambda^0) \text{ для всех } x \in D. \tag{1}$$

Согласно представлению (2.8) имеем $f(x^0) = q^0 \in H(\lambda^0) \subseteq H$. ■

Теорема 1. *Пусть выполнено условие регулярности Слейтера. Предположим, что справедливо хотя бы одно из условий:*

1) *каждая точка* $q^0 \in \mathrm{Max}\, Q$ *является собственно эффективной (т. е. выполняется равенство* $P(Y) = G(Y)$*);*
2) *функция* f *строго вогнута;*
3) *множества* D, Y *замкнуты и* $\overline{\mathrm{Min}\, H} \subseteq H$.

Тогда $\mathrm{Max}\, Q \subseteq \mathrm{Min}\, H$.

Доказательство. Пусть $q^0 \in \mathrm{Max}\, Q$. Благодаря (2.11) $q^0 = f(x^0)$ при некотором $x^0 \in P_f(X)$. Поскольку $f(x^0) \in Q$, то при $f(x^0) \in H$, согласно теореме 2.2 элемент $f(x^0)$ будет принадлежать множеству $\mathrm{Min}\, H$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить включение $f(x^0) \in H$.

1) Если $f(x^0) \in G(Y)$, то согласно лемме 1 $f(x^0) \in H$.

2) Из $x^0 \in P_f(X)$ по теореме 2.2.6 следует существование векторов $\mu^0 \in \overline{\mathrm{M}}$ и $\lambda^0 \in E^k_{\geqq}$ таких, что пара (x^0, λ^0) является седловой точкой скалярной функции $\mathscr{L}(\mu^0, x, \lambda)$. Поэтому

$$\mathscr{L}(\mu^0, x^0, \lambda^0) \geqq \mathscr{L}(\mu^0, x, \lambda^0) \text{ для всех } x \in D.$$

Следовательно, функция $\mathscr{L}(\mu^0, \cdot, \lambda^0)$ достигает максимума на множестве D в точке x^0. А так как эта функция строго вогнута (вследствие строгой вогнутости f), то x^0 — единственная точка максимума. Поэтому, учитывая равенство $\langle \lambda^0, g(x^0)\rangle = 0$, получаем

$$\langle \mu^0, f(x^0)\rangle > \langle \mu^0, f(x)\rangle + \langle \lambda^0, g(x)\rangle \text{ для всех } x \in D, \quad x \neq x^0.$$

Здесь $\mu^0 \in \overline{\mathrm{M}}$. Но для каждого $x \in D$, $x \neq x^0$, всегда можно подобрать вектор $\mu \in \mathrm{M}$ (который, разумеется, будет зависеть от точки x) так, чтобы написанное выше строгое неравенство выполнялось после замены μ^0 на μ. Таким образом, для каждого $x \in D$ (для $x = x^0$ можно взять любой вектор из М, так как $\langle \lambda^0, g(x^0) \rangle = 0$) существует такой $\mu \in$ М, что оказывается справедливым неравенство (1). Поэтому $f(x^0) \in H(\lambda^0)$.

3) Благодаря теореме 3.1.8 оценка $f(x^0)$ является пределом последовательности собственно эффективных оценок: $f(x^0) = \lim\limits_{l \to \infty} f(x^l)$, где $x^l \in G_f(X)$, $l = 1, 2, \ldots$. В п. 1) данного доказательства было установлено, что $f(x^l) \in \operatorname{Min} H$ для любого l. Используя условие $\overline{\operatorname{Min} H} \subseteq H$, получаем $f(x^0) \in H$. ■

Как показывает нижеследующий пример, какие-то дополнительные предположения типа условий 1)–3) теоремы 1 вводить необходимо.

П р и м е р 1. Рассмотрим двухкритериальную вогнутую задачу, в которой $n = m = 2$, $k = 1$, $D = E^2$ и

$$f_1(x) = x_1, \quad f_2(x) = x_2, \quad g_1(x) = -(x_1)^2 - x_2.$$

Выпуклое множество X составляют точки плоскости E^2, расположенные на параболе $x_2 = -(x_1)^2$, и точки, лежащие ниже этой параболы. Точка $x^0 = 0_{(2)}$ эффективна, так что $f(x^0) \in \operatorname{Max} Q$. Докажем, что $f(x^0) \notin H$.

а) Если $\lambda = 0$, то для $x^1 = (1, 1)$ справедливо

$$L(x^1, 0) = (1, 1) > (0, 0) = f(x^0),$$

т. е. $f(x^0) \notin H(0)$.

б) Если $0 < \lambda < 1$, то берем $x^2 = (1 - \lambda, 1 - \lambda)$ и получаем

$$L(x^2, \lambda) = \big((1 - \lambda^3), (1 - \lambda^3)\big) > (0, 0) = f(x^0)$$

для любого $\lambda \in (0, 1)$. Следовательно, $f(x^0) \notin H(\lambda)$ при $0 < \lambda < 1$.

в) Если $\lambda \geqq 1$, то для $x^3 = (0, -1)$ имеем

$$L(x^3, \lambda) = (\lambda, \lambda - 1) \geq (0, 0) = f(x^0),$$

т. е. $f(x^0) \notin H(\lambda)$ для $\lambda \geqq 1$. ■

В этом примере ни одно из условий 1)–3) не выполняется: эффективная оценка $f(x^0)$ не является собственно эффективной; функция f линейна, а значит, не является строго вогнутой. Далее, согласно теореме 3.1.8 $f(x^0) = \lim\limits_{l \to \infty} f(x^l)$ и $x^l \in G_f(X)$. По лемме 1 $f(x^l) \in Q \cap H$, а значит $f(x^l) \in \operatorname{Min} H$, $l = 1, 2, \ldots$. Но, как показано выше $f(x^0) \notin H$. Следовательно, условие 3) теоремы 1 также не выполнено.

2. Для дальнейшего изучения двойственности понадобятся дополнительные понятия и факты выпуклого анализа. В данном пункте мы приведем эти дополнительные сведения, опираясь на [93].

Пусть $Z \subseteq E^n$ — непустое выпуклое множество. Говорят, что Z удаляется в бесконечность по направлению t или что t есть *рецессивное направление* для Z, если Z содержит все лучи с направлением t (где $t \neq 0_{(n)}$), начинающиеся в любой точке из Z. Другими словами, z удаляется в бесконечность по направлению t, $t \neq 0_{(n)}$, если $z + \lambda t \in Z$ для любых $\lambda \geqq 0$, $z \in Z$. Множество всех векторов, удовлетворяющих последнему соотношению, с присоединенным к нему началом координат называется *рецессивным* конусом множества Z и обозначается $0^+(Z)$. Множество $0^+(Z)$ является выпуклым конусом и совпадает с множеством тех векторов t, для которых выполняется $Z + t \subseteq Z$.

Если Z замкнуто, то его рецессивный конус замкнут. Известно, что непустое выпуклое замкнутое множество ограничено тогда и только тогда, когда его рецессивный конус совпадает с началом координат.

Если Z_γ, $\gamma \in \Gamma$, — произвольное семейство выпуклых замкнутых множеств, пересечение которых непусто, то справедливо равенство

$$0^+\Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} Z_\gamma\Big) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} 0^+(Z_\gamma).$$

Поляра выпуклого конуса C определяется следующим образом:

$$C^\circ = \big\{ z \mid \langle z, y\rangle \leqq 0 \ \text{ для всех } \ y \in C \big\}.$$

Если $C_1 \subseteq C_2$ и C_1, C_2 — выпуклые конусы, то $C_1^\circ \supseteq C_2^\circ$. Как известно, для выпуклого замкнутого конуса C справедливо равенство $(C^\circ)^\circ = C$.

Лемма 2. *Пусть Z — непустое выпуклое замкнутое множество. Если $\mu \in \mathrm{ri}(0^+(Z))^\circ$, то линейная функция $\langle \mu, \cdot\rangle$ достигает максимум на множестве Z.*

Доказательство. Из условия $\mu \in \mathrm{ri}(0^+(Z))^\circ$ согласно следствию 11.6.2 [93], вытекает неравенство

$$\langle y, \mu\rangle < \max_{z\in(0^+(Z))^\circ} \langle \mu, z\rangle = 0 \tag{2}$$

для любого y такого, что линейная функция $\langle y, \cdot\rangle$ не является тождественно равной постоянной на множестве $(0^+(Z))^\circ$.

Обозначим через R максимальное подпространство, содержащееся в конусе $0^+(Z)$.

Для $y \in 0^+(Z)\backslash R$ функция $\langle y, \cdot\rangle$ не является тождественно равной постоянной на $(0^+(Z))^\circ$ (заметим, что благодаря $0_{(n)} \in \in (0^+(Z))^\circ$ этой постоянной может быть лишь нуль). В самом деле, если

$$\langle y, z\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in (0^+(Z))^\circ,$$

то при каждом вещественном σ также $\langle \sigma y, z\rangle = 0$. Таким образом, вся прямая, проходящая через начало координат и точку y, принадлежит множеству $((0^+(Z))^\circ)^\circ = 0^+(Z)$, т. е. $y \in R$. Но это противоречит включению $y \in 0^+(Z)\backslash R$.

В соответствии с этим из (2) следует

$$\langle y, \mu\rangle < 0 \ \text{ для всех } \ y \in 0^+(Z)\backslash R, \tag{3}$$

что означает строгое убывание линейной функции $\langle \mu, \cdot\rangle$ вдоль любого направления из $0^+(Z)\backslash R$.

Рассмотрим множество $Z' = Z \cap R^\perp$, где $R^\perp$ — ортогональное дополнение R. Поскольку для любого $z \in Z$ справедливо $R + z \subseteq Z$, то $Z' \cap (R + z) = \{z'\}$, где z' — некоторая точка множества Z'. Далее, очевидно, что $y = z - z' \in R$. Таким образом, для любого $z \in Z$ существует такой $z' \in Z'$, что $z = z' + y$, $y \in R$. Следовательно,

$$\langle \mu, z\rangle = \langle \mu, z'\rangle + \langle \mu, y\rangle.$$

Но $\langle \mu, y\rangle = 0$. Действительно, так как $\mu \in (0^+(Z))^\circ$ и $y \in 0^+(Z)$, то $\langle \mu, y\rangle \leqq 0$. А благодаря тому, что $-y \in R$, имеет место неравенство $\langle \mu, y\rangle \geqq 0$.

Таким образом, верхняя грань линейной функции $\langle \mu, \cdot\rangle$ на множестве Z достигается тогда и только тогда, когда она достигается на Z'.

Рецессивный конус множества Z' есть $0^+(Z') = 0^+(Z) \cap R^\perp$. Далее, $[0^+(Z) \cap R^\perp]\backslash 0_{(n)} \subseteq 0^+(Z)\backslash R$. Поэтому из (3) следует, что линейная функция $\langle \mu, \cdot\rangle$ вдоль любого направления из $0^+(Z')$ строго убывает. В соответствии с теоремой 27.3 из [93] эта функция достигает максимум на множестве Z', а значит, и на множестве Z. ■

3. Важное свойство прямого и двойственного множеств устанавливает следующая

Теорема 2. *Предположим, что выполнено условие регулярности Слейтера и множество Q замкнуто. Тогда*

$$Q \cup H = E^m. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $h \notin Q$. Докажем, что $h \in H$.

Точку h можно сильно отделить от выпуклого замкнутого множества Q, т. е. существует такой ненулевой вектор $\mu \in E^m$, что

$$\begin{aligned} &\langle \mu, h\rangle > \alpha \quad \text{для некоторого} \quad \alpha \in E,\\ &\langle \mu, q\rangle < \alpha \quad \text{для всех} \quad q \in Q. \end{aligned} \tag{5}$$

По определению множества Q из второго неравенства (5) следует $\mu \geq 0_{(m)}$. Очевидно, можно считать, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, т. е. $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$. Более того,

$$\mu \in (0^+(Q))^\circ \cap \overline{\mathrm{M}}, \tag{6}$$

где $(0^+(Q))^\circ$ — поляра рецессивного конуса множества Q. Действительно, если $\mu \notin (0^+(Q))^\circ$, т. е. $\langle \mu, z\rangle > 0$ для некоторого $z \in 0^+(q)$, то согласно определению рецессивного конуса для $q' \in Q$ включение $q' + \lambda z \in Q$ справедливо при каждом $\lambda > 0$. Величину $\langle \mu, q' + \lambda z\rangle$ за счет выбора λ можно сделать сколь угодно большой, а это несовместимо со вторым неравенством (5).

Если $\mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ = \varnothing$, то $0^+(Q) = E^m$, а значит, $Q = E^m$. Но, в соответствии с предположением, $h \in E^m$ и $h \notin Q$. Поэтому пусть $\mu^0 \in \mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ$. Поскольку $-E^m_{\geqq} \subseteq 0^+(Q)$, то $\left(-E^m_{\geqq}\right)^\circ = E^m_{\geqq} \supseteq (0^+(Q))^\circ$. Следовательно, $\mu^0 \in E^m_{\geqq}$. А так как $E^m_{\geqq}$ и $\mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ$ суть конусы, то можно считать, что

$$\mu^0 \in \mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ \cap \overline{\mathrm{M}}. \tag{7}$$

Рассмотрим вектор

$$\mu^\omega = \omega\mu^0 + (1-\omega)\mu \ \text{ при } \ \omega \in (0,1).$$

В силу (6), (7) и теоремы 6.1 из [93] выполняется $\mu^\omega \in \mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ \cap \cap \overline{\mathrm{M}}$. Далее, очевидно, что

$$\begin{aligned} \langle \mu^\omega, h\rangle &= \omega\langle \mu^0, h\rangle + (1-\omega)\langle \mu, h\rangle,\\ \langle \mu^\omega, q\rangle &= \omega\langle \mu^0, q\rangle + (1-\omega)\langle \mu, q\rangle. \end{aligned}$$

Благодаря (7) линейная функция $\langle \mu^0, \cdot\rangle$ ограничена сверху на множестве Q (см. лемму 2). А в силу (5) выполняется

$$\langle \mu, h\rangle > \sup_{q\in Q}\langle \mu, q\rangle.$$

Поэтому положительное ω можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$\langle \mu^\omega, h\rangle > \langle \mu^\omega, q\rangle \ \text{ для всех } \ q \in Q. \tag{8}$$

Согласно лемме 2 функция $\langle \mu^\omega, \cdot \rangle$ достигает своего наибольшего значения на Q. Пусть q^ω — точка максимума, т. е.

$$\langle \mu^\omega, q^\omega \rangle \geqq \langle \mu^\omega, q \rangle \text{ для всех } q \in Q. \tag{9}$$

Так как $q^\omega \in Q$, то $q^\omega \leqq f(x^0)$ при некотором $x^0 \in X$, и поэтому $\langle \mu^\omega, q^\omega \rangle \leqq \langle \mu^\omega, f(x^0) \rangle$. Но $f(x^0) \in Q$, а значит, из (9) следует $\langle \mu^\omega, q^{\omega)} \rangle \geqq \langle \mu^\omega, f(x^0) \rangle$. Следовательно, $\langle \mu^\omega, q^\omega \rangle = \langle \mu^\omega, f(x^0) \rangle$ и

$$\langle \mu^\omega, f(x^0) \rangle \geqq \langle \mu^\omega, f(x) \rangle \text{ для всех } x \in X.$$

Таким образом, вогнутая скалярная функция $\langle \mu^\omega, f(x) \rangle$ достигает максимума на множестве X в точке x^0. Отсюда в соответствии с теоремой 2.2.6 (при $m = 1$) вытекает существование такого вектора $\lambda \in E^k_{\geqq}$, что

$$\langle \mu^\omega, f(x^0) \rangle \geqq \langle \mu^\omega, f(x) \rangle + \langle \lambda, g(x) \rangle \text{ для всех } x \in D.$$

Поэтому, учитывая неравенство (8), получаем

$$\langle \mu^\omega, h \rangle > \langle \mu^\omega, f(x) \rangle + \langle \lambda, g(x) \rangle \text{ для всех } x \in D.$$

Здесь $\mu^\omega \in \overline{\mathrm{M}}$. Но так как это неравенство строгое, то для каждого фиксированного $x \in D$ можно подобрать такой вектор $\mu \in \mathrm{M}$ (зависящий от x), что $\langle \mu, h \rangle > \mathscr{L}(\mu, x, \lambda)$. Согласно представлению (2.8) это влечет $h \in H(\lambda)$. ■

Итак, о взаимном расположении прямого и двойственного множеств можно сказать следующее: они заполняют все пространство E^m (теорема 2) и могут иметь общими лишь свои граничные элементы (это вытекает из теоремы 1.1).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие регулярности Слейтера и множество Q замкнуто. Тогда* $\operatorname{Min} H \subseteq \operatorname{Max} Q$.

