Зміст

8 Магазинні автомати

8.1 Магазинні автомати

Магазинний автомат M — це сімка $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, j_0, \sigma, F\rangle$, де:

- $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{m-1}\}$ — множина станів магазинного автомату;
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — основний алфавіт;
- $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ — допоміжний алфавіт (алфавіт магазина);
- $q_0 \in Q$ — початковий стан магазинного автомату;
- $j_0 \in \Gamma^\star$ — початковий вміст магазину;
- $\sigma : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q\times\Gamma^\star}$.
- $F \subseteq Q$ — множина заключних станів автомата M.

Поточний стан магазинного автомата M описується конфігурацією. *Конфігурація* магазинного автомата M — це трійка (q, ω, j), де $q \in Q$, $\omega \in \Sigma^\star$, $j \in \Gamma^\star$. Серед конфігурацій магазинного автомата M виділимо дві:

- *початкова конфігурація* (q_0, ω, j_0), де $q_0 \in Q$, ω — вхідне слово ($\omega \in \Sigma^\star$), $j_0 \in \Gamma^\star$;
- *заключна конфігурація* $(q_f, \varepsilon, \varepsilon)$, $q_f \in F$. В загальній теорії магазинних автоматів іноді як заключну конфігурацію розглядають (q_f, ε, j_f), де (q_f, j_f) — фіксована пара. Можна довести, що визначення заключної конфігурації виду $(q_f, \varepsilon, \varepsilon)$ не зменшує потужності класу магазинних автоматів.

Такт роботи (позначається $\models$) магазинного автомата M — це перехід від однієї конфігурації до іншої, а точніше:

$$(q_1, a\omega, \gamma_1 j) \models (q_2, \omega, \gamma_2 j) \quad \text{if} \quad (q_2, \gamma_2) \in \sigma(q_1, a, \gamma_1) \tag{8.1}$$

Робота магазинного автомата M (позначається $\models^\star$) — це послідовність тактів роботи, а точніше: $(q_1, \omega_1, j_1) \models^\star (q_2, \omega_2, j_2)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(q_1, \omega_1, j_1) \models (q_1^1, \omega_1^1, j_1^1) \models (q_1^2, \omega_1^2, j_1^2) \models \ldots \models (q_1^n, \omega_1^n, j_1^n) \models (q_2, \omega_2, j_2). \tag{8.2}$$

Операції $\models$ та $\models^\star$ можна трактувати як бінарні відношення на відповідних кортежах. Тоді робота магазинного автомата M — це рефлексивно-транзитивне замикання бінарного відношення $\models$.

8.1.1 Мова магазинного автомату

Мова, яку розпізнає магазинний автомат M — позначається $L(M)$ — це множина слів $\omega \in \Sigma^\star$, які задовольняють умові:

$$L(M) = \{\omega | \exists q_f \in F : (q_0, \omega, j_0) \models^\star (q_f, \varepsilon, \varepsilon)\}. \tag{8.3}$$

Зафіксуємо наступні результати теорії магазинних автоматів:

1. Не існує алгоритму перетворення недетермінованого магазинного автомата у еквівалентний йому детермінований магазинний автомат.

2. Існує алгоритм, який вирішує проблему порожньої множини $L(M)$ для конкретного магазинного автомата.

3. Існує алгоритм, який за час, пропорційний $O(n^3)$ перевіряє, чи належить $\omega \in \Sigma^\star$ мові, яку розпізнає магазинний автомат M.

4. Клас мов, які розпізнаються магазинними автоматами, співпадає з класом мов, що породжуються КС-граматиками.

На основі сформульованих вище результатів для лівосторонньої стратегії виводу $\omega \in \Sigma^\star$ в G запропонуємо наступне твердження: для довільної КС-граматики G можна побудувати магазинний автомат M такий, що $L(G) = L(M)$. При цьому автомат буде моделювати лівосторонню стратегію виводу ω в G.

8.1.2 Магазинний автомат за КС-граматикою

Нехай $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ — КС-граматика. Побудуємо відповідний магазинний автомат $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, j_0, \sigma, F \rangle$:

- $Q = \{q_0\}$ — множину станів автомата складає один стан q_0;
- $\Gamma = N \cup \Sigma$ — допоміжний алфавіт;
- $j_0 = S$ — початковий вміст магазина;
- функцію σ визначимо так:
  - якщо $A \mapsto \omega_1 \mid \omega_2 \mid \ldots \mid \omega_p$ належить P, то
  $$\sigma(q_0, \varepsilon, A) = \{(q_0, \omega_1), (q_0, \omega_2), \ldots, (q_0, \omega_p)\}. \tag{8.4}$$
  - також поповнимо множину значень функції σ наступними значеннями:
  $$\sigma(q_0, a_i, a_i) = \{(q_0, \varepsilon)\}, \quad a_i \in \Sigma. \tag{8.5}$$

Для слова $\omega \in \Sigma^\star$, $|\omega| = n$ покажемо, якщо ми за m кроків безпосереднього виводу $S \Rightarrow^m \omega$, то відповідний автомат за $(m+n)$ кроків допустить ω. Зробимо перший крок безпосереднього виведення $S \Rightarrow x_1 x_2 \ldots x_k$ тоді магазинний автомат з початкової конфігурації (q_0, ω, S) перейде в наступну конфігурацію $(q_0, \omega, x_1 x_2 \ldots x_k)$. Далі розглянемо наступні ситуації:

- коли x_1 — термінал a_1 (тобто $\omega = a_1 \omega_1$), тоді МП-автомат виконає наступний такт: $(q_0, a_1\omega_1, a_1 x_2 \ldots x_k) \models (q_0, \omega_1, x_2 \ldots x_k)$;
- коли x_1 — нетермінал, тоді в схемі P граматики G виберемо правило виду $x_1 \mapsto y_1 y_2 \ldots y_l$, зробимо наступний крок безпосереднього виведення:
  $$S \Rightarrow y_1 \ldots y_l x_2 \ldots x_k \tag{8.6}$$

  При таких умовах автомат перейде в наступну конфігурацію:
  $$(q_0, \omega, x_1 x_2 \ldots x_k) \models (q_0, \omega, y_1 y_2 \ldots y_l x_2 \ldots x_k). \tag{8.7}$$

Очевидно, якщо слово ω виводиться за m кроків, то МП-автомат зробить $m + |\omega|$ кроків та розпізнає ω. Таким чином, $L(G) = L(M)$.

8.2 Контрольні запитання

1. Що таке магазинний автомат?

2. Що таке конфігурація магазинного автомату?

3. Які конфігурації магазинного автомату називаються початковою і заключною?

4. Що таке такт роботи і робота магазинного автомату?

5. Яку мову розпізнає магазинний автомат?

6. Що таке проблема порожньої множини $L(M)$?

7. Як за КС-граматикою G побудувати магазинний автомат M такий, що $L(G) = L(M)$?

8. Яку стратегію виведення ω в G реалізує побудований у попередньому питанні автомат, і яка обчислювальна складність алгоритму розпізнавання слова ω?