Доказательство. Пусть $h^0 \in \operatorname{Min} H$. Поскольку h^0 — минимальный элемент, то $h^0 \notin \operatorname{int} H$. Тогда благодаря равенству (4) и замкнутости Q имеем $h^0 \in Q$. Таким образом, $h^0 \in Q \cap H$, а значит, в силу теоремы 2.2 $h^0 \in \operatorname{Max} Q$. ■

4. Дополнительно предположив, что вектор-функции f, g покомпонентно дифференцируемы на $D \subseteq E^n$, введем в рассмотрение множество

$$H_1 = \bigcup_\lambda \bigcup_x \bigcup_\mu \bigl\{ h \in E^m \mid \langle \mu, h \rangle \geqq \mathscr{L}(\mu, x, \lambda) \bigr\},$$

где объединение берется по всем $\lambda \in E^k_{\geqq}$, $x \in D$ и $\mu \in \mathrm{M}$, для которых выполняется равенство

$$\Delta_x \mathscr{L}(\mu, x, \lambda) \approx 0_{(n)}. \tag{10}$$

Если $h \in H_1$, то, используя характеристическое свойство вогнутой и дифференцируемой функции $\mathscr{L}(\mu, \cdot, \lambda)$, а также равенство (10), получим

$$\langle \mu, h\rangle \geqq \mathscr{L}(\mu, x, \lambda) \geqq \mathscr{L}(\mu, x', \lambda) + \langle \nabla_x \mathscr{L}(\mu, x, \lambda), x - x'\rangle \geqq \\ \geqq \mathscr{L}(\mu, x', \lambda) \ \text{для любого} \ x' \in D, \quad (11)$$

что согласно представлению (2.8) влечет $h \in H(\lambda)$. Следовательно, всегда справедливо включение

$$H_1 \subseteq H. \quad (12)$$

Лемма 3. *Для любых $q \in Q$ и $h \in H_1$ (h: $\langle \mu, h\rangle \geqq \mathscr{L}(\mu, x, \lambda)$ для некоторых $\mu \in \mathrm{M}$, $x \in D$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$) выполняется неравенство $\langle \mu, q\rangle \leqq \langle \mu, h\rangle$.*

Доказательство. Поскольку $q \in Q$, то $q \leqq f(x^0)$ для некоторого $x^0 \in X$. Для $h \in H_1$, используя свойство вогнутой и дифференцируемой функции $\mathscr{L}(\mu, \cdot, \lambda)$, получаем (11), откуда при $x' = x^0 \in X$ следует

$$\langle \mu, h\rangle \geqq \mathscr{L}(\mu, x^0, \lambda) \geqq \langle \mu, f(x^0)\rangle \geqq \langle \mu, q\rangle. \qquad \blacksquare$$

Следствие 1. *Если $q^0 \in Q \cap H_1$, то q^0 — собственно эффективная точка Q и $q^0 \in \operatorname{Min} H_1$.*

Доказательство. Поскольку $q^0 \in H_1$, то для некоторых $\mu^0 \in \mathrm{M}$, $x^0 \in D$ и $\lambda^0 \in E^k_{\geqq}$ верно $\langle \mu^0, q^0\rangle \geqq \mathscr{L}\langle \mu^0, x^0, \lambda^0\rangle$. Согласно лемме 3 $\langle \mu^0, q\rangle \leqq \langle \mu^0, q^0\rangle$ для любого $q \in Q$. Следовательно, q^0 — собственно эффективная точка множества Q.

Если же $q^0 \notin \operatorname{Min} H_1$, т. е. для некоторого $h \in H_1$ верно $h \leq q^0$, то $\langle \mu^0, h\rangle < \langle \mu^0, q^0\rangle$, где $h \in H_1$, $q^0 \in Q$, а это противоречит утверждению леммы 3. $\blacksquare$

Теорема 4. *Предположим, что выполнено условие регулярности Слейтера, множество Q замкнуто и $H_1 \neq \varnothing$. Тогда*

$$Q \cup H_1 = E^m. \quad (13)$$

Доказательство. Предположим, что $h \notin Q$ и докажем включение $h \in H_1$.

Так же, как и в доказательстве теоремы 2, точку h можно сильно отделить от множества Q, т. е. найдется вектор $\mu \in \overline{\mathrm{M}}$ такой, что выполняется (5) и (6). Поскольку $H_1 \neq \varnothing$ (т. е. найдется $h^* \in H_1$), то согласно лемме 3 при некотором $\mu^* \in \mathrm{M}$ верно $\langle \mu^*, q\rangle \leqq \langle \mu^*, h^*\rangle$

для всех $q \in Q$. Легко понять, что

$$\mu^* \in (0^+(Q))^\circ \cap \mathrm{M}.$$

В силу $Q \neq E^m$ справедливо неравенство $\mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ \neq \varnothing$, поэтому пусть $\mu \in \mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ$. Аналогично тому, как в доказательстве теоремы 2 для μ^0 было установлено включение (7), в данном случае можно доказать, что

$$\overline{\mu} \in \mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ \cap \overline{\mathrm{M}}.$$

Для вектора $\mu^0 = \lambda\overline{\mu} + (1-\lambda)\mu^*$ при фиксированном $\lambda \in (0,1)$ согласно теореме 6.1 из [93], верно

$$\mu^0 \in \mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ \cap \mathrm{M}.$$

Теперь рассмотрим вектор $\mu^\omega = \omega\mu^0 + (1-\omega)\mu$ при $\omega \in (0,1)$, для которого справедливо

$$\mu^0 \in \mathrm{ri}(0^+(Q))^\circ \cap \mathrm{M}.$$

Аналогично тому, как в доказательстве теоремы 2, можно показать, что выполнено (8) и вогнутая скалярная функция $\langle \mu^\omega, f(x)\rangle$ достигает максимум на множестве X в точке x^0.

Если $\widetilde{x}$ — точка, для которой выполняется условие регулярности Слейтера, то для каждого $j \in J(x^0)$ в силу вогнутости и дифференцируемости g_j имеем

$$\langle \nabla g_j(x^0), \widetilde{x} - x^0\rangle \geqq g_j(\widetilde{x}) - g_j(x^0) > 0,$$

что означает выполнение условия регулярности из условий теоремы 2.4.1.

Применяя эту теорему при $m = 1$ к точке максимума x^0 функции $\langle \mu^\omega, f(x)\rangle$, для некоторого $\lambda \in E^k_{\geqq}$ получаем

$$\nabla_x \mathscr{L}(\mu^\omega, x^0, \lambda) = 0_{(n)}, \tag{14}$$

$$\langle \lambda, g(x^0)\rangle = 0. \tag{15}$$

Кроме того, в силу (8) и (15) имеем

$$\langle \mu^\omega, h\rangle > \langle \mu^\omega, f(x^0)\rangle = \mathscr{L}(\mu^\omega, x^0, \lambda).$$

Это вместе с (14) влечет $h \in H_1$. ■

Примечание 1. В теореме 4 условие регулярности нужно было для того, чтобы из равенства $\langle \mu^\omega, f(x^0)\rangle = \max\limits_{x\in X}\langle \mu^\omega, f(x)\rangle$ с помощью теоремы 2.4.1 получить (14) и (15). В линейном случае, т. е. когда $D = E^n$, f_i — линейные, а g_j — аффинные функции, равенства (14) и (15) можно получить, используя теорему 2.2.7 (при $m = 1$), в которой условие регулярности отсутствует. Кроме того, в линейной задаче множество Q полиэдрально, так как представляет собой разность двух полиэдральных множеств (см. представление (2.7), теорему 19.3 и следствие 19.3.2 из [93]). Если оно полиэдрально, значит, замкнуто. Следовательно, в линейной задаче равенство (13) справедливо лишь в предположении $Q \neq \varnothing$ и $H_1 \neq \varnothing$.

Ранее было установлено включение $H_1 \subseteq H$. Следовательно, $\operatorname{int} H_1 \subseteq \operatorname{int} H$. Если же $h \in \operatorname{int} H$, то благодаря теореме 1.1 $h \notin Q$. Отсюда в силу (13) следует $h \in H_1$ и, более того, так как Q замкнуто, то $h \in \operatorname{int} H_1$. Таким образом, если выполнено условие регулярности Слейтера и $H_1 \neq \varnothing$, то

$$\operatorname{int} H_1 = \operatorname{int} H.$$

Следует отметить, что здесь (а также в формулировке теоремы 4) условие $H_1 \neq \varnothing$ существенно. Об этом говорит следующий

Пример 2. $m = 2, n = k = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = 0, g_1(x) = x$. Здесь $Q = \{q \in E^2 \mid q_2 \leqq 0\}$ и $H = \{h \in E^2 \mid h_2 > 0\}$, а равенство (10) имеет вид $\mu_1 + \lambda_1 = 0$. Но числа $\mu_1 > 0$ и $\lambda_1 \geqq 0$, которые удовлетворяли бы последнему равенству, не существуют. Поэтому $H_1 = \varnothing$, так что $Q \cup H_1 \neq E^2$ и $\operatorname{int} H_1 \neq \operatorname{int} H$.

Соотношение между собственно эффективными точками множества Q (тем самым, и точками множества $G(Y)$) и точками множества $\operatorname{Min} H_1$ устанавливает

Теорема 5. *Пусть выполнено условие регулярности Слейтера и множество Q замкнуто. Тогда*:

1) *каждая собственно эффективная точка множества Q принадлежит множеству $\operatorname{Min} H_1$;*
2) *каждая точка множества $\operatorname{Min} H_1$ является собственно эффективной для множества Q.*

Доказательство. 1) Пусть q — собственно эффективная точка множества Q. Тогда $q = f(x)$ для некоторого $x \in G_j(X)$. В доказательстве теоремы 4 было установлено, что из выполнения условия регулярности Слейтера следует выполнение условия регулярности теоремы 2.4.1. В соответствии с этой теоремой для точки x справедливо (10) при некоторых $\mu \in \mathrm{M}$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$ и равенство $\langle \lambda, g(x) \rangle = 0$. Благодаря последнему равенству можно написать $\langle \mu, q \rangle = \mathscr{L}(\mu, x, \lambda)$. Следовательно, $q \in H_1$. Согласно следствию 1 отсюда вытекает $q \in \operatorname{Min} H_1$.

2) Пусть $h \in \operatorname{Min} H_1$. Ясно, что $h \notin \operatorname{int} H_1$. Поэтому в силу (13) и замкнутости Q получаем $h \in Q \cap H_1$, что согласно следствию 1 влечет собственную эффективность точки h для множества Q. ■

Выпишем вид двойственной задачи $\operatorname{Min} H_1$ в скалярном случае: — минимизировать скалярную функцию Лагранжа $L(x, \lambda)$ по $x \in D$ и $\lambda \in E^k_{\geqq}$, связанным равенством $\Delta_x L(x, \lambda) = 0_{(n)}$.

Отметим, что полученные в данном пункте результаты в идейном отношении близки к результатам работы П. Шенфельда [218].

§ 4.4. Линейный случай

В этом параграфе рассматриваются линейные многокритериальные задачи и показывается, что равенство множеств решений прямой и двойственной задач выполняется при более широких предположениях, чем в вогнутом случае.

Поскольку в линейном случае согласно следствию 2.2.3 $P(Y) = G(Y)$, то, учитывая теорему 3.5, двойственное множество H можно заменить на «почти совпадающее» с ним множество H_1, введенное в предыдущем параграфе. Это приводит к формулировке двойственной задачи $\operatorname{Min} H_1$, принадлежащей Гейлу–Куну–Таккеру [154]. Результаты, полученные для исходной двойственной задачи $\operatorname{Min} H$, используются для установления двойственного соответствия между прямой задачей $\operatorname{Max} Q$ и двойственной задачей $\operatorname{Min} H_1$.

В свою очередь, для линейной задачи с ограничениями в форме равенств множество H_1 также можно заменить на «почти совпадающее» с ним множество H_2, что ведет к двойственной задаче $\operatorname{Min} H_2$. Результаты, относящиеся к этой двойственной задаче, как следствие вытекают из результатов, полученных для задачи $\operatorname{Min} H_1$. Наконец, оказывается возможным в множестве H_2 выделить такое подмножество H_3, что $\operatorname{Min} H_3 = \operatorname{Min} H_2$. Двойственная задача $\operatorname{Min} H_3$ была введена Г. Изерманом [173, 175]. Двойственные соотношения, относящиеся к задаче $\operatorname{Min} H_3$, непосредственно вытекают из результатов, полученных для задачи $\operatorname{Min} H_2$.

Кроме этого, в параграфе рассмотрено двойственное соответствие между линейными параметрическими задачами, введенное Дж. Корнблютом [185]. Это соответствие, в частности, дает возможность получить критерий существования эффективных решений в линейной задаче без предположения о существовании допустимых решений (т. е. без предположения $X \neq \varnothing$).

1. Будем рассматривать линейную многокритериальную задачу, в которой

$$f(x) = Cx, \quad g(x) = b - Ax, \quad D = E^n_{\geqq},$$

где C и A — числовые матрицы размера $m \times n$ и $k \times n$ соответственно, а b — k-мерный вектор. В соответствии с этим прямая задача принимает следующий вид.

Прямая задача A (линейный случай). *Найти множество* $\operatorname{Max} Q$, *где*

$$Q = \bigcup_{x \in X} \{q \in E^m \mid q \leqq Cx\}, \tag{1}$$

$$X = \{X \in E^n_{\geqq} \mid Ax \leqq b\}. \tag{2}$$

Исходя из общей конструкции двойственности второго параграфа, двойственная линейная задача формулируется следующим образом.

Двойственная задача A (линейный случай). *Найти множество* $\operatorname{Min} H$, *где*

$$H = \bigcup_{\lambda \in E^k_{\geqq}} \bigcap_{x \in E^n_{\geqq}} \{h \in E^m \mid h \mathrel{\overline{\overline{>}}} Cx + \langle \lambda, b - Ax \rangle 1_{(m)}\},$$

$$1_{(m)} = (1, 1, \ldots, 1) \in E^m.$$

Множество H допускает также представление (см. (2.8))

$$H = \bigcup_{\lambda \in E^k_{\geqq}} \bigcap_{x \in E^n_{\geqq}} \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} \{h \mid \langle \mu, h \rangle \geqq \mu Cx + \langle \lambda, b - Ax \rangle\}.$$

Наряду с прямой задачей A приведем формулировку линейной задачи с ограничениями в форме равенств.

Прямая задача B. *Найти множество* $\operatorname{Max} Q$, *где* Q *имеет вид* (1) *и*

$$X = \{x \in E^n_{\geqq} \mid Ax = b\}. \tag{3}$$

Для того чтобы сформулировать двойственную задачу B введем $2k$-мерную линейную функцию $\overline{g}(x) = \overline{b} - \overline{A}x$, где $\overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$. Очевидно, множество (3) совпадает с множеством $\{x \in E^n_{\geqq} \mid \overline{g}(x) \geqq 0_{(2k)}\}$. Выписывая применительно к этому множеству двойственную задачу A, получим

$$H = \bigcup_{\overline{\lambda} \in E^{2k}_{\geqq}} \bigcap_{x \in E^n_{\geqq}} \{h \mid h \mathrel{\overline{\overline{>}}} Cx + \langle \overline{\lambda}, \overline{g}(x) \rangle 1_{(m)}\}.$$

А обозначая $\overline{\lambda} = (\lambda', \lambda'')$, где $\lambda', \lambda'' \in E^k_{\geqq}$, придем к равенству

$$H = \bigcup_{\lambda', \lambda'' \in E^k_{\geqq}} \bigcap_{x \in E^n_{\geqq}} \{h \mid h \overline{\overline{>}} Cx + \langle \lambda' - \lambda'', b - Ax \rangle 1_{(m)}\}.$$

Разность $\lambda' - \lambda''$ есть некоторый вектор из E^k. Обратно, любой вектор из E^k можно представить в виде разности двух неотрицательных векторов. Поэтому справедливо равенство

$$H = \bigcup_{\lambda \in E^k} \bigcap_{x \in E^n_{\geqq}} \left\{h \mid h \overline{\overline{>}} Cx + \langle \lambda, b - Ax \rangle 1_{(m)}\right\}. \tag{4}$$

В соответствии с этим получаем следующую двойственную задачу для прямой задачи В.

Двойственная задача В. *Найти множество* $\operatorname{Min} H$, *где* H *имеет вид* (4).

Для определенности в этом пункте мы будем рассматривать пару задач типа А. Результаты, полученные для этого типа задач, можно легко перенести на задачи типа B.

Лемма 1. *В линейной задаче для каждого* $q^0 \in \operatorname{Max} Q$ *существуют такие векторы* $\mu \in \mathrm{M}$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$, *что*

$$\lambda A \geqq \mu C, \tag{5}$$

$$\langle \mu, q^0 \rangle = \langle \lambda, b \rangle. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку $q^0 \in \operatorname{Max} Q$, то $q^0 = Cx^0$ при некотором $x^0 \in P_f(X)$. Применяя к точке x^0 теорему 2.2.7, получим существование таких векторов $\mu \in \mathrm{M}$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$ и $\lambda' \in E^n_{\geqq}$, что

$$\mu C = \lambda A - \lambda',$$

$$\langle \lambda, b - Ax^0 \rangle + \langle \lambda', x^0 \rangle = 0.$$

Из первого равенства вытекает неравенство (5). А учитывая оба этих равенства, приходим к (6):

$$\langle \mu, q^0 \rangle = \mu C x^0 = \mu C x^0 + \langle \lambda, b - Ax^0 \rangle + \langle \lambda', x^0 \rangle = \langle \lambda, b \rangle. \quad \blacksquare$$

В соответствии с леммой 1 если $q^0 \in \operatorname{Max} Q$, то существуют $\mu \in \mathrm{M}$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$ такие, что

$$\langle \mu, q^0 \rangle \geqq \mu C x + \langle \lambda, b - Ax \rangle \text{ для всех } x \in E^n_{\geqq}.$$

Это влечет $q^0 \in H(\lambda) \subseteq H$. Поэтому $q^0 \in Q \cap H$, а значит согласно (2.9) $q^0 \in \operatorname{Min} H$. Следовательно, в линейной задаче из неравенства $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$ всегда следует $\operatorname{Min} H \neq \varnothing$ и $\operatorname{Max} Q \subseteq \operatorname{Min} H$. Заметим, что в приведенных рассуждениях выполнение условия регулярности Слейтера не потребовалось.

Линейный образ полиэдрального множества является полиэдральным множеством (см. теорему 19.3 из [93]); сумма двух полиэдральных множеств также полиэдральное множество (см. следствие 19.3.2 из [93]). Поэтому из представления (2.7) заключаем, что множество Q полиэдрально, а значит, замкнуто. Кроме того, в линейном случае в доказательстве теоремы 3.2. можно использовать теорему 2.2.7, в которой отсутствует предположение о выполнении условия регулярности. Это означает, что теоремы 3.2 и 3.3, доказанные для вогнутого случая, в линейном случае верны без условия регулярности Слейтера (требуется лишь $Q \neq \varnothing$) и имеет место включение $\mathrm{Min}\, H \subseteq \mathrm{Max} Q$, если $\mathrm{Min}\, H \neq \varnothing$.

Суммируем полученное в следующей теореме.

Теорема 1. *В линейном случае справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $Q \neq \varnothing$, *то* $Q \cup H = E^m$;

2) *если* $\mathrm{Max} Q \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Min}\, H \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{Max} Q \subseteq \mathrm{Min}\, H$;

3) *если* $Q \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{Min}\, H \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Max} Q \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{Min}\, H \subseteq \mathrm{Max} Q$.

Когда условие $Q \neq \varnothing$ выполнено, то утверждение 1) теоремы 1 может оказаться неверным. Об этом свидетельствует

Пример 1. Пусть $n = 2$, $m = 2$, $k = 2$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Здесь $Q = \varnothing$ (так как $X = \varnothing$) и функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_2 \\ x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}.$$

Положим $x_1 = x_2 = w \geqq 0$. Тогда

$$L(w, \lambda) = L((w, w), \lambda) = \begin{pmatrix} \omega - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \omega - \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Возьмем произвольный вектор $q \in E^2$. Из вида функций $L(w, \lambda)$ следует, что для любых $\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$ найдется число $w \geqq 0$, для которого $L(w, \lambda) \geq q$. Это указывает на то, что ни один вектор из E^2 не принадлежит множеству H, т. е. $H = \varnothing$, а значит, $Q \cup H \neq E^2$.

Пример 2. Для линейной задачи из примера 3.2 $Q \neq \varnothing$ и $H \neq \varnothing$, однако $\mathrm{Max} Q = \mathrm{Min}\, H = \varnothing$, т. е. из выполнения неравенств $Q \neq \varnothing$ и $H \neq \varnothing$ не обязательно следует $\mathrm{Max} Q \neq \varnothing$ или $\mathrm{Min}\, H \neq \varnothing$.

Из теоремы 1 и теоремы 2.2 очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Если* $Q \neq \varnothing$, *то следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathrm{Max}\, Q \neq \varnothing$ *или* $\mathrm{Min}\, H \neq \varnothing$;
2) $\mathrm{Max}\, Q \neq \varnothing$, $\mathrm{Min}\, H \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{Max}\, Q = \mathrm{Min}\, H = Q \cap H$.

2. Рассмотрим следующую линейную параметрическую задачу *) при векторном параметре $t \in E^r_>$, $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$:

найти множество $\mathrm{Max}\, Q(t)$, где

$$Q(t) = \left\{q = Cx \mid x \in E^n_{\geqq},\ \ Ax \leqq Bt\right\}$$

и B — *числовая матрица размера* $k \times r$.

Зафиксируем допустимый вектор-параметр t. Сформулированная задача имеет решение тогда и только тогда, когда существует по крайней мере одна собственно эффективная точка по вектор-функции Cx относительно соответствующего множества ограничений. Это имеет место в том и только том случае (см. теорему 2.2.4), если для некоторого $\mu \in \mathrm{M}$ имеет решение скалярная задача

$$\max\left\{\mu Cx \mid x \in E^n_{\geqq},\ \ Ax \leqq Bt\right\}.$$

Согласно теореме двойственности скалярного линейного программирования [105] эта задача имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение двойственная задача

$$\min\left\{\lambda Bt \mid \lambda \in E^k_{\geqq},\ \ \lambda A \geqq \mu C\right\}.$$

В силу $t > 0_{(r)}$, теоремы 2.2.4 и равенства $G_f(X) = P_f(X)$ в линейном случае последняя задача имеет решение в том и только в том случае, если имеет решение следующая многокритериальная задача ($\mu \in \mathrm{M}$):

найти множество $\mathrm{Min}\, H(\mu)$, *где*

$$H(\mu) = \left\{h = \lambda B \mid \lambda \in E^k_{\geqq},\ \ \lambda A \geqq \mu C\right\}.$$

Итак, задача $\mathrm{Max}\, Q(t)$ разрешима при некотором $t > 0_{(r)}$, $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$, в том и только том случае, если при некотором $\mu \in \mathrm{M}$

*) Вводимая здесь двойственная конструкция параметрических линейных задач принадлежит Дж. Корнблюту [185].

разрешима задача $\operatorname{Min} H(\mu)$. В соответствии с этим задача $\operatorname{Min} H(\mu)$ является двойственной (в смысле существования решений по отношению к исходной задаче $\operatorname{Max} Q(t)$) *). Заметим, что исходная (прямая) задача содержит m критериев и k ограничений, а двойственная — r критериев и n ограничений.

В изложенной конструкции двойственности существенным является то, что здесь заранее не предполагается выполненным условие $Q(t) \neq \varnothing$. Это позволяет проводить исследование существования исходной параметрической задачи с помощью соответствующей двойственной задачи, заранее не зная, совместна система ограничений $Ax \leqq Bt$, $x \geqq 0_{(n)}$, $t > 0_{(r)}$, $\sum_{t=1}^{r} t_i = 1$, или нет. Так, например, при $r = 1$ вектор-параметр t исчезает и исходная параметрическая задача превращается в прямую задачу А. Соответствующая двойственная задача будет иметь вид ($\mu \in \mathrm{M}$)

$$\min\bigl\{\langle \lambda, b\rangle \mid \lambda \in E^k_{\geqq},\ \ \lambda A \geqq \mu C\bigr\}. \tag{7}$$

В соответствии с этим можно сформулировать следующий критерий существования эффективных решений в линейной задаче A.

Теорема 2. *Прямая задача A имеет решение* (*т. е.* $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$ *или* $P_f(X) \neq \varnothing$) *тогда и только тогда, когда при некотором* $\mu \in \mathrm{M}$ *имеет решение скалярная задача* (7).

Еще раз заметим, что в условиях теоремы 2 не предполагается выполненным условие $Q \neq \varnothing$ ($X \neq \varnothing$).

Нетрудно понять, что для прямой задачи B (с ограничениями в форме равенств) задача (7) будет иметь такой же вид с той лишь разницей, что на вектор λ не будет наложено никаких ограничений (т. е. $\lambda \in E^k$).

3. В п. 1 была сформулирована двойственная задача, в которой участвовало множество H. Если вместо H использовать введенное

*) Пусть t' и μ' — векторы соответствующей размерности с положительными компонентами, сумма которых есть единица. Обращаем внимание на то, что неравенство $\operatorname{Max} Q(t') \neq \varnothing$ не обязательно влечет $\operatorname{Min} H(\mu') \neq \varnothing$, и наоборот, из $\operatorname{Min} H(\mu') \neq \varnothing$ не всегда следует $\operatorname{Max} Q(t') \neq \varnothing$. Кроме того, если $\operatorname{Max} Q(t') = \varnothing$, то не обязательно $\operatorname{Min} H(\mu) = \varnothing$ для всех (допустимых) μ. А также, если $\operatorname{Min} H(\mu) \neq \varnothing$, то из этого, вообще говоря, не следуем $\operatorname{Max} Q(t) = \varnothing$ для всех (допустимых) t. В работе Дж. Корнблюта [185] в этом отношении имеются некоторые неточности, которые справедливо отмечены в [243].

в предыдущем параграфе множество H_1, которое «почти совпадает» с H, то получим двойственную задачу, имеющую определенные преимущества перед задачей $\operatorname{Min} H$.

Выпишем конкретный вид множества H_1 в случае, когда исходной является прямая задача A. Для этого положим $D = E^n$ и введем функцию $\overline{g}(x) = \overline{b} - \overline{A}x$, где $\overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0_{(n)} \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ -E_n \end{pmatrix}$ и E_n — единичная матрица $n \times n$.

Очевидно, допустимое множество X вида (2) совпадает с $\{x \in E^n \mid \overline{g}(x) \geqq 0_{(k+n)}\}$. Поэтому согласно определению множества H_1 (п. 4 в § 3) получаем

$$H_1 = \bigcup_{\overline{\lambda} \in E^{k+n}_{\geqq}} \bigcup_{x \in E^n} \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} \{h \mid \langle \mu, h \rangle \geqq \mu C x + \langle \lambda, b - Ax \rangle + \langle \lambda', x \rangle\},$$

где $\lambda \in E^k_{\geqq}$, $\lambda' \in E^n_{\geqq}$ и $\overline{\lambda} = (\lambda, \lambda')$. А условие (3.10), связывающее переменные $\overline{\lambda}$, x и μ, в данном случае принимает вид

$$\mu C - \lambda A + \lambda' = 0_{(n)},$$

что равносильно неравенству (5): $\lambda A \geqq \mu C$. Ясно, что используя последнее равенство, можно записать

$$H_1 = \bigcup_{\lambda \in E^k_{\geqq}} \bigcup_{\mu \in \mathrm{M}} \{h \mid \langle \mu, h \rangle \geqq \langle \lambda, b \rangle\}. \tag{8}$$

Итак, для прямой задачи A двойственное множество H_1 имеет вид (8), где векторы λ и μ удовлетворяют неравенству (5).

В § 3 было установлено включение $H_1 \in H$. Выясним, при каких условиях в линейном случае имеет место обратное включение. Если $h \in H$ и $h \in Q$, то в соответствии с теоремой 2.2 $h \in \operatorname{Max} Q$. Отсюда по лемме 1 получаем $h \in H_1$. Если же $h \in H$ и $h \notin Q$, то согласно примечанию 3.1 также имеем $h \in H_1$ (при условии, что $Q \neq \varnothing$, $H_1 \neq \varnothing$).

Таким образом, справедлива

Л е м м а 2. *Верны следующие утверждения*:

1) $H_1 \subseteq H$;

2) *если* $Q \neq \varnothing$ *и* $H_1 \neq \varnothing$, *то* $H_1 = H$.

Заметим, что условие $H_1 \neq \varnothing$ в утверждении 2) этой леммы является существенным (см. пример 3.2).

Введем в рассмотрение новую двойственную задачу, которая впервые была сформулирована Д. Гейлом, Х. Куном и А. Таккером [154].

Двойственная задача A_1. *Найти* $\operatorname{Min} H_1$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\operatorname{Min} H_1 \neq \varnothing$, *то* $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$;

2) *если* $Q \neq \varnothing$ *и* $H_1 \neq \varnothing$, *то* $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$.

Доказательство. 1) Пусть $h^0 \in \operatorname{Min} H_1$, т. е. $\langle \mu^0, h^0 \rangle \geqq \langle \lambda^0, b \rangle$ и $\lambda^0 A \geqq \mu^0 C$ при некоторых $\mu^0 \in \mathrm{M}$, $\lambda^0 \in E^k_{\geqq}$. Поскольку h^0 — минимальный элемент, то $\langle \mu^0, h^0 \rangle = \langle \lambda^0, b \rangle$. Поэтому если для некоторого $\lambda \in E^k_{\geqq}$, удовлетворяющего неравенству $\lambda A \geqq \mu^0 C$, справедливо $\langle \lambda, b \rangle < \langle \lambda^0, b \rangle$, то h^0 не является минимальным элементом. Это означает, что для $\mu = \mu^0$ задача (7) разрешима. Отсюда в соответствии с теоремой 2 следует $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$.

2) Если $H_1 \neq \varnothing$, то для некоторых $\mu \in \mathrm{M}$, $\lambda \in E^k_{\geqq}$ справедливо неравенство (5). Значит, так как $Q \neq \varnothing$, то согласно теореме 3.2.6 имеем $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$. ■

Соотношение между прямой задачей А и двойственной задачей A_1 описывает

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $Q \neq \varnothing$, $H_1 \neq \varnothing$;

2) $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$;

3) $\operatorname{Min} H_1 \neq \varnothing$;

4) $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_1 = Q \cap H_1 \neq \varnothing$.

(*Если* $Q \neq \varnothing$ *и* $H_1 \neq \varnothing$, *то* $H_1 = H$ (*лемма* 2).)

Доказательство. Следование 4) $\to$ 3) очевидно. Благодаря утверждению 1) леммы 3, имеет место 3) $\to$ 2). Если $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$, то в силу теоремы 2 задача (7) имеет допустимое решение. Следовательно, $H_1 \neq \varnothing$, и поэтому 2) $\to$ 1). Докажем следование 1) $\to$ 4). Согласно утверждению 2) леммы 3 из неравенств $Q \neq \varnothing$, $H_1 \neq \varnothing$ вытекает $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$, а в силу леммы 2 $H_1 = H$. В этих условиях, применяя следствие 1, получаем $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_1 = Q \cap H_1$. ■

Выше в примере 2 было показано, что из существования допустимых решений в прямой задаче А и в двойственной задаче А, вообще говоря, не следует существование оптимальных решений в этих задачах (т. е. из $Q \neq \varnothing$ и $H \neq \varnothing$ не следует неравенство $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$ или $\operatorname{Min} H \neq \varnothing$). В этом смысле двойственная задача A_1 обладает тем преимуществом, что из наличия допустимых решений в прямой задаче А и в двойственной задаче A_1 всегда следует $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_1 \neq \varnothing$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий результаты теоремы 3.

Пример 3. Пусть в линейной задаче А $n = 6$, $m = 4$, $k = 3$ и

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Здесь прямая задача будет иметь следующий вид: *найти множество максимальных векторов среди всех векторов* $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{aligned} q_1 &\leqq x_1 - x_5, \\ q_2 &\leqq x_2 - x_6, \\ q_3 &\leqq -x_3, \\ q_4 &\leqq x_3 + x_4 + x_5, \\ x_1 - x_4 - 2x_6 &\leqq 5, \\ x_2 + 2x_4 + 2x_6 &\leqq 3, \\ x_3 + 2x_4 + 5x_5 &\leqq 5, \\ x_1, x_2, \ldots, x_6 &\geqq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В этой задаче 10 переменных и 7 ограничений в форме неравенств (не считая неравенств $x_i \geqq 0$).

Двойственная задача $А_1$ принимает вид: *найти множество минимальных векторов среди всех векторов* $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered} \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 h_3 + \mu_4 h_4 \geqq 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3, \\ \lambda_1 \geqq \mu_1, \ \ \lambda_2 \geqq \mu_2, \ \ \lambda_3 \geqq -\mu_3 + \mu_4, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geqq \mu_4, \\ 5\lambda_3 \geqq -\mu_1 + \mu_4, \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geqq -\mu_2, \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 > 0; \ \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqq 0. \end{gathered} \tag{10}$$

В этой задаче 11 переменных: $h_1, \ldots, h_4, \mu_1, \ldots, \mu_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Но так как переменные $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ связаны равенством $\sum\limits_{i=1}^{4} \mu_i = 1$, то независимых переменных 10.

Нетрудно проверить, что значения

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1/4, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1/4, \quad \lambda_3 = 0$$

удовлетворяют всем условиям (10), не считая первого неравенства. Следовательно, $H_1 \neq \varnothing$. А так как $Q \neq \varnothing$, то согласно теореме 3 $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_1 = Q \cap H_1$.

Таким образом, множество эффективных оценок исходной задачи в точности совпадает с множеством векторов q, удовлетворяющих одновременно неравенствам (9) и соотношениям (10), где в первом неравенстве вместо h_i стоит q_i, $i = 1, 2, \ldots, 4$.

Рассмотрим решение $x^0 = (5, 3, 5, 0, 0, 0)$, $q^0 = (5, 3, -5, 5)$. Оно является допустимым в прямой задаче, т. е. $q^0 \in Q$. Кроме того, видно, что для упомянутых выше значений $\mu_1, \ldots, \mu_4$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ выполняется и первое неравенство в (10);

$$\frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 \geqq 5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $q^0 \in Q \cap H_1$. Поэтому рассмотренное решение является эффективным.

Пусть $x = 0_{(6)}$, $q = 0_{(4)}$. Это решение является допустимым в прямой задаче, но для него первое неравенство в (10) может иметь место лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тогда, например, второе неравенство в (10) примет вид $0 \geqq \mu_1$, чего быть не должно. Следовательно, $q = 0_{(4)} \notin H_1$, т. е. оценка q не является эффективной.

4. В этом пункте будем рассматривать прямую задачу В (т. е. задачу с ограничениями в форме равенств). Напомним ее формулировку: *найти множество* $\operatorname{Max} Q$, *где* Q *вида* (1), *а* X *определяется равенством* (3).

Двойственная задача B_1 в этом случае заключается в нахождении множества $\operatorname{Min} H_1$ при

$$H_1 = \bigcup_{\lambda} \bigcup_{\mu} \big\{ h \in E^m \mid \langle \mu, h \rangle \geqq \langle \lambda, b \rangle \big\},$$

где объединение берется по всем векторам $\lambda \in E^k$ и $\mu \in \mathrm{M}$, для которых выполняется неравенство $\lambda A \geqq \mu C$.

Если для некоторого $j = 1, 2, \ldots, k$ выполняется $b_j < 0$, то умножением j-го равенства в системе $Ax = b$ на -1 придем к системе с $b'_j = -b_j > 0$. Поэтому, не уменьшая общности, далее будем считать, что $b \geqq 0_{(k)}$.

Введем множество

$$H_2 = \bigcup_U \bigcup_\mu \{h \in E^m \mid h \geqq Ub\},$$

где U — числовая матрица размера $m \times k$ и объединение берется по всем U и $\mu \in \mathrm{M}$, для которых выполняется неравенство $\mu UA \geqq \mu C$. Покажем, что при незначительных предположениях введенное множество H_2 совпадает с H_1.

Если $h \in H_2$, то по определению множества H_2 имеем

$$h \geqq Ub, \quad \mu UA \geqq \mu C \tag{11}$$

для некоторой матрицы U и некоторого вектора $\mu \in \mathrm{M}$. Положим $\mu U = \lambda \in E^k$. Тогда

$$\langle \mu, h\rangle \geqq \langle \lambda, b\rangle, \quad \lambda A \geqq \mu C, \tag{12}$$

т. е. $h \in H_1$. Включение $H_2 \subseteq H_1$ доказано.

Пусть $h \in H_1$, т. е. имеет место (12). Покажем, что найдется матрица U, для которой справедливо (11). Сначала рассмотрим случай, когда $\langle \mu, h\rangle = \langle \lambda, b\rangle$.

Вектор λ всегда можно представить в виде

$$\lambda_i = \lambda_0 + \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad \delta_1 = 0,$$

где $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k$ — некоторые числа. Предположим, что $\sum\limits_{j=1}^{k} b_j \neq 0$ и введем матрицу

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 + \delta_2 & \ldots & u_1 + \delta_k \\ u_2 & u_2 + \delta_2 & \ldots & u_2 + \delta_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u_m & u_m + \delta_2 & \ldots & u_m + \delta_k \end{pmatrix},$$

где

$$u_i = \frac{h_i - \sum\limits_{j=2}^{k} \delta_j b_j}{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Нетрудно убедиться в том, что для этой матрицы U равенство $h = Ub$ выполняется. Остается проверить справедливость равенства $\lambda = \mu U$. Действительно, для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$ имеем

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i + \delta_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i h_i - \sum\limits_{j=2}^{k} \delta_j b_j}{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j} + \delta_j =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i b_i - \sum\limits_{j=2}^{k} \delta_j b_j}{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j} + \delta_j = \lambda_0 + \delta_j.$$

В соответствии с доказанным для данной матрицы U в случае $\langle \mu, h\rangle = \langle \lambda, b\rangle$ из (12) следует (11), т. е. $H_1 \subseteq H_2$.

Теперь пусть $\langle \mu, h\rangle > \langle \lambda, b\rangle$. В силу $\mu > 0_{(m)}$ существует такой вектор $h' \in E^m$, что $\langle \mu, h'\rangle = \langle \lambda, b\rangle$ и $h' < h$. Согласно доказанному выше $h' \in H_2$. Поэтому и $h \in H_2$.

Сформулируем полученные результаты в следующей лемме.

Лемма 4. *Справедливы утверждения*:

1) $H_2 \subseteq H_1$;

2) *если* $b \geq 0_{(k)}$, *то* $H_2 = H_1$.

Как показывает нижеследующий пример условно $b \geq 0_{(k)}$ в лемме 4 является существенным.

Пример 4. $n = 2, m = 2, k = 1$ и

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = (1 \quad 0), \quad b = 0.$$

В силу $b = 0$ имеем $H_2 = E^2_{\geqq}$ так как, например, для $\mu = (1/2, 1/2)$ и $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ выполняется равенство $\mu UA = \mu C$. Однако $H_1 \neq E^2_{\geqq}$. В самом деле, например, $(1, -1) \in H_1$, так как для $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$, $\lambda = 1$ справедливо

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \geqq 1 \cdot 0, \quad 1 \cdot (1 \quad 0) \geqq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, прямой задаче B можно сопоставить следующую двойственную задачу.

Двойственная задача B_2. *Найти множество* $\operatorname{Min} H_2$.

Связь между прямой задачей В и двойственной задачей B_2 устанавливает теорема 4, которая следует непосредственно из теоремы 3 и леммы 4.

Теорема 4. *Пусть* $b \geq 0_{(k)}$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $Q \neq \varnothing,\ H_2 \neq \varnothing$;
2) $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$;
3) $\operatorname{Min} H_2 \neq \varnothing$;
4) $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_2 = Q \cap H_2 \neq \varnothing$.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Следующие два условия эквивалентны*:

1) $\mu U A \geqq \mu C$ *для некоторого* $\mu \in \mathrm{M}$;
2) $U A w \overset{=}{>} C w$ *для всех* $w \in E^n_{\geqq}$.

Доказательство. Условие 2) означает несовместность системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} (C - UA)w &\geqq 0_{(m)}, \\ w &\geqq 0_{(n)}. \end{aligned}$$

По теореме Таккера об альтернативе (§ 2.2) это имеет место тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\mu \in \mathrm{M}$, что при некотором z верно

$$\mu C - \mu U A + z = 0_{(n)}, \quad z \geqq 0_{(n)}.$$

Последнее эквивалентно условию 1). ■

В соответствии с этой леммой множество H_2 допускает представление

$$H_2 = \bigcup_U \bigl\{ h \geqq Ub \mid UAw \overset{=}{>} Cw \ \text{ для всех } \ w \in E^n_{\geqq} \bigr\}.$$

Оказывается, множество минимальных элементов множества H_2 совпадает с множеством минимальных элементов следующего множества:

$$H_3 = \bigcup_U \bigl\{ h \in E^m \mid h = Ub \bigr\},$$

где объединение берется по всем U таким, что $UAw \overset{=}{>} Cw$ для всех $w \in E^n_{\geqq}$, т. е. имеет место равенство

$$\operatorname{Min} H_2 = \operatorname{Min} H_3. \tag{13}$$

Проверим это равенство. Согласно лемме 5 множество H_3 можно представить в виде

$$H_3 = \bigcup_U \bigcup_\mu \{h \in E^m \mid h = Ub\}, \tag{14}$$

где объединение берется по всем U и $\mu \in \mathrm{M}$, для которых выполняется неравенство $\mu UA \geqq \mu C$. Если $h \in \operatorname{Min} H_2$, то в силу минимальности элемента h имеем

$$h = Ub, \quad \mu UA \geqq \mu C$$

для некоторой матрицы U и некоторого вектора $\mu \in \mathrm{M}$. Следовательно, $h \in H_3$. Но $H_3 \subseteq H_2$, и поэтому $h \in \operatorname{Min} H_3$.

Если $h \in \operatorname{Min} H_3$, то $h \in H_2$. Пусть, например, существует такой элемент $h' \in H_2$, что $h' \leq h$. Тогда

$$U'b \leqq h' \leq h$$

для такой матрицы U', что $\mu U'A \geqq \mu C$ при некотором $\mu \in \mathrm{M}$. $U'b \in H_3$, а значит, элемент h не является минимальным элементом множества H_3. Равенство (13) доказано.

Введем следующую двойственную задачу, эквивалентную двойственной задаче B_2. Эту двойственную задачу ввел Г. Изерман [173, 175, 176].

Двойственная задача B_3. *Найти множество* $\operatorname{Min} H_3$.

Теорема 5. *Предположим, что* $b \geq 0_{(k)}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $Q \neq \varnothing$, $H_3 \neq \varnothing$;

2) $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$;

3) $\operatorname{Min} H_3 \neq \varnothing$;

4) $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_3 = Q \cap H_3 \neq \varnothing$.

Доказательство. Легко понять, что $H_3 \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $H_2 \neq \varnothing$. Поэтому утверждение 1) данной теоремы равносильно утверждению 1) теоремы 4. Согласно равенству (13) утверждения 3) данной теоремы и теоремы 4 также равносильны. Остается проверить эквивалентность утверждений 4). Если имеет место 4) теоремы 4, то в силу (13) $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_3$ и $Q \cap H_2 \subseteq Q \cap H_3$. Но так как $H_3 \subseteq H_2$, то $Q \cap H_3 \subseteq Q \cap H_2$. Поэтому $Q \cap H_2 = Q \cap H_3$. Обратно, если имеет место 4) данной теоремы, то справедливо $\operatorname{Max} Q \neq \varnothing$, откуда, согласно теореме 4 следует утверждение 4) теоремы 4. ■

Рассмотрим следующий иллюстративный пример.

Пример 5. Пусть в линейной задаче B матрицы C, A и вектор b такие же, как в примере 3. Выпишем прямую задачу: найти множество максимальных векторов среди всех векторов $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}
q_1 &\leqq x_1 - x_5,\\
q_2 &\leqq x_2 - x_6,\\
q_3 &\leqq -x_3,\\
q_4 &\leqq x_3 + x_4 + x_5,\\
x_1 - x_4 - 2x_6 &= 5,\\
x_2 + 2x_4 + 2x_6 &= 3,\\
x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 5,\\
x_1, x_2, \ldots, x_6 &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Двойственная задача B_3 с множеством H_3 вида (14) формулируется следующим образом: найти множество минимальных векторов среди всех векторов $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}
h_1 &= 5u_{11} + 3u_{12} + 5u_{13},\\
h_2 &= 5u_{21} + 3u_{22} + 5u_{23},\\
h_3 &= 5u_{31} + 3u_{32} + 5u_{33},\\
h_4 &= 5u_{41} + 3u_{42} + 5u_{43},
\end{aligned}$$

$$\mu_1 u_{11} + \mu_2 u_{21} + \mu_3 u_{31} + \mu_4 u_{41} \geqq \mu_1,$$

$$\mu_1 u_{12} + \mu_2 u_{22} + \mu_3 u_{33} + \mu_4 u_{42} \geqq \mu_2,$$

$$\mu_1 u_{13} + \mu_2 u_{23} + \mu_3 u_{33} + \mu_4 u_{43} \geqq -\mu_3 + \mu_4,$$

$$\mu_1(-u_{11} + 2u_{12} + 2u_{13}) + \mu_2(-u_{21} + 2u_{22} + 2u_{23}) + \\ + \mu_3(-u_{31} + 2u_{32} + 2u_{33}) + \mu_4(-u_{41} + 2u_{42} + 2u_{43}) \geqq \mu_4,$$

$$5\mu_1 u_{13} + 5\mu_2 u_{23} + 5\mu_3 u_{33} + 5\mu_4 u_{43} \geqq -\mu_1 + \mu_4,$$

$$\mu_1(-2u_{11} + 2u_{12}) + \mu_2(-2u_{21} + 2u_{22}) + \mu_3(-2u_{31} + 2u_{32}) + \\ + \mu_4(-2u_{41} + 2u_{42}) \geqq -\mu_2,$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1,$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 > 0.$$

Нетрудно проверить, что значения

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1/4, \quad u_{ij} = 1,$$
$$i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3,$$

удовлетворяют всем условиям в двойственной задаче. Поэтому $H_3 \neq \varnothing$, а, значит, $\operatorname{Max} Q = \operatorname{Min} H_3 = Q \cap H_2$.

Рассмотрим допустимое для прямой задачи решение $x^0 = (5, 3, 0, 0, 1, 0)$, $q^0 = (4, 3, 0, 1)$. Для того чтобы представить вектор q^0 в виде $q^0 = Ub$, можно взять

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что для этих значений коэффициентов матрицы U и для $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1/4$ все условия в двойственной задаче выполнены. Следовательно, x^0 — эффективное решение, а q^0 — его эффективная оценка исходной прямой задачи.

Матрица U, которая участвует в формулировках двойственных задач B_2 и B_3, допускает простую интерпретацию в терминах многокритериального симплекс-метода. Однако прежде чем дать эту интерпретацию, напомним некоторые понятия, связанные с обычным симплекс-методом.

Пусть система ограничений скалярной задачи линейного программирования

$$\langle c, x\rangle \to \max,$$
$$Ax = b, \quad x \in E^n_{\geqq},$$

такова, что $\operatorname{rang} A = k$ (т. е. «лишние» уравнения уже исключены) и $b \geqq 0_{(k)}$. Предположим, что x^0 — некоторое допустимое базисное решение системы линейных уравнений $Ax = b$. Без потери общности можно считать, что первые l $(l \leqq k)$ компонент вектора x^0 положительны, а остальные равны нулю. Согласно определению базисного решения первые l вектор-столбцов матрицы A линейно независимы. Поскольку $\operatorname{rang} A = k$, то найдутся такие $k - l$ вектор-столбцов матрицы A, которые вместе с l первыми образуют линейно независимую систему. Можно считать, что такую линейно независимую систему составляют первые k вектор-столбцов. Обозначим матрицу, которую они составляют, через A_B, а оставшуюся «часть» матрицы A — через A_N. Введем также обозначения

$$x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \quad x_N = (x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

В этих обозначениях систему линейных уравнений $Ax = b$ можно записать в виде

$$A_B x_B + A_N x_N = b.$$

Умножая данное равенство слева на матрицу A_B^{-1} (заметим, что в силу $\operatorname{rang} A_B = k$ такая матрица существует), получим систему линейных уравнений

$$x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b, \tag{15}$$

равносильную исходной.

Теперь преобразуем целевую функцию $\langle c, x\rangle$ так, чтобы в нее не входили базисные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Для этого равенство (15) скалярно умножим на вектор $c_B = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ и найдем

$$\langle c_B, x_B\rangle = -\langle c_B, A_B^{-1} A_N x_N\rangle + \langle c_B, A_B^{-1} b\rangle.$$

Далее, обозначая $c_N = (c_{k+1}, \ldots, c_n)$ и учитывая найденное, можно записать

$$\langle c, x\rangle = \langle c_B, x_B\rangle + \langle c_N, x_N\rangle = \langle c_N - c_B A_B^{-1} A_N, x_N\rangle + c_B A_B^{-1} b.$$

Исходя из полученного представления целевой функции, легко прийти к следующему выводу: если выполняется неравенство

$$c_N - c_B A_B^{-1} A_N \leqq 0_{(n-k)}, \tag{16}$$

то переход от x^0 к новому допустимому базисному решению не приведет к увеличению значения целевой функции $\langle c, x^0\rangle$, т. е. решение x^0 будет оптимальным. Следовательно, неравенство (16) представляет собой условие оптимальности допустимого базисного решения x^0. Легко понять, что (16) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\langle c_B A_B^{-1} A - c, x\rangle \geqq 0 \;\text{ для всех }\; x \in E^n_{\geqq}. \tag{17}$$

Посмотрим теперь, какой вид примет условие оптимальности (эффективности) (17) в задаче с прежней системой ограничений, но с векторной целевой функцией Cx. По аналогии с вышеприведенным через C_B обозначим матрицу из вектор-столбцов матрицы C, отвечающих базисным переменным, а через C_N — матрицу из вектор-столбцов, отвечающих небазисным переменным. Используя равенство (15), находим

$$C_B x_B = -C_B A_B^{-1} A_N x_N + C_B A_B^{-1} b,$$

и поэтому можно записать

$$Cx = C_B x_B + C_N x_N = \big(C_N - C_B A_B^{-1} A_N\big) x_N - C_B A_B^{-1} b.$$

Отсюда, так же как и в случае одной целевой функции, приходим к выводу, что базисное решение x^0 будет эффективным, если

$$(C_N - C_B A_B^{-1} A_N) x_N \overline{\overline{<}}\, 0_{(m)} \quad \text{для всех} \quad x_N \in E^{n-k}_{\geqq}.$$

Это эквивалентно следующему условию:

$$(C_B A_B^{-1} A - C) w \overline{\overline{>}}\, 0_{(m)} \quad \text{для всех} \quad w \in E^{n}_{\geqq}.$$

Последнее, согласно лемме 5, равносильно существованию такого вектора $\mu \in \mathrm{M}$, что

$$\mu C_B A_B^{-1} A \geqq \mu C.$$

Полученное неравенство есть не что иное, как условие для матрицы $U^0 = C_B A_B^{-1}$ быть допустимой в двойственной задаче B_2 (и в двойственной задаче B_3). Таким образом, если матрица U^0 является допустимой в двойственной задаче B_2 (двойственной задаче B_3), то допустимое базисное решение x^0 будет эффективным по вектор-функции Cx относительно рассматриваемого множества ограничений. Потребность в проверке допустимости матрицы U^0 возникает на первой фазе работы многокритериального симплекс-метода, когда отыскивается допустимое базисное решение, являющееся эффективным (т. е. начальное эффективное базисное решение). Заметим, что конкретная реализация подобной проверки может быть осуществлена различными способами.

5. Как указывалось ранее, двойственная задача A_1 была введена Д. Гейлом, Х. Куном и А. Таккером в [154]. Следует, однако, заметить, что в этой работе рассматривались линейные задачи более общего вида, чем $\mathrm{Max}\, Q$ и $\mathrm{Min}\, H_1$, и теорема 3 из п. 3 — это лишь частный случай результатов авторов работы [154].

Приведем здесь формулировки линейных задач, изучению которых посвящена работа [154]. Для этого условимся писать $S \geq S^0$ для матриц одинакового размера $m \times r$, если все элементы матрицы $S - S^0$ неотрицательны и хотя бы один — положительный. Будем говорить (см. [154]), что матрица S^0 является максимальной (минимальной) в некотором фиксированном множестве матриц размера $m \times r$, если S^0 принадлежит этому множеству и в нем не существует такой матрицы S, что $S \geq S^0$ ($S \leq S^0$). Нетрудно видеть, что последнее определение естественным образом согласуется с общим определением максимального (минимального) элемента, данного в § 1.2.

Пусть A, B, C — матрицы соответствующих размеров $k \times n$, $k \times r$, $m \times n$, а S и Z — матрицы размера $m \times r$.

Прямая задача A_t. *Найти максимальные матрицы множества*

$$\widetilde{S} = \bigcup_x \bigcup_t \{ S \mid St \leqq Cx \},$$

где объединение берется по всем $x \in E^n_{\geqq}$, $t \in E^r_{>}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} t_i = 1$, *удовлетворяющим неравенству* $Ax \leqq Bt$.

Двойственная задача A_μ. *Найти минимальные матрицы множества*

$$\overline{Z} = \bigcup_\lambda \bigcup_\mu \{ Z \mid \mu Z \geqq \lambda B \},$$

где объединение берется по всем $\lambda \in E^k_{\geqq}$, $\mu \in \mathrm{M}$, *удовлетворяющим неравенству* $\lambda A \geqq \mu C$.

Легко видеть, что при $r = 1$ вектор-параметр t исчезает, матрицы S, Z, B становятся векторами соответствующих размеров и первая задача с точностью до обозначений совпадает с прямой задачей A (см. п. 1), а вторая — с двойственной задачей A_1.

Если в теореме 3 из п. 3 Q заменить на $\widetilde{S}$, H_1 — на $\widetilde{Z}$ и операции Max (Min) понимать как операции над матрицами в смысле, определенном выше, то эта теорема укажет соотношение между сформулированными задачами, установленное в [154].

В заключение отметим, что между задачами A_t, A_μ и парой параметрических задач из п. 2 имеется тесная связь. Эта связь рассматривалась, например, в работах [176, 214].

Послесловие

Современная теория Парето-оптимальных решений начала формироваться в начале 50-х годов, хотя некоторые ее результаты, часто в неявном виде, были получены значительно раньше в других разделах математики [226]. Особенно интенсивно она развивалась в последнее десятилетие.

В книге изложение этой теории было ограничено в основном наиболее разработанным к настоящему времени случаем статической одноуровневой модели принятия решений при конечном числе критериев в условиях определенности. С состоянием теории многокритериальной оптимизации процессов можно ознакомиться по обзору [98]. Оптимальные по Парето иерархические системы анализируются в статьях [47, 270, 275]. Парето-оптимальные решения при риске и неопределенности рассматриваются в работах [10, 45, 81, 83, 260, 265]. Задачи с бесконечным числом критериев исследуются в [61, 255, 256]. Оптимальные по Парето решения в моделях, описываемых на языке нечетких множеств, изучаются, например, в статьях [258, 291].

Ряд работ, выполненных в самое последнее время, указан в списке литературы, добавленном при корректуре.

Авторы надеются, что эта книга будет способствовать дальнейшему развитию теории и разработке эффективных методов принятия решений при многих критериях.

Дополнительные библиографические ссылки

Ниже перечисляются литературные источники ряда теорем, лемм, следствий и примеров, не указанные в библиографических комментариях, примечаниях и ссылках, приведенных в основном тексте книги.

Теоремы

1.6.1	Дж. Борвейн [124]
2.1.1	Ю. Б. Гермейер [19, 21]; М. Койима [182]; В. Бауман [125]
2.1.2	В. В. Подиновский [85]
2.1.3	Л. Гурвич [30]
2.1.5	В. В. Подиновский [76, 77, 85]; Л. Бенсусан, Ж.-Л. Лионе, Р. Темам [6]; А. Пейн, Э. Полак [206]; Дж. Лин [191, 195]; Г. Рухе [216]
2.1.6	А. Чарнс, У. Купер [130]; А. С. Красненкар [46]
2.1.7	Л. Гурвич [30]; В. В. Подиновский [77]; И. Марушчак, М. Рэдулеску [199]
2.1.9	Ю. Б. Гермейер [20, 22]
2.1.10	А. Джоффрион [160], В. В. Подиновский [77]
2.1.11	В. В. Подиновский [77]
2.1.12	В. Д. Ногин [70]
2.2.1	П. Ю [246]
2.2.2	Л. Гурвич [30]; С. Карлин [41]
2.2.4	А. Джоффрион [161]
2.2.6	Х. Кун, А. Таккер [187]; С. Карлин [41]; Л. Гурвич [30]; А. Джоффрион [161]
2.3.1	У. Джархарт [157]
2.4.1	Н. Да Кунха, Э. Полак [137]; А. Джоффрион [161]
2.4.2	В. Д. Ногин [65]
2.4.3	А. Джоффрион [161]
2.5.1	Й.-Х. Ван [237]; В.В. Гороховик [26]
2.5.2	С. Смейл [222, 223]; Й.-Х. Ван [237]; В. В. Гороховик [26]
3.1.2, 4	В. В. Подиновский [77]
3.1.7	К. Эрроу, Е. Баранкин, Д. Блекуэлл [104]
3.2.4	В. В. Подиновский [77]
3.2.5	В. Д. Ногин [69, 71]
3.3.2	К. Эрроу, Е. Баранкин, Д. Блекуэлл [104]
3.3.4	П. Ю, М. Зелени [248]
3.4.1	В. Б. Алексеев [2]; Т. М. Виноградская, М. Г. Гафт [15]; М. К. Альбертьян [3]

3.4.3	Б. А. Березовский, С. И. Травкин [7]; Т. М. Виноградская [14]; Х. Кэлпайн, А. Гоулдинг [128]
3.4.4	О. Барндорф–Нилсон, М. Собль [5]; Б. А. Березовский, С. И. Травкин [7]
4.4.2	Дж. Корнблют [185]
4.4.3	Д. Гейл, Х. Кун, А. Таккер [154]
4.4.5	Г. Изерман [175]

Леммы

1.2.1	В. Д. Ногин [67]
2.1.1	В. Д. Ногин [70]
2.2.2	С. Карлин [41]
2.2.3	В. Д. Ногин [66]
2.3.1	В. В. Подиновский [77]
3.1.1	В. Д. Ногин [71]
3.3.1, 2	П. Ю, М. Зелени [248]
3.4.1, 2	В. Б. Алексеев [2]
4.4.3	Д. Гейл, Х. Кун, А. Таккер [154]

Следствия

2.1.1	В. В. Подиновский [85]
2.1.2	Л. С. Гуткин [31–33], Дж. Лин [191, 193, 194]
2.1.3	В. В. Подиновский [77], Р. Соуленд [224]
2.1.5	А. Джоффрион [161]
2.2.1	В. Д. Ногин [66]
2.2.2	Х. Йокш [178]
2.2.3	В. В. Подиновский [77]; Г. Изерман [172]
3.1.2	В. В. Подиновский [77]
3.1.4	Б. Пелег [207]
3.1.5	Н. Да Кунха, Э. Полак [137]
3.1.6	Б. Пелег [207]
3.1.7	В. В. Морозов [59]
3.2.1, 2	В. Д. Ногин [71]

Примеры

1.7.1	Дж. Лоузер, Р. Вольц [189]
2.1.2	Т. Купманс [184]; Х. Кун, А. Таккер [187]; А. Джоффрион [160]
2.1.3	И. Марушчак, М. Рэдулеску [199]; В. В. Подиновский [79]; В. В. Меркурьев, М. А. Молдавский [55]
2.1.4	Г. Фандель [148]; С. Хуанг [171]; П. Ю [245]
2.1.5	В. В. Подиновский [77]; Л. Паскуаль, А. Бен-Израэль [205]; Р. Рэйд, В. Вемури [213]
2.1.7	В. В. Подиновский [77, 79]; А. Бен-Израэль, А. Бен-Таль, А. Чарнс [110]; Р. Уэнделл, Д. Ли [241]
2.1.11	В. В. Подиновский [77]
3.1.3	К. Эрроу, Е. Баранкин, Д. Блекуэлл [104]
3.2.4	Х. Бенсон [111]; В. Д. Ногин [71]

Список литературы

1. *Айзерман М. А., Малишевский А. В.* Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов. (Препринт). — М.: Ин-т проблем управления, 1980.
2. *Алексеев В. Б.* Использование симметрии при нахождении ширины частично упорядоченного множества // Дискретный анализ. — 1974. — Вып. 26. — С. 20–35.
3. *Альбертьян М. К.* О комбинаторных характеристиках несравнимости в задачах принятия решений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1974. — №6. — С. 3–12.
4. *Баранцев А. В.* Правило множителей для векторной задачи оптимизации // В кн.: Матем. анализ и его приложения. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1975. — Т. 7. — С. 184–190.
5. *Барндорф–Нилсон О., Собль М.* О распределении числа элементов многомерной выборки, принадлежащих заданному слою // Теория вероятн. и ее примен. — 1966. — Вып. 2. — С. 283–305.
6. *Бенсусан А., Лионе Ж.-Л., Темам Р.* Методы декомпозиции, децентрализации, координации и их приложения // В кн.: Методы вычислит. матем. — Новосибирск: Наука, 1975. — С. 144–274.
7. *Березовский Б. А., Травкин С. И.* Диспетчеризация очередей заявок в вычислительных системах // АиТ. — 1975. — № 10. — С. 165–171.
8. *Бешелев С. Д.* Метод «затраты–эффективность» (обзор) // Экономика и матем. методы. — 1970. — Т. 6, вып. 5. — С. 719–732.
9. *Бондарева О. Н.* Сходимость пространств с отношением и теоретико-игровые следствия // ЖВМиМФ. — 1979. — №3. — С. 84—92.
10. *Бурштейн Ф. В., Корелов Э. С.* Многокритериальные задачи принятия решений при неопределенности и риске // В кн.: Теоретич. кибернетика. — Тбилиси: Мецниереба, 1980. — С. 143–148.
11. *Вальд А.* Статистические решающие функции // В кн.: Позиционные игры. — М.: Наука, 1967. — С. 300–522.
12. *Вилкас Э. Й.* Существование эффективно-равновесных точек в задаче векторной оптимизации // Литовский матем. сб. — 1968. — Т. 8, № 1. — С. 41–44.
13. *Виноградская Т. М.* Использование свойств частично упорядоченных множеств в многокритериальных задачах принятия решений // В кн.: Проблемы принятия решений. — М.: Ин-т проблем управления, 1974. — Вып. 5. — С. 56–60.

14. *Виноградская Т. М.* Среднее значение числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1976. — № 2. — С. 36–38.

15. *Виноградская Т. М.*, *Гафт М. Г.* Точная верхняя оценка числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах // АиТ. — 1974. — № 9. — С. 111–118.

16. *Воробьев Н. Н.* Современное состояние теории игр // УМН. — 1970. — Т. 25, вып. 2 (152). — С. 81–140.

17. *Гамидов Р. Г.*, *Фарбер М. Ш.* О принятии решения в задачах многокритериальной оптимизации // Изв. АН Азерб. ССР. Физ.-техн. и матем. наук. — 1978. — № 3. — С. 11–16.

18. *Гафт М. Г.*, *Озерной В. М.* Выделение множества неподчиненных решений и их оценок в задачах принятия решений при векторном критерии // АиТ. — 1973. — № 11. — С. 85–94.

19. *Гермейер Ю. Б.* Методологические и математические основы исследования операций и теории игр. — М.: ВЦ МГУ, 1967.

20. *Гермейер Ю. Б.* Игровые принципы в исследовании систем // В кн.: Методы управления большими системами. — Иркутск: Изд-во СЭИ, 1970. — С. 4–24.

21. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971.

22. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976.

23. *Гермейер Ю. Б.*, *Морозов В. В.*, *Сухарев А. Г.*, *Федоров В. В.* Задачи по исследованию операций. — М.: Изд-во МГУ, 1979.

24. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Физматгиз, 1971.

25. *Гороховик В. В.* К проблеме векторной оптимизации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1972. — № 6. — С. 63–70.

26. *Гороховик В. В.* Условия слабой эффективности в конечномерных задачах векторной оптимизации. — Минск: Ин-т матем. АН БССР, 1976. — Препринт.

27. *Гороховик В. В.*, *Кириллова Ф. М.* О скаляризации задач векторной оптимизации // Докл. АН БССР. — 1975. — Т. 19, № 7. — С. 588–591.

28. *Гранберг А. Г.* Математические модели социалистической экономики. — М.: Экономика, 1978.

29. *Гупал А. М.* Стохастические методы решения негладких экстремальных задач. — Киев: Наукова думка, 1979.

30. *Гурвиц Л.* Программирование в линейных топологических пространствах // В кн.: *Эрроу К. Дж.*, *Гурвиц Л.*, *Удзава Х.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. — М.: ИЛ, 1962. — С. 65–155.

31. *Гуткин Л. С.* О синтезе систем по безусловному критерию предпочтения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1972. — №3. — С. 190–197.

32. *Гуткин Л. С.* О применении метода крайних точек при синтезе по векторному критерию. I, II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1973. — №4. — С. 178–183; — №5. — С. 138–144.

33. *Гуткин Л. С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. — М.: Сов. радио, 1975.

34. *Дымков М. П.* Метод решения общей многокритериальной задачи линейного программирования // В кн.: Проблемы управления и оптимизации. — Минск, 1976. — С. 147–157.

35. *Еремин И. И.* Метод штрафных функций в задачах векторной оптимизации // Тр. ин-та математики и механики. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. — Вып. 5. — С. 63–73.

36. *Ерешко Ф. И.*, *Злобин А. С.* Оптимизация линейной формы на эффективном множестве // В кн.: Численные методы нелинейного программирования: Тез. докл. II Всесоюзн. семинара. — Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1976. — С. 167–170.

37. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. — М.: Сов. радио, 1973.

38. *Иванин В. М.* Асимптотическая оценка математического ожидания числа элементов множества Парето // Кибернетика. — 1975. — №1. — С. 97–101.

39. *Иванин В. М.* Об одной оценке математического ожидания числа элементов множества Парето // Кибернетика. — 1975. — №3. — С. 145–146.

40. *Казакова М. Ф.* Нахождение оптимумов Парето в полиматричной задаче коммивояжера // В кн.: Матем. методы решения эконом. задач. — М.: Наука, 1974. — №5. — С. 55–61.

41. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964.

42. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

43. *Комлик В. И.*, *Куриленков В. И.* О структуре множества неулучшаемых решений // Изв. АН БССР, сер. Физ.-матем. наук. — 1976. — №4. — С. 132–133.

44. *Комлик В. И.*, *Куриленков В. И.*, *Ромашкина Н. В.* Об одном алгоритме построения множества неулучшаемых планов // Автоматизир. системы план. расчетов в республ. план. органах. — 1977. — Вып. 9. — С. 18–21.

45. *Корниенко И. А.* О нескалярных минимаксных задачах // В кн.: Исследование операций и аналит. проектир. в технике. — Казань: Изд-во Каз. авиац. ин-та, 1979. — С. 3–8.

46. *Красненкер А. С.* Условия оптимальности по Парето // Сб. трудов Воронежского ун-та по прикл. вопросам. — Воронеж, 1972. — Вып. 3. — С. 73–77.
47. *Краснощеков П. С.*, *Морозов В. В.*, *Федоров В. В.* Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем // Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернет. — 1979. — №5. — С. 5–12.
48. *Кукса А. И.*, *Шор Н. З.* О методе оценки количества условно-оптимальных траекторий дискретного сепарабельного программирования // Кибернетика. — 1972. — №6. — С. 37–44.
49. *Кулаковская Т.* Классические принципы оптимальности для бесконечных кооперативных игр // В кн.: Современные направления теории игр. — Вильнюс: Мокслас, 1976. — С. 94–108.
50. *Куратовский К.* Топология. — М.: Мир, 1966. — Т. 1; 1969. — Т. 2.
51. *Ланкастер К.* Математическая экономика. — М.: Сов. радио, 1972.
52. *Ли Э. В.*, *Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
53. *Льюс Р. Д.*, *Райфа Х.* Игры и решения. — М.: ИЛ, 1961.
54. *Ляшко И. И.*,*Кигель В. Р.* О некоторые свойствах эффективных планов многокритериальной задачи // В кн.: Вычислит. матем. в совр. научно-техн. прогрессе. — Канев, 1974. — С. 407–418.
55. *Меркурьев В. В.*, *Молдавский М. А.* Семейство сверток векторного критерия для нахождения точек множества Парето // АиТ. — 1979. — №1. — С. 110–121.
56. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974.
57. *Миркин Б. Г.*, *Полищук Л. И.* Использование карт паретовой границы в человеко-машинных процедурах решения многокритериальных задач // Тез. докл. III Всесоюз. конф. по исслед. операций. — Горький, 1978. — С. 211–212.
58. *Молодцов Д. А.* Регуляризация множества точек Парето // ЖВМиМФ. — 1978. — №3. — С. 597–602.
59. *Морозов В. В.* О свойствах множества недоминируемых векторов // Вестник МГУ, сер. Вычисл. матем. и киберн. — 1977. — №4. — С. 47–51.
60. *Морозов В. В.*, *Федоров В. В.* О формировании векторного критерия по бинарному отношению предпочтения // ЖВМиМФ. — 1980. — №3. — С. 630–639.
61. *Наумов Г. Е.* Правило множителей для векторной задачи оптимизации с бесконечным множеством критериев // Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернет. — 1978. — №2. — С. 36–38.
62. *Фон Нейман Дж.*, *Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
63. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972.

64. *Ногин В. Д.* О существовании эффективных и собственно эффективных точек для линейной вектор-функции // Деп. рук. — М.: ВИНИТИ, 1975.

65. *Ногин В. Д.* К задаче многоцелевого программирования // Деп. рук. — М.: ВИНИТИ, 1975.

66. *Ногин В. Д.* Некоторые вопросы многокритериальной оптимизации систем // Проблемы системотехники: Материалы III Всесоюзн. симпозиума. — Л., 1976. — Ч. 2. — С. 187–190.

67. *Ногин В. Д.* Двойственность в многоцелевом программировании // ЖВМиМФ. — 1977. — № 1. — С. 254–258.

68. *Ногин В. Д.* Взаимосвязь различных видов решений задачи многоцелевого программирования // Вестник ЛГУ, сер. Матем., механ., астроном. — 1977. — № 19. — С. 143–144.

69. *Ногин В. Д.* Критерии существования решений в конечномерной задаче многоцелевой оптимизации // Тез. докл. III Всесоюзн. конф. по исследованию операций. — Горький, 1978. — С. 214–215.

70. *Ногин В. Д.* Об условиях оптимальности в многоцелевой оптимизации // В кн.: Численные методы нелинейного программирования. — Харьков, 1979. — С. 139–140.

71. *Ногин В. Д.* Критерии существования решений в конечномерной задаче многоцелевой оптимизации // Вестник ЛГУ, сер. Матем., механ., астроном. — 1980. — № 7. — С. 27–32.

72. *Озерной В. М.*, *Буянов Б. В.*, *Васькина Л. М.* Алгоритм выделения множества неподчиненных решений в многокритериальных задачах // В кн.: Проблемы принятия решений. — М.: Ин-т проблем управления, 1974. — Вып. 5. — С. 61–67.

73. *Озерной В. М.*, *Гафт М. Г.* Методология решения дискретных многокритериальных задач // В кн.: Многокритериальные задачи принятия решений. — М.: Машиностроение, 1978. — С. 14–47.

74. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1968.

75. *Орлов А. И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Экономика, 1978.

76. *Подиновский В. В.* Применение процедуры максимизации основного локального критерия для решения задач теории векторной оптимизации // Управляемые системы. — 1970. — Вып. 6. — С. 17–22.

77. *Подиновский В. В.* Методы многокритериальной оптимизации. Вып. 1. Эффективные планы. — М.: ВИА им. Ф. Э. Дзержинского, 1971.

78. *Подиновский В. В.* Эффективные последовательности и их свойства // В кн.: Матем. методы в социальн. науках. — Вильнюс, 1972. — Вып. 2. — С. 75–88.

79. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // ЖВМиМФ. — 1975. — № 2. — С. 330–344.

80. *Подиновский В. В.* О решении многокритериальной задачи как задачи оптимизации по одному критерию в условиях неопределенности // Автоматика и вычисл. техника. — 1976. — №3. — С. 45–49.
81. *Подиновский В. В.* Эффективные планы в многокритериальных задачах принятия решений в условиях неопределенности // В кн.: Модели процессов принятия решений. — Владивосток, 1978. — С. 102–113.
82. *Подиновский В. В.* Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // В кн.: Многокритериальные задачи принятия решений. — М.: Машиностроение, 1978. — С. 48–92.
83. *Подиновский В. В.* Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения // ЖВМиМФ. — 1979. — №6. — С. 1436–1450.
84. *Подиновский В. В.* Общие антагонистические игры // ЖВМиМФ. — 1981. — №5. — С. 1140–1153.
85. *Подиновский В. В.*, *Гаврилов В. М.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Сов. радио, 1975.
86. *Полищук Л. И.* Об одном семействе диалоговых процедур принятия многокритериальных решений // В кн.: Системы и методы обработки данных. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978. — С. 76–86.
87. *Полищук Л. И.* Кусочно-линейная аппроксимация паретовой границы выпуклых двухкритериальных задач // В кн.: Модели и методы исследования эконом, систем. — Новосибирск: Наука, 1979. — С. 108–116.
88. *Поспелов Г. С.*, *Ириков В. А.* Программно-целевое планирование и управление. — М.: Сов. радио, 1976.
89. *Пфанцагль И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976.
90. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1969.
91. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
92. *Розен В. В.* Ситуации равновесия в играх с упорядоченными исходами // В кн.: Современные направления в теории игр. — Вильнюс: Мокслас, 1976. — С. 115–118.
93. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
94. *Руа Б.* К общей методологии выработки и принятия решений // Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. — М.: Статистика, 1979. — С. 123–167.
95. *Смейл С.* Глобальный анализ и экономика. I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса // УМН. — 1972. — Т. 27, вып. 3(165). — С. 177–187.
96. Современное состояние теории исследования операций / Под ред. *Н. Н. Моисеева.* — М.: Наука, 1979.

97. *Статников Р. Б.* Решение многокритериальных задач проектирования машин на основе исследования пространства параметров // В кн.: Многокритериальные задачи принятия решений. — М.: Машиностроение, 1978. — С. 148–155.
98. *Тынянский Н. Т.*, *Жуковский В. И.* Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техники, сер. Матем. анализ. — М.: ВИНИТИ, 1979. — Т. 17. — С. 3–112.
99. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978.
100. *Хоменюк В. В.*, *Чемерис М. Б.* Об улучшаемости в многокритериальных задачах // В кн.: Прикладные методы теории оптимизации. — Владивосток, 1977. — С. 28–33.
101. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
102. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1979.
103. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971.
104. *Эрроу К. Дж.*, *Баранкин Е. В.*, *Блекуэлл Д.* Допустимые точки выпуклых множеств // В кн.: Матричные игры. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 274–280.
105. *Юдин Д. В.*, *Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование. — М.: Наука, 1969.
106. *Юттлер Х.* Линейная модель с несколькими целевыми функциями // Экономика и матем. методы. — 1967. — Т. III, вып. 3. — С. 397–406.

107. *Achilles A.*, *Elster K.-H.*, *Nehse R.* Bibliographie zur Vectoroptimierung (Theorie und Anwendungen) // Math. Operationsforsch. Statist. Optimization. — 1979. — B. 10, №2. — S. 277–321.
108. *Aneja Y. P.*, *Nair K. P. K.* Bicriteria transportation problem // Manag. Sci. — 1979. — V. 25, №1. — P. 73–78.
109. *Arrow K. J.* Social choice and individual values. 2.-ed. — N.Y.: Wiley, 1963.
110. *Ben-Israel A.*, *Ben-Tal A.*, *Charnes A.* Necessary and sufficient conditions for a Pareto optimum in convex programming // Econometrica. — 1977. — V. 45, №4. — P. 811–820.
111. *Benson H. P.* Existence of efficient solutions for vector maximization problems // JOTA. — 1978. — V. 26, №4. — P. 569–580.
112. *Benson H. P.* An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones // J. Math. Anal. and Appl. — 1979. — V. 71, №1. — P. 232–241.
113. *Benson H. P.* Vector maximization with two objective functions // JOTA. — 1979. — V. 28, №2. — P. 253–257.

114. *Benson H. P., Morin T. L.* The vector maximization problem: proper efficiency and stability // SIAM J. Appl. Math. — 1977. — V. 32, № 1. — P. 64–72.
115. *Benveniste M.* Testing for complete efficiency in a vector maximization problem // Math. program. — 1977. — V. 12. — P. 285–288.
116. *Bergstresser K., Charnes A., Yu P. L.* Generalization of domination structures and nondominated solutions in multicriteria decision making // JOTA. — 1976. — V. 18, № 1. — P. 3–13.
117. *Bergström T. C.* Maximal elements of acyclic relations on compact sets // J. Econ. Theory. — 1975. — V. 10, № 3. — P. 403–404.
118. *Bhatia D., Gupta B.* Efficiency in certain nonlinear fractional vector maximization problems // Indian J. Pure Appl. Math. — 1980. — V. 11, № 5. — P. 669–672.
119. *Bitran G. R.* Linear multiple objective programs with zero-one variables // Math. Program. — 1977. — V. 13, № 2. — P. 121–139.
120. *Bitran G. R.* Theory and algorithms for linear multiple objective programs with zero-one variables // Math. Program. — 1979. — V. 17, № 3. — P. 362–390.
121. *Bod P.* Lineáris programozás több, egyidejűleg adott cél-függvény szerint // Magyar tudom. akad. matem. kutató intéz. közl. — 1964. — № 4. — P. 541–558.
122. *Bod P.* On closed sets having a least element. — Optimization and Oper. Res. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976. — P. 23–34.
123. *Bogart K. P.* Maximal dimensional partially ordered set // Discrete Math. — 1975. — V. 5, № 1. — P. 21–31.
124. *Borwein J.* Proper efficient points for maximization with respect to cones // SIAM J. Control and Optimiz. — 1977. — V. 15, № 1. — P. 57–63.
125. *Bowman V. J.* On the relationship of the Tchebysheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives // Lectures Notes in Econ. and Math. Syst. — 1976. — V. 130. — P. 76–86.
126. *Bragard L., Vangeldére J.* Points efficaces en programmation á objectifs multiples // Bull. Soc. Royale Sci. Liége. — 1977. — № 1–2. — P. 27–41.
127. *Brucker P.* Discrete parameter optimization problem and essential efficient points // Z. Operat. Res. — 1972. — B. 16, № 5. — S. 189–197.
128. *Calpine H. C, Golding A.* Some properties of Pareto-optimal choices in decision problems // OMEGA. — 1976. — V. 4, № 2. — P. 141–147.
129. *Censor Y.* Pareto optimality in multiobjective problems // Appl. Math. and Optim. — 1978. — V. 4, № 1. — P. 41–59.
130. *Charnes A., Cooper W. W.* Management models and industrial applications of linear programming. — N.Y.: Wiley, 1961. — V. 1.
131. *Chu K.-Ch.* On the noninferior set for the systems with vector-valued objective function // IEEE Trans. Automat. Control. — 1970. — V. AC–15, № 5. — P. 591–593.

132. *Clarke F. H.* Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — V. 205. — P. 247–262.
133. *Cohon J. L.* Multiobjective programming and planning. — N.Y. etc.: Academic Press, 1978.
134. *Cohon J. L.*, *Church R. L.*, *Sheer D. P.* Generating multiobjective trade-offs: an algorithm for bicriterion problems // Water Resources Res. — 1979. — V. 15, №5. — P. 1001–1010.
135. *Cohon J. L.*, *Marks D. H.* Multiobjective screening models and water resources investment // Water Resources Res. — 1973. — V. 9, №4. — P. 826–836.
136. *Corley H. W.* An existence result for maximizations with respect to cones // JOTA. — 1980. — V. 31, №2. — P. 277–281.
137. *Da Cunha N. O.*, *Polak E.* Constrained minimization under vector-valued criteria in finite dimensional spaces // J. Math. Anal. and Appl. — 1967. — V. 19, №1. — P. 103–124.
138. *Dathe H. M.* Zur Lösung des Zuordnungsproblems bei zwei Zielgrößen // Z. Oper. Res. — 1978. — B. 22. — S. 105–118.
139. *Dauer J. P.* An equivalence result for solutions of multiobjective linear programs // Computers and Oper. Res. — 1980. — V. 7, №1. — P. 33–39.
140. *Dinkelbach W.* Sensitivitätanalysen und parametrische Programmierung. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.
141. *Dinkelbach W.* Über einen Lösungansatz zum Vektormaximumproblem // In: Unternehmensforschung Heute. — Berlin: Springer-Verlag, 1971. — S. 1–13.
142. *Ecker J. G.*, *Hegner N. S.* On computing an initial efficient extreme point // J. Opl. Res. Soc. — 1978. — V. 29, №10. — P. 1005–1007.
143. *Ecker J. G.*, *Hegner N. S.*, *Kouada I. E.* Generating all maximal efficient faces for multiple objective linear programs // JOTA. — 1980. — V. 30, №3. — P. 353–381.
144. *Ecker J. G.*, *Kouada I. A.* Finding efficient points for linear multiple objective programs // Math. Program. — 1975. — V. 8, №3. — P. 375–377.
145. *Ecker J. G.*, *Kouada I. A.* Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs // Math. Program. — 1978. — V. 14, №2. — P. 249–261.
146. *Elster K.-H.*, *Nehse R.* Necessary and sufficient conditions for the order-completeness of partially ordered vector spaces // Math. Nachr. — 1978. — B. 81. — S. 301–311.
147. *Evans J. P.*, *Steuer R. E.* A revised simplex method for linear multiple objective programs // Math. Program. — 1973. — V. 5, №1. — P. 54–72.
148. *Fandel G.* Optimal Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1972.

149. *Focke J.* Vektormaximumproblem und parametrische Optimierung // Math. Oper. und Statist. — 1973. — B. 4, № 5. — S. 365–369.
150. *Frehel J.* Problémes multicritéres: théorie de la domination de Yu et efficacité de Pareto // Merta. — 1974. — V. 13, № 1. — P. 47–57.
151. *Gal T.* A general method for determining the set of all efficient solutions to a linear vectormaximum problem // Europ. J. Oper. Res. — 1977. — V. 1, № 5. — P. 307–322.
152. *Gal T.*, *Leberling H.* Relaxation analysis in multi-criteria linear programming: an introduction // In.: Adv. Oper. Res. — Amsterdam, 1977. — P. 177–180.
153. *Gal T.*, *Leberling H.* Redundant objective functions in linear vector maximum problems and their determination // Europ. J. Oper. Res. — 1977. — V. 1. — P. 176–184.
154. *Gale D.*, *Kuhn H. W.*, *Tucker A. W.* Linear programming and the theory of game // In: Activity analysis of production and allocation. — N.Y.: Wiley, 1951. — P. 317–329.
155. *Gass S.*, *Saaty T.* The computational algorithm for the parametric objective function // Naval Res. Logistics Quart. — 1955. — V. 2, № 1–2. — P. 39–45.
156. *Gawrych-Zukowski A.*, *Kotowski J.*, *Utasiewicz J.* Polyoptimierungsprobleme mit nicht konvexen Zielmengen // Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden. — 1980. — № 2. — S. 427–429.
157. *Gearhart W. B.* On the characterization of Pareto-optimal solution in bicriteria optimization // JOTA. — 1979. — V. 27, № 2. — P. 301–307.
158. *Gearhart W. B.* Compromise solutions and estimation of the noninferior set // JOTA. — 1979. — V. 28, № 1. — P. 29–47.
159. *Geoffrion A. M.* Strictly concave parametric programming. I, II // Man. Sci. — 1966. — V. 13. — P. 244–253, 359–370.
160. *Geoffrion A. M.* Solving bicriterion mathematical programs // Oper. Res. — 1967. — V. 15, № 1. — P. 39–54.
161. *Geoffrion A. M.* Proper efficiency and the theory of vector maximization // J. Math. Anal. and Appl. — 1968. — V. 22, № 3. — P. 618–630.
162. *Giesy D. P.* Calculation of Pareto-optimal solutions to multiple-objective problems using threshold-of-acceptability constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1978. — V. AC–23. — P. 1114–1115.
163. *Goffin J. L.*, *Haurie A.* Pareto optimality with nondifferentiable cost functions // Lectures Notes in Econ. and Math. Syst. — 1976. — V. 130. — P. 232–246.
164. *Gros C.* Generalization of Fenchel's duality theorem for convex vector optimization // Europ. J. Oper. Res. — 1979. — V. 2. — P. 368–376.
165. *Gupta R.* Time-cost transportation problem // Ekon.-matem. obzor. — 1977. — Č. 3. — S. 431–443.
166. *Haimes Y.* Integrated system identification and optimization // In: Control and dinamic systems: advances in theory and applications. — N.Y.: Academic Press, 1973. — V. 9. — P. 435–518.

167. *Hannan E. L.* Using duality theory for identification of primal efficient points and for sensitivity analysis in multiple objective linear programming // J. Opl. Res. Soc. — 1978. — V. 29, № 7. — P. 643–649.

168. *Hartley R.* Aspects of partial decisionmaking — kernels of quasi-ordered sets // Econometrica. — 1976. — V. 44, № 3. — P. 605–608.

169. *Hartley R.* On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness // SIAM J. Appl. Math. — 1978. — V. 34, № 2. — P. 211–222.

170. *Hiraguti T.* On the dimension of orders // Sci. Rep. Kanazawa Univ. — 1955. — V. 4, № 4. — P. 1–20.

171. *Huang S. C.* Note on the mean-square strategy for vector-valued objective functions // JOTA. — 1972. — V. 9, № 5. — P. 364–366.

172. *Isermann H.* Proper efficiency and the linear vector maximum problem // Oper. Res. — 1974. — V. 22, № 1. — P. 189–191.

173. *Isermann H.* Existence and duality in multiple-objective programming // Lectures Notes in Econ. and Math. Syst. — 1976. — V. 130. — P. 64–75.

174. *Isermann H.* The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program // Oper. Res. Quart. — 1977. — V. 28, № 3ii. — P. 711–725.

175. *Isermann H.* On some relations between a dual pair of multiple-objective linear programs // Z. Oper. Res. — 1978. — B. 22, № 1. — S. 33–41.

176. *Isermann H.* Duality in multiple-objective linear programming // Lectures Notes Econ. and Math. Syst. — 1978. — V. 155. — P. 274–285.

177. *Isermann H.* The enumeration of all efficient solutions for a linear multiple-objective transportation problem // Naval Res. Logistics Quart. — 1979. — V. 26, № 1. — P. 123–140.

178. *Joksch H. C.* Constraints, objectives, efficient solutions and suboptimization in mathematical programming // Z. für die gesamte Staatswissenschaft. — 1966. — B. 122, № 1. — S. 5–13.

179. *Kalai E.*, *Shmeidler P.* On admissible set occuring in various bargaining situations // J. Econ. Theory. — 1977. — V. 14, № 2. — P. 402–411.

180. *Kao E. P. C.* A multiple objective decision theoretic approach to one-machine scheduling problems // Comput. and Oper. Res. — 1980. — V. 7, № 4. — P. 251–259.

181. *Keeney R. L.*, *Raiffa H.* Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs. — N.Y.: Wiley, 1976.

182. *Kojima M.* Vector maximum problems // Keio Engin. Reports. — 1971. — V. 24, № 4. — P. 47–64.

183. *Kojima M.* Duality between objects and constraints in vector optimum problems // J. Oper. Res. Soc. Japan. — 1972. — V. 15. — P. 53–62.

184. *Koopmans T. C.* Analysis of production as an efficient combination of activities // In: Activity analysis of production and allocation. — N.Y.: Wiley, 1951. — P. 33–97.

185. *Kornbluth J. S. H.* Duality, indifference and sensitivity analysis in multiple objective linear programming // Oper. Res. Quart. — 1974. — V. 25. — P. 599–614.

186. *Kornbluth J. S. H.* Accounting in multiple-objective linear programming // Accounting Rev. — 1974. — V. XLIX (2). — P. 284–295.

187. *Kuhn H. W.*, *Tucker A. W.* Nonlinear programming // In: Proc. Second Berkley Symp. on Math. Stat. and Probab. — Berkeley: Univ. California Press, 1951. — P. 481–492.

188. *Kung H. T.*, *Luccio F.*, *Preparata F. P.* On finding the maxima of set of vectors // J. Assoc. Comput. Mach. — 1975. — V. 22, №4. — P. 469–476.

189. *Lawser J. J.*, *Volz R. A.* A nonzero-sum differential game with curious solution properties // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1972. — V. AC–17. — P. 717–718.

190. *Leclerc B.* Arbres et dimensions des ordres // Discrete Math. — 1976. — V. 14, №1. — P. 69–76.

191. *Lin J. G.* Three methods for determining Pareto-optimal solutions of multiple-objective problems // In: Directions in large-scale systems. — N.Y.–L.: Plenum Press, 1976. — P. 117–138.

192. *Lin J. G.* Maximal vectors and multi-objective optimization // JOTA. — 1976. — V. 18, №1. — P. 41–68.

193. *Lin J. G.* Proper equality constraints and maximization of index vectors // JOTA. — 1976. — V. 20, №2. — P. 215–244.

194. *Lin J. G.* Multiple-objective problems: Pareto-optimal solutions by method of proper equality constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1976. — V. AC–21. — P. 641–650.

195. *Lin J. G.* Proper inequality constraints and maximization of index vectors // JOTA. — 1977. — V. 21, №4. — P. 505–521.

196. *Lin J. G.* Multiple-objective optimization by a multiplier method of proper equality constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1979. — V. AC–24, №4. — P. 567–573.

197. *Mangasarian O. L.* Nonlinear programming. — N.Y.–L.: McGraw-Hill, 1969.

198. *Mangasarian O. L.*, *Sutherland W. R. S.* Solution of the linear inverse vector optimization problem by a single linear program // Math. Program. — 1978. — V. 15. — P. 232–235.

199. *Maruşciac I.*, *Rădulescu M.* Sur l'ensemble des points effecients d'un probleme de la programmation mathématique // Ann. Sti. Univ. Iasi. — 1972. — Sec. 1A. — V. 18, №1. — P. 209–226.

200. *Masud A. S. M.*, *Hwang C. L.* Multiple-objective decision making-methods and applications. — Berlin etc: Springer-Verlag, 1979.

201. *Mukherji A.* The existence of choice functions // Econometrica. — 1977. — V. 45, №4. — P. 889–894.

202. *Naccache P.* Connectedness of the set of nondominated outcomes in multicriteria optimization // JOTA. — 1978. — V. 25. — P. 459–467.
203. *Naccache P.* Stability in multicriteria optimization // J. Math. Anal. and Appl. — V. 68, № 2. — P. 441–453.
204. *Pareto V.* Manuel d'économie politique. — Paris: Giard, 1909.
205. *Pascual L. D., Ben-Israel A.* Vector-valued criteria in geometric programming // Oper. Res. — 1971. — V. 19, № 1. — P. 98–104.
206. *Payne A. N., Polak E., Collins D. C., Meisel W. S.* An algorithm for bicriteria optimization based on the sensitivity functions // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1975. — V. AC–20, № 5. — P. 546–548.
207. *Peleg B.* Topological properties of the efficient point set // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 35. — P. 531–536.
208. *Philip J.* Algorithms for the vector maximization problem // Math. Program. — 1972. — V. 2, № 2. — P. 207–229.
209. *Philip J.* An algorithm for combined quadratic and multi-objective programming // In: Lectures Notes in Econ. and Math. Syst. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976. — V. 130. — P. 35–52.
210. *Philip J.* Vector maximization at a generate vertex // Math. Program. — 1977. — V. 13, № 3. — P. 357–359.
211. *Polak E.* On the approximation of solutions to the multiplecriteria decision making problems // In: Lectures Notes in Econ. and Math. Syst. — Berlin etc.: Springer-Verlag. — V. 123. — P. 271–282.
212. *Polak E., Payne A. N.* On multicriteria optimization // In book: Directions in large-scale systems. — N.Y.–L.: Plenum Press, 1976. — P. 77–94.
213. *Reid R. W., Vemuri V.* On the noninferior index approach to large-scale multicriteria systems // J. Franklin Inst. — 1971. — V. 291, № 4. — P. 241–254.
214. *Rödder W.* A generalized saddlepoint theory. Its application to duality theory for linear vector optimum problems // Europ. J. Oper. Res. — 1977. — V. 1. — P. 55–59.
215. *Rudeanu S.* Programmation bivalente à plusieur fonctions economiques // RIRO. — 1969. — № V-2. — P. 13–30.
216. *Ruhe G.* Notwendige und hinreichende Bedingungen für Vektoroptimalität // Wissen. Z. Techn. Hochschule Leipzig. — 1978. — № 6. — S. 379–384.
217. *Saska J.* Lineárni multiprogramováni // Ekon.-matem. obzor. — 1968. — Č. 3. — S. 357–373.
218. *Schönfeld P.* Some duality theorems for the non-linear vector maximum problem // Unternehmensforschung. — 1970. — B. 14, № 1. — S. 51–63.
219. *Scobey P., Kabe D. G.* Vector quadratic programming problems and inequality constrained least squares estimation // J. Industr. Math. Soc. — 1978. — V. 28, № 1. — P. 37–50.

220. *Seiford L.*, *Yu P. L.* Potential solutions of linear systems: the multicriteria multiple constraint levels program // J. Math. Anal. and Appl. — 1979. — V. 69, № 2. — P. 283–303.
221. *Sen A. K.* Collective choice and social welfare. — San Francisco: Holden-Day, 1970.
222. *Smale S.* Optimizing several functions // In: Manifolds. — Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1973. — P. 69–75.
223. *Smale S.* Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. — 1974. — V. 1. — P. 213–221.
224. *Soland R. M.* Multicriteria optimization: a general characterization of efficient solutions // Decision Sci. — 1979. — V. 10, № 1. — P. 26–38.
225. *Srinivasan V.*, *Thompson G. L.* Algorithms for minimizing total cost, bottleneck time and bottleneck shipment in transportation problems // Naval Res. Logistics Quart. — 1976. — V. 23. — P. 567–595.
226. *Stadler W.* A survey of multicriteria optimization or the vector maximum problem, part I: 1776–1960 // JOTA. — 1979. — V. 29, № 1. — P. 1–52.
227. *Tabak D.* Computer based experimentation with multicriteria optimization problems// IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. — 1979. — V. SMC–9, № 10. — P. 676–679.
228. *Takao U.* The continuity of a critical points set with applications to some decision problems // SIAM J. Appl. Math. — 1971. — V. 21, № 1. — P. 145–154.
229. *Tamura K.* A method for constructing the polar cone of a polyhedral cone, with applications to linear multicriteria decision problems// JOTA. 1976. — V. 19, № 4. — P. 547–564.
230. *Tamura K.*, *Miura S.* On linear vector maximization problems // J. Oper. Res. Soc. Japan, 1977. — V. 20, № 3. — P. 139–149.
231. *Tamura K.*, *Miura S.* Necessary and sufficient condition for local and global nondominated solutions in decision problems with multiobjectives// JOTA. — 1979. — V. 28, № 4. — P. 501–523.
232. *Tanino T.*, *Sawaragi Y.* Duality theory in multiobjective programming // JOTA. — 1979. — V. 27, № 4. — P. 509–529.
233. *Tanino T.*, *Sawaragi Y.* Stability of nondominated solutions in multicriteria dicision-making // JOTA. — 1980. — V. 30, № 2. — P. 229–253.
234. *Tanino T.*, *Sawaragi Y.* Conjugate maps and duality in multiobjective optimization // JOTA. — 1980. — V. 31, № 4. — P. 473–499.
235. *Wald A.* Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypothesis // Annals Math. Statist. — 1939. — V. 10. — P. 299–326.
236. *Walker M.* On the existence of maximal elements // J. Econ. Theory. — 1977. — V. 16. — P. 470–474.
237. *Wan Y.-H.* On local Pareto optima // J. Math. Econ., 1975. — V. 2. — P. 35–42.

238. *Wan Y.-H.* On the algebraic criteria for local Pareto optima // In: Dinamical systems. — N.Y.: Academic Press, 1977. — P. 503–505.
239. *Van Wassenhove L. N., Gelders L. F.* Solving a bicriterion scheduling problem // Europ. J. Oper. Res. — 1980. — V. 4, № 1. — P. 42–48.
240. *Wendell R. E., Hurter A. P., Lowe T. J.* Efficient points in location problem // AIIE Trans. — 1977. — V. 9, № 3. — P. 238–246.
241. *Wendell R. E., Lee D. N.* Efficiency in multiple-objective optimization problems // Math. Program. — 1977. — V. 12, № 3. — P. 406–414.
242. *White D. J.* Kernels of preference structures // Econometrica. — 1977. — V. 45, № 1. — P. 91–99.
243. *White D. J.* Duality and vector optima for polyhedral sets // J. Opl. Res. Soc. — 1979. — V. 30, № 1. — P. 81–84.
244. *White D. J.* Optimality and efficiency. I, II // Europ. J. Oper. Res., 1980. — V. 4. — P. 346–355; — V. 6. — P. 426–427.
245. *Yu P. L.* A class of solutions for group decision problems // Man. Sci., 1973. — V. 19, № 8. — P. 936–946.
246. *Yu P. L.* Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives// JOTA. — 1974. — V. 14, № 3. — P. 319–377.
247. *Yu P. L., Zeleny M.* The techniques of linear multiobjective programming // RAIRO. — 1974. — V. 8, № V–3. — P. 51–71.
248. *Yu P. L., Zeleny M.* The set of all non-dominated solutions in linear cases and a multicriteria simplex method // J. Math. Anal. and Appl. — 1975. — V. 49, № 2. — P. 430–468.
249. *Zadeh L. A.* Optimality and nonscalar-valued performance criteria // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1963. — V. AC–8. — P. 59–60.
250. *Zeleny M.* Linear multiobjective programming. — N.Y.–Berlin: Springer-Verlag, 1974.
251. *Zeleny M.* MCDM bibliography-1975 // Lectures Notes in Econ. and Math. Syst. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976. — V. 123. — P. 291–321.
252. *Zeleny M.* Multicriteria simplex method: a FORTRAN routine // Lectures Notes in Econ. and Math. Syst. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976. — V. 123. — P. 323–345.
253. *Zionts S., Wallenius J.* Identifying efficient vectors: some theory and computational result // Oper. Res. — 1980. — V. 28, № 3 (II). — P. 785–793.
254. *Zowe J.* Fenchelsche Dualitätsaussagen in endlichdimensionalen halbgeordneten Vektorräumen // ZAMM. — 1973. — B. 53. — S. 230–232.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ КОРРЕКТУРЕ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ

255. *Алексейчик М. И., Наумов Г. Е.* О существовании эффективных точек в задаче бесконечномерной векторной оптимизации // АиТ. — 1981. — № 5. — С. 135–140.

256. *Алексейчик М. И.*, *Наумов Г. Е.* Свойства и устойчивость оптимальных альтернатив в бесконечномерном критериальном пространстве // I Всесоюзн. совещ. по статист. и дискр. анализу, нечисл. информ., эксп. оценкам и дискр. оптим.: Тез. докл. — М.–Алма-Ата, 1981. — С. 304–305.
257. *Березовский Б. А.*, *Борзенко В. И.*, *Кемпнер Л. М.* Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. — М.: Наука, 1981.
258. *Вачнадзе Р. Г.*, *Метревели Д. Г.* Парето-оптимальные решения с нечеткими целями и ограничениями // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1979. — №3. — С. 565–567.
259. *Глинкин И. А.* Об одновременном поиске экстремумов нескольких функций // В кн.: Математические методы в исследовании операций. — М.: МГУ, 1981. — С. 46–54.
260. *Турин Л. Г.* О понятии точек равновесия и точек Парето в задачах со случайными факторами // ЖВМиМФ. — 1981. — №6. — С. 1411–1422.
261. *Демьянов В. Ф.*, *Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981.
262. *Дубов Ю. А.* Устойчивость оптимальных по Парето векторных оценок и ε-равномерные решения // АиТ. — 1981. — №6. — С. 139–146.
263. *Емеличев В. А.*, *Комлик В. И.* Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1981.
264. *Ерошов С. А.* О представлении бинарного отношения векторным критерием // I Всесоюзн. совещ. по статист, и дискр. анализу, нечисл. информ., эксп. оценкам и дискр. оптим.: Тез. докл. — М.–Алма-Ата, 1981. — С. 316–317.
265. *Жуковин В. Е.* Модели и процедуры принятия решений. — Тбилиси: Мецниереба, 1981.
266. *Кини Р. Л.*, *Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981 (русский перевод книги [181]).
267. *Крючков Ю. В.*, *Подиновский В. В.* Взаимные задачи оптимизации систем. — В кн.: Моделирование сложных систем. — Рига: Зинатие, 1973. — Вып. 2. — С. 86–87.
268. *Молдавский М. А.* О выделении множества недоминируемых решений в непрерывных задачах векторной оптимизации // Автоматика. — 1981. — №5. — С. 48–55.
269. *Молдавский М. А.* О равномерности параметризации множества Парето // Проблемы и методы принятия решений в организационных системах управления: Тез. докл. — М.–Звенигород, 1981. — С. 72–73.
270. *Морозов В. В.*, *Федоров В. В.* О линейных задачах в проектировании систем // Вестник МГУ, сер. Вычисл. матем. и киберн. — 1981. — №2. — С. 35–39.

271. *Ногин В. Д.* Связь задачи выбора оптимальных решений с задачей многоцелевой оптимизации // В кн.: Сложные системы управления. — Киев: Ин-т киберн. АН УССР, 1977. — С. 22–31.

272. *Ногин В. Д.*, *Подиновский В. В.* Двойственные многокритериальные задачи // Проблемы и методы принятия решений в организационных системах управления: Тез. докл. — М.–Звенигород, 1981. — С. 78–79.

273. *Полищук Л. И.* Двойственные оценки в многокритериальных задачах и теорема взаимности // В кн.: Методы анализа и взаимодействия в экономических системах. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 60–78.

274. *Полищук Л. И.* Карты паретовой границы, порожденные расслоениями пространства критериев // В кн.: Методы анализа и взаимодействия в экономических системах. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 78–100.

275. *Попов Н. М.* Аппроксимация множества полуэффективных точек при декомпозиции задач проектирования // Вестник МГУ, сер. Вычисл. матем. и киберн. — 1981. — №1. — С. 44–48.

276. *Рапопорт Л. Б.* Об одном методе решения минимаксных задач и поиска эффективных точек с помощью штрафных функций // Модели и методы формирования и многокритериального выбора предпочтительных вариантов систем: Сб. трудов. — Вып. 1. — М.: ВНИИСИ, 1981. — С. 91–97.

277. *Соболь И. М.*, *Статников Р. Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Наука, 1981.

278. *Травкин С. И.*, *Глущенко А. С.* Классификация элементов случайной выборки при последовательном выделении паретовских множеств // Модели и методы формирования и многокритериального выбора предпочтительных вариантов систем: Сб. тр. — Вып. 1. — М.: ВНИИСИ, 1981. — С. 48–64.

279. *Шефер Е. А.* Применение метода ветвей и границ для построения множества Парето в дискретной задаче векторной оптимизации. — М.: ВИНИТИ, 1981. — Деп. рукопись.

280. *Benson H. P.* Finding an initial efficient extreme point for a linear multiple objective program // J. Opl. Res. Soc. — 1981. — V. 32. — P. 495–498.

281. *Bragard L.*, *Vangeldère J.* Adjonction ou suppression d'objectifs en programmation à objectifs linéaires multiples // Canad. Math. Bull. — 1980. — V. 23, №2. — P. 143–153.

282. *Brumelle Sh.* Duality for multiple objective convex programs // Mathematics Ops. Res. — 1981. — V. 6, №2. — P. 159–172.

283. *Burkard R. E.*, *Keiding H.*, *Pruzan P. M.* A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0–1 programming problems // Comput. Ops. Res. — 1981. — V. 8, №4. — P. 241–247.

284. *Corley H. W.* A new scalar equivalence for Pareto optimization // IEEE Trans. Automat. Control. — 1980. — V. AG-25, №4. — P. 829–830.

285. *Corley H. W.* A fixed point interpretation of Pareto optimization // IEEE Trans. Automat. Control. — 1981. — V. AC-26, №3. — P. 766–767.

286. *Gal T.*, *Leberling H.* Relaxation analysis in linear vector-valued maximization // Europ. J. Opl. Res. — 1981. — V. 8, №3. — P. 274–282.

287. *Kornbluth J. S. H.*, *Steuer R. E.* Multiple objective linear fractional programming // Management sci. — 1981. — V. 27, №9. — P. 1024–1039.

288. *Villarreal B.*, *Karwan M. H.* Multicriteria integer programming: a (hybrid) dinamic programming recursive approach // Math. program. — 1981. — V. 21. — P. 204–223.

289. *Wierzbicki A. P.* A methodological guide to multiobjective optimization // In: Lect. Notes Contr. and Inform. Sci. — 1980. — V. 22. — P. 99–123.

290. *White D. J.* Rational solution axioms and efficient sets // Europ. J. Opl. Res. — 1981. — V. 8, №1. — P. 66–75.

291. *Zimmerman H. J.* Fuzzy programming and linear programming with several objective functions // Fuzzy sets and systems. — 1978. — V. 1. — P. 45–55.

Добавление ко второму изданию книги

П. С. Краснощеков, А. В. Лотов

Поскольку монография В. В. Подиновского и В. Д. Ногина переиздается в исходном виде, имеет смысл кратко остановиться на важнейших результатах в области многокритериальной оптимизации, полученных за последние четверть века и потому не вошедшие в нее. Заранее подчеркнем, что в данном добавлении, небольшом по объему, мы смогли остановиться лишь на некоторых работах, изданных, в основном, после 1982 г. и наиболее интересных с нашей точки зрения. Хотя большинство из упомянутых результатов имеет отношение к аппроксимации паретовой границы и множества решений, оптимальных по Парето, мы начнем с вопроса об устойчивости и чувствительности паретовой границы и множества решений, оптимальных по Парето. Основные результаты в этой области подробно изложены в книге [1] в достаточно сложной форме, в связи с чем они остаются не поняты большинством прикладников. По той же причине они не излагаются в учебниках по методам многокритериальной оптимизации (см., например, [2, 3]). Поскольку основной результат прост и весьма важен, мы остановимся на нем.

Для формулировки этого результата в дополнение к решениям, оптимальным по Парето, требуется рассмотреть решения, оптимальные по Слейтеру. Предположим, что множество допустимых решений и критериальная вектор-функция зависят от некоторого вектора параметров возмущения, причем множество достижимых критериальных векторов замкнуто и зависит непрерывно от вектора параметров возмущения в некоторой окрестности невозмущенного вектора параметров. Пусть, кроме того, совокупность этих множеств равномерно ограничена. Тогда для непрерывной зависимости паретовой границы от вектора параметров достаточно совпадения паретовой и слейтеровой границ для невозмущенного вектора параметров. Таким образом, получаем достаточное условие устойчивости паретовой границы (в частности, оно выполнено для строго вогнутых критериев, определенных на выпуклом множестве). То же самое условие совпадения паретовой и слейтеровой границ является и необходимым, если возмущения достаточно широки для того, чтобы произвольно варьировать паретову границу. Отметим, что подобный результат получен (в несколько иной форме) в работах [4, 5].

Вопросы чувствительности точек паретовой границы по отношению к возмущениям параметров системы, т. е. количественная оценка изменения границы при заданных возмущениях, привлекли внимание исследователей и были рассмотрены во многих публикациях. Работы [6–8] являются обзорами публикаций в этой области. Отметим также работу [9].

С работами, посвященными чувствительности, тесно связаны работы по теории двойственности задач многокритериальной оптимизации, уже рассмотренной в книге В. В. Подиновского и В. Д. Ногина. Обзор работ зарубежных ученых примерно того же времени дан в [10]. Из более поздних работ назовем статьи [11–15].

Значительные теоретические и практические результаты были получены в области аппроксимации паретовой границы. Поскольку число переменных в прикладных задачах многокритериальной оптимизации обычно велико и может достигать сотен и тысяч, а число критериев часто не превышает семи–восьми, задача аппроксимации паретовой границы выглядит куда более разумной с прикладной точки зрения, нежели задача аппроксимации множества эффективных решений. В связи с этим основные усилия исследователей были направлены на аппроксимацию паретовой границы.

Отметим, что результаты, полученные при анализе устойчивости паретовой границы, демонстрируют сложность задачи ее аппроксимации. Рассматривая проблему аппроксимации паретовой границы в целом, можно утверждать, что она поставлена некорректно (по Адамару) в связи отсутствием устойчивости для большой совокупности параметров задачи. Даже в линейном случае заранее невозможно установить, выполняется ли требование совпадения паретовой и слейтеровой границ. В случае неустойчивости ошибки округления, возникающие при использовании компьютера, могут привести к существенному отклонению полученной аппроксимации от точной паретовой границы. Поэтому приходится либо использовать методы, для которых неустойчивость паретовой границы не влияет на результат, либо решать эту проблему уже после завершения процесса аппроксимации на основе анализа ее свойств. К сожалению, в большинстве работ, особенно зарубежных, по методам аппроксимации паретовой границы вопросам устойчивости достаточного внимания не уделяется.

Представляет также большой интерес и способ представления ЛПР информации о паретовой границе, поскольку способность ЛПР усвоить предоставляемую информацию определяет в конечном итоге практические достоинства (или недостатки) того или иного метода аппроксимации паретовой границы.

Было предложено большое число подходов к построению методов аппроксимации паретовой границы для задач многокритериальной оптимизации различных типов. Начнем с методов, предназначенных для аппроксимации паретовой границы в линейном случае, а уже потом перейдем к методам, пригодным для нелинейных проблем.

В случае линейных задач паретова граница представляет собой совокупность граней многогранного множества достижимых критериальных векторов. Возникает желание воспользоваться такой структурой паретовой границы и найти ее некоторые элементы. Наиболее известным подходом является многокритериальный симплекс-метод, в рамках которого последовательно находятся все недоминируемые вершины многогранного множества достижимых критериальных векторов (а также недоминируемые бесконечные ребра в случае неограниченности множества). Модификация этого подхода позволяет найти недоминируемые грани всех размерностей с указанием принадлежности граней меньшей размерности граням большей размерности. Информация о паретовой границе представляется ЛПР в таких методах либо в виде списка недоминируемых вершин, либо в виде списка граней всех размерностей с указанием их взаимной принадлежности. Итоги развития этого направления подведены в книге [2]. Хотя в публикациях этого направления обычно не обсуждаются проблемы неустойчивости паретовой границы, на практике строится множество, более широкое, чем паретова граница, чувствительность вершин и граней которого затем анализируется. Отметим версию многокритериального симплекс-метода [16], устойчивую по отношению к возмущениям.

Алгоритм построения граней паретовой границы, не основывающийся на симплекс-методе, предложен в [17].

В связи со сложностью понимания человеком информации о паретовой границе, представляемой в виде большого списка многомерных точек (и тем более многомерных граней), был предложен альтернативный метод информирования ЛПР о паретовой границе на основе ее визуализации [18, 19], см. также [20, 21]. В этом методе, получившем название метода множеств достижимости (или метода достижимых целей), аппроксимируется множество достижимых критериальных векторов или более широкое множество — так называемая оболочка Эджворта–Парето множества достижимых критериальных векторов, представляющая собой максимальное множество в критериальном пространстве, имеющее ту же паретову границу, что и исходное множество достижимых критериальных векторов. В связи с линейностью задачи для аппроксимации можно использовать методы свертывания систем линейных неравенств, предложенные Ж. Б. Фурье в 19 в. Выпуклость множества достижимых критериальных векторов и его оболочки Эджворта–Парето (ОЭП) позволяет использовать также адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. В отличие от паретовой границы, множество достижимых критериальных векторов и его ОЭП обычно устойчивы по отношению к возмущениям параметров задачи, так что проблема неустойчивости объекта аппроксимации исчезает. Адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел оказались эффективным средством аппроксимации множества достижимых критериальных векторов и его ОЭП в выпуклом случае при числе критериев не больше семи–восьми и практически неограниченном числе переменных. Изображение паретовой границы в таких методах основано на интерактивной визуализации совокупностей двухкритериальных сечений аппроксимации (так называемых карт решений, дающих представление о связи значений трех критериев), которая может быть осуществлена очень быстро в связи с предварительной аппроксимацией множества достижимых критериальных векторов и его оболочки Эджворта–Парето. Так, для случая пяти критериев карта решений анимируется, что позволяет проанализировать влияние «четвертого» и «пятого» критериев на первые три, отображенных на карте решений. На основе этих методов было разработано надежное программное обеспечение, устойчивое к ошибкам округления, использующееся в настоящее время в различных прикладных исследованиях, как в России, так и за рубежом [20, 21].

Отметим альтернативный подход к построению карт решений, описанный в [5] и основанный на использовании методов параметрического линейного программирования. В этом методе задаются ограничения на значения всех критериев, кроме двух, после чего строится двухкритериальное сечение паретовой границы. Совокупность таких сечений задает карту решений. Такой подход, однако, не нашел широкого применения в связи с упоминавшейся неустойчивостью паретовой границы, препятствующей созданию надежного программного обеспечения, а также большой трудоемкостью построения даже одного сечения в случае больших размерностей пространства решений, что исключает представление ЛПР паретовой границы в диалоговом режиме. Отметим, что последнее крайне важно при числе критериев, большем трех.

Перейдем к рассмотрению методов аппроксимации паретовой границы для нелинейных задач многокритериальной оптимизации. Для задач с выпуклым множеством допустимых решений и выпуклыми (или вогнутыми) критериальными функциями были предложены специализированные методы, использующие эти свойства задачи (см., например, [4, 22]). При этом на основе оптимизации сверток критериальных функций строятся совокупности точек, аппроксимирующих паретову границу, а их прообразы могут быть использованы в качестве аппроксимации множества решений, оптимальных по Парето. Отметим, что методы [19–21] пригодны для аппроксимации множества достижимых критериальных векторов и его оболочки Эджворта–Парето и в выпуклом случае, так что описанная выше визуализация паретовой границы здесь также возможна.

Остановимся теперь на методах аппроксимации паретовой границы в общем нелинейном случае, когда выпуклости ОЭП нет или доказательства ее отсутствуют. Можно выделить несколько больших групп методов. Прежде всего, это теоретически обоснованный подход, основанный на покрытии допустимого множества шарами, радиусы которых зависят от констант Липшица критериальных функций и функций, задающих ограничения [23–26]. Большим достоинством методов такого типа является то, что они гарантируют точное или приближенное (с контролируемой точностью) построение паретовой границы. Общий недостаток всех таких методов связан с тем, что в большинстве реальных прикладных задач константы Липшица не известны, а их приближенное оценивание может вызвать большие затруднения. В то же время, константы Липшица непосредственно используются в самих алгоритмах, так что эффективность работы алгоритма зависит от точности определения этих констант. Результаты в таких подходах обычно представляются в виде списка критериальных точек, аппроксимирующих паретову границу.

Второе направление составляют методы, основанные на сведении задач многокритериальной оптимизации к параметрической совокупности задач однокритериальной оптимизации, которые могут быть решены численно. Внутри этого направления можно выделить два основных подхода. Первый состоит в выборе ведущего критерия, значение которого максимизируется. На значения остальных критериев накладываются ограничения, величины которых варьируются — они являются параметрами. Выбор сетки в пространстве параметров позволяет сформировать параметрическую совокупность задач оптимизации ведущего критерия. Такой поход, предложенный еще в семидесятые годы прошлого века и постоянно описываемый в учебниках (см., например, [2, 3]), приводит к необходимости решать большое число задач линейного программирования, причем связь между густотой сетки (т. е. числом задач скалярной оптимизации) и точностью аппроксимации паретовой границы не ясна. В связи с этим метод ведущего критерия не нашел широкого применения.

Более перспективным оказался альтернативный подход к построению параметрической совокупности задач однокритериальной оптимизации, основанный на свертывании критериев в единственный параметрический критерий оптимизации. В сущности, работы [4, 22] используют эту идею в выпуклом случае. В невыпуклом случае требуется применять свертки, линии уровня которых совпадают с границей конуса доминирования или близки к ней. Такими свертками являются свертка Чебышева, описывающая отклонение от идеальной или целевой точки, и свертка Гермейера, смысл которой состоит в максимизации значений критериев в некоторой структуре. Для этих сверток решается большое число задач скалярной оптимизации, соответствующих различным значениям параметров, определяемым узлами сетки. При решении таких задач могут применяться разнообразные методы глобальной оптимизации. В частности, может быть использован запуск алгоритмов локальной оптимизации из различных начальных точек (мультистарт) или аппроксимация функций отклика. Такой подход был реализован и использован в практических задачах [27–29]. В рамках этого подхода были разработаны методы регуляризации, т. е. процедуры решения этой задачи, устойчивые по отношению к возмущениям (см., например, [30–36]). Точность аппроксимации методов такого типа можно оценить на основе использования постоянных Липшица, при этом, однако, для достижения разумной точности требуется решить очень большое число задач глобальной оптимизации нелинейных функций. Аппроксимация представляется ЛПР в виде списка критериальных точек.

Третье направление — это методы случайного поиска, использующие расчет критериальных векторов в случайных точках и отбор среди них недоминируемых векторов. Простота этих методов, разработанных в семидесятые годы прошлого века [37], позволила применить их для решения разнообразных задач проектирования технических систем [38]. Хотя в таких методах оценка качества аппроксимации обычно не дается, сходимость процесса гарантируется при стремлении числа случайных точек к бесконечности.

Методы случайного поиска породили новые направления в оптимизации, в том числе и многокритериальной, — методы, основанные на термодинамических и биологических аналогиях. Термодинамические аналогии используются в подходе, получившем название Simulated Annealing (имитированное остывание). В рамках этого подхода множество, на котором происходит случайный поиск, сжимается в зависимости от полученных результатов или по заранее заданной схеме (см., например, [39–41]). Эволюционные методы используют биологические аналогии, например, способы поиска пищи муравьями, поведение стаи птиц и т. д. Наибольшее распространение получили генетические методы, использующие такие биологические понятия, как мутация, кроссовер и отбор [42], в которых одновременно осуществляется поиск многих точек, близких к паретовой границе. В этих методах оценки качества аппроксимации также отсутствуют (обычно качество алгоритма доказывается сравнением аппроксимации с точной заранее известной паретовой границей, которую удается построить лишь в простейших случаях), так что эти методы, по существу, являются эвристическими. Результаты расчета также представляются в виде списка недоминируемых критериальных точек.

В последнее время все чаще встречаются работы, в которых предлагается комбинировать методы аппроксимации паретовой границы, основанные на различных подходах. Так, в работах [43, 44] комбинируются случайный поиск, локальная оптимизация, сжатие области поиска и генетические методы. Благодаря этому удалось, например, аппроксимировать паретову границу в четырехкритериальной задаче управления оборудованием охлаждения стальной полосы в процессе непрерывной разливки стали (см. [45], а также [21]). Вариант управления оборудованием задавался 325 переменными, а значения критериев рассчитывались на основе использования «черного ящика», реализующего алгоритм решения нелинейной краевой задачи. Из-за наличия «черного ящика» найти постоянные Липшица не представлялось возможным, так что качество аппроксимации оценивалось с помощью статистических методов, использование которых в методе [43, 44] оказывается возможным благодаря наличию этапа случайного поиска и того, что аппроксимируется не сама паретова граница, а оболочка Эджворта–Парето (ОЭП) множества достижимых критериальных векторов, аппроксимация которой строится в виде объединения конусов доминирования с вершинами в точках, близких к паретовой границе. Как уже говорилось, благодаря аппроксимации ОЭП исчезают проблемы устойчивости и оказывается возможным легко визуализировать паретову границу в диалоге с ЛПР.

Интересно, что метод визуализации ОЭП, предложенный в [43, 21], позволяет визуализировать информацию о паретовой границе, полученной с помощью любого метода аппроксимации в виде совокупности критериальных точек.

Наконец, появились исследования в области аппроксимации паретовой границы в многокритериальных задачах с неопределенностью. Оказывается, что в таких задачах при использовании принципа гарантированного результата возможна аппроксимация ОЭП [46–48]. Этот факт открывает возможность разработки эффективных численных алгоритмов аппроксимации паретовой границы в задачах с неопределенностью. Такие исследования имеют широкий класс приложений, особенно интересными выглядят приложения, связанные с анализом сетей связи и передачи данных [49].

Список литературы

1. *Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.* Theory of multiobjective optimization. — Orlando: Academic Press, 1985.
2. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. — М.: Радио и связь, 1992.
3. *Miettinen K. M.* Nonlinear Multiobjective Optimization. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
4. *Перевозчиков А. Г.* Об одном способе регуляризации множества полуэффективных точек на выпуклом компакте // Вестник МГУ, сер. Вычисл. матем. и киберн. — 1983. — №3. — С. 48–50.
5. *Полищук Л. И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. — Новосибирск: Наука, 1989.
6. *Gal T., Wolf K.* Stability in Vector Optimization. A Survey // EJOR. — 1986. — V. 25(2). — P. 169–172.
7. *Gal T.* Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics. — Berlin: Walter de Gruyter, 1995.

8. *Давидсон М. Р.* Липшиц-непрерывность паретовых крайних точек // Вестник МГУ, сер. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 4. — С. 41–45.

9. *Dauer J.*, *Liu Y. H.* Multi-criteria and Goal Programming // Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming / T. Gal and H. J. Greenberg (Eds.) — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997.

10. *Nakayama H.* Duality Theory in Vector Optimization: An Overview // Decision making with Multiple Objectives / Y. Y. Haimes and V. Chankong (Eds.) — Berlin: Springer, 1985. — P. 109–125.

11. *Singh C.*, *Bhatia D.*, *Rueda N.* Duality in Nonlinear Multiobjective Programming Using Augmented Lagrangian Functions // JOTA. — 1996. — V. 88(3). — P. 659–670.

12. *Das L. N.*, *Nanda S.* Symmetric Dual Multiobjective Programming // EJOR. 1997. — V. 97(1). — P. 167–171.

13. *Preda V.* On Efficiency and Duality for Multiobjective Programs // J. of Mathematical Analysis and Applic. — 1992. — V. 166(2). — P. 365–377.

14. *Preda V.* Optimality Conditions and Duality in Multiple Objective Programming Involving Semilocally Convex and Related Functions // Optimization. — 1996. — V. 36(3). — P. 219–230.

15. *Luc T. D.* About *Duality* and Alternative in Multiobjective Optimization // JOTA. — 1987. — V. 53(3). — P. 303–307.

16. *Клепикова М. Г.* Регуляризация одного метода построения множества эффективных решений в линейной многокритериальной задаче // Изв. АН СССР. — Техн. кибернетика. — 1985. — № 6. — С. 9–14.

17. *Смирнов М. М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестник МГУ, сер. Вычисл. матем. и киберн. — 1996. — № 3. — С. 37–43.

18. *Лотов А. В.* Исследование экономических систем с помощью множеств достижимости // Тр. междунар. конф. «Моделир. экономич. процессов» (Ереван, апрель 1974). — М.: ВЦ АН СССР, 1975.

19. *Лотов А. В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем // ДАН СССР. — 1980. — Т. 250(5). — С. 1081–1083.

20. *Лотов А. В.*, *Бушенков В. А.*, *Каменев Г. К.*, *Черных О. Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. — М.: Наука, 1997.

21. *Lotov A. V.*, *Bushenkov V. A.*, *Kamenev G. K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.

22. *Нефедов В. Н.* Методы регуляризации многокритериальных задач оптимизации. — М.: МАИ, 1984.

23. *Евтушенко Ю. Г.*, *Потапов М. А.* Методы численного решения многокритериальных задач // ДАН. — 1986. — Т. 291. — С. 25–29.

24. *Евтушенко Ю. Г., Потапов М. А.* Численные методы решения многокритериальных задач // Кибернетика и вычислит. техника. — М.: Наука, 1987. — Вып. 3. — С. 209–218.
25. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. — М.: Наука, 1989.
26. *Попов Н. М.* Приближенное решение многокритериальных задач с функциональными ограничениями // ЖВМиМФ. — 1987. — Т. 26(10). — С. 1468–1481.
27. *Краснощеков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. — М.: МГУ, 1983.
28. *Краснощеков П. С., Петров А. А., Федоров В. В.* Информатика и проектирование. — М.: Знание, 1986.
29. *Вязгин В. А., Федоров В. В.* Математические методы автоматизированного проектирования. — М.: Высшая школа, 1989.
30. *Краснощеков П. С., Морозов В. В., Федоров В. В.* Декомпозиция в задачах проектирования // Изв. АН. Техн. кибетрнетика. — 1979. — №2. — С. 7–17.
31. *Абрамова М. В.* Аппроксимация множества Парето с помощью двухпараметрического семейства сверток // Программное обеспечение вычислительных комплексов. — М.: МГУ, 1985. — С. 155–160.
32. *Морозов В. В.* Об аппроксимации множества Парето с заданной точностью в многокритериальных задачах // Системы: математические методы описания, САПР и управления. — Калинин: КГУ, 1989. — С. 117–126.
33. *Молодцов Д. А.* Устойчивость принципов оптимальности. — М.: Наука, 1987.
34. *Нефедов В. Н.* Об аппроксимации множества Парето // ЖВМиМФ. — 1984. — Т. 24(7). — С. 993–1007.
35. *Нефедов В. Н.* Об аппроксимации множества оптимальных по Парето решений // ЖВМиМФ. — 1986. — Т. 26(2). — С. 163–176.
36. *Попов Н. М.* Об аппроксимации множества Парето методом сверток // Вестник МГУ, Вычисл. Матем. и киберн. — 1982. — №2. — С. 35–41.
37. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Наука, 1981.
38. *Statnikov R. B., Matusov J.* Multicriteria Optimization and Engineering. — New Jersey: Chapman and Hall, 1995.
39. *Chipperfield A. J., Whideborn J. F., Fleming P. J.* Evolutionary algorithms and Simulated Annealing for MCDM // Multicriteria Decision Making: Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory, and Applications. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
40. *Suppaptnarm A., Steffen K. A., Parks G. T., Clarkson P. J.* Simulated Annealing: An alternative approach to true multiobjective optimization // Engineering Optimization. — 2000. — V. 33(1). — P. 59–85.

41. *Kubotani H.*, *Yoshimura K.* Performance evaluation of acceptance probability functions for multiobjective simulated annealing // Computers and Operations Research. — 2003. — V. 30. — P. 427–442.

42. *Deb K.* Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. — Chichester: Wiley, 2001.

43. *Лотов А. В.*, *Каменев Г. К.*, *Березкин В. Е.* Аппроксимация и визуализация паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач // Докл. РАН. — 2002. — №6. — С. 738–741.

44. *Березкин В. Е.*, *Каменев Г. К.*, *Лотов А. В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // ЖВМиМФ. — 2006. — Т. 46(11). — С. 1231–1242.

45. *Lotov A.*, *Berezkin V.*, *Kamenev G.*, *Miettinen K.* Optimal control of cooling process in continuous casting of steel using a visualization-based multi-criteria approach // Applied Mathematical Modelling. — 2005. — V. 29(7). — P. 653–672.

46. *Воробейчикова О. А.*, *Новикова Н. М.* Параметризация значений векторного минимакса со связанными ограничениями // ЖВМиМФ. — 1997. — Т. 37(12). — С. 1467–1477.

47. *Поспелова И. И.* Аппроксимационные свойства обратной логической свертки в задаче поиска векторного минимакса // ЖВМиМФ. — 2002. — Т. 42(2). — С. 155–170.

48. *Семовская А. С.* Аппроксимация множества неулучшаемых оценок вектора критериев в задаче динамического принятия решений в условиях неопределенности // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. — 2005. — №3. — С. 12–23.

49. *Малашенко Ю. Е.*, *Новикова Н. М.*, *Поспелова И. И.* Многокритериальный синтез потоковых сетей с гарантией живучести // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. — 2001. — №2. — С. 91–100.

Предметный указатель