Звіт до лабораторної роботи №2
Чисельне інтегрування

ОМ-3, Бабієнка Іллі

Березень 2019

1 Постановка задачі

Нехай задана функція $f(x)$. Необхідно наближено обчислити інтеграл $I = \int_b^a f(x)dx$ від $f(x)$ на заданому інтервалі $[a, b]$, де $a < b \wedge a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Вивести отримане наближене значення інтегралу I_h, похибку R_h° та кінцевий крок розбиття інтервалу h.
(За замовчуванням використовуємо рівномірно-розподілені вузли)
Для обчислень використати формулу Сімпсона, принцип Рунге, формулу Річардсона, та апріорні оцінки похибки для квадратурних формул.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}, a = 2, b = +\infty \tag{1}$$

2 Теоретичні відомості

2.1 Формула Сімпсона

Нехай $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$. Замість f викроистаємо $L_2(x)$. Тоді отримаємо квадратурну формулу:

$$I_2(x) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] \tag{2}$$

Це *квадратурна формула Сімпсона*. Для $f \in C^4[a, b]$ залишковий член квадратури має представлення:

$$R_2(f) = \frac{1}{24}\int_a^b (x-a)(x - \frac{a+b}{2})^2(x-b)f^{(4)}(\xi)dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5, \tag{3}$$

та вірна оцінка ($M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$):

$$|R_2(f)| \le \frac{M_4}{2880}(b-a)^5 \tag{4}$$

Складена формула Сімпсона (отримана застосуванням звичайної формули до кожного з інтервалів рівномірної сітки, на які поділений початковий інтервал):

$$I_h(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + f(x_i)\right] \tag{5}$$

Для неї справджуються наступні оцінки (апріорні):

- $f \in C^4[a,b]$:
$$|R_h(f)| \le \frac{M_4}{2880}(b-a)h^4 \tag{6}$$

- $f \in C^6[a,b]$:

$$R_h(f) = R_h^\circ(f) + \alpha(h), \text{ де } R_h^\circ(f) = \frac{h^4}{2880}\int_a^b f^{(4)}(x)dx, \ \alpha(h) = O(h^6) \tag{7}$$

2.2 Принцип Рунге. Формула Річардсона

9.5. Принцип Рунге [СГ, 169-171]

Нехай задана деяка величина I (сіткова функція, інтеграл, неперервна функція). Нехай $I_h \approx I$ та $I_h \to I$ при $h \to 0$. Нехай похибка послідовності I_h представляється у вигляді

$$R_h = I - I_h = \overset{0}{R}_h + \alpha(h) \tag{1}$$

де $\overset{0}{R}_h = C \cdot h^m$ - головний член похибки, C не залежить від h, $\alpha(h) = o(h^m)$. Обчислимо $I_{h/2}$. З (1) слідує, що

$$I = I_h + Ch^m + \alpha(h), \ I = I_{h/2} + C\frac{h^m}{2^m} + \alpha(h).$$

Звідси

$$I_{h/2} - I_h = \frac{Ch^m}{2^m}\left(2^m - 1\right) + \alpha(h).$$

З (1)

$$\overset{0}{R}_{h/2} = \frac{Ch^m}{2^m} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^m - 1} \tag{2}$$

та $\overset{0}{R}_h = \dfrac{2^m}{2^m - 1}\left(I_{h/2} - I_h\right)$. Формула (2) носить назву *апостеріорної оцінки* похибки обчислення I за допомогою наближення $I_{h/2}$. (*Апріорні оцінки* це оцінки отримані до обчислення величини I_h, *апостеріорні оцінки* – під час її обчислення).

З формули (2) витікає такий алгоритм обчислення інтегралу із заданою точністю ε:

- обчислюємо I_h, $I_{h/2}$, $\overset{0}{R}_{h/2}$; перевірюємо чи $\left|\overset{0}{R}_{h/2}\right| < \varepsilon$. Якщо так, то $I \approx I^0_{h/2}$.

  Якщо ж ні, то
- обчислюємо $I_{h/2}$, $I_{h/4}$, $\overset{0}{R}_{h/4}$; перевіряємо $\left|\overset{0}{R}_{h/4}\right| < \varepsilon$ і т.д.
- Процес продовжуємо поки не буде виконана умова $\left|\overset{0}{R}_{h2^{-k}}\right| < \varepsilon \quad k = 1,2,\ldots$.

За допомогою головного члена похибки можна отримати краще значення для I:

$$\widetilde{I}_{h/2} = I^{(1)}_{h/2} = I_{h/2} + R^0_{h/2} = \frac{2^m}{2^m - 1} I_{h/2} - \frac{1}{2^m - 1} I_h. \tag{3}$$

Для формули Сімпсона (для якої $m = 4$), формула Річардсона матиме вигляд:

$$\tilde{I}_{h/2} = \frac{16}{15} I_{h/2} - \frac{1}{15} I_h, \quad I_h - \tilde{I}_{h/2} = O(h^6) \tag{8}$$

3 Практична частина

Даний інтеграл є невласним інтегралом першого роду: $I = \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$. Перепишемо $f(x)$ як $\frac{1}{(x+2)(x-1)}$. Бачимо, що особливостей на області інтегрування немає (вони є в точках $x = -2$ та $x = 1$, які лежать поза областю інтегрування).

Зробимо заміну: $t = \frac{x-2}{x},\ x = \frac{2}{1-t},\ dx = \frac{2dt}{(1-t)^2}; \rightarrow\ I = \int\limits_2^\infty \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(2-t)(1+t)}$ (9)

Тоді інтеграл набуде вигляду (9), де $g(t) = \frac{1}{(2-t)(1+t)}$ - нова підінтегральна фунція, $[0,1]$ - новий проміжок інтегрування. Отриманий інтеграл є власним інтегралом. Отже його можна обчислювати формулами Сімпсона та Річардсона напряму (без попередніх досліджень чи перетворень).

Також помітимо, що початковий (як і отриманий) інтеграл можна знайти аналітично: $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$ - не складно інтегрується безпосереднім знаходженням первісної. Справжнє значення інтегралу рівне $\ln(4)/3 \approx 0.4620981203732968729 4...$

Для обчислення апріорної похибки обчислень, нам необхідно оцінити четверту похідну функції $g(t)$. $g^{(4)} = \frac{24}{3}\left(\frac{1}{(2-t)^5} + \frac{1}{(1+t)^5}\right)$
Вона є обмеженою та додатньою на всьому інтервалі інтегрування.
П'ята похідна $g^{(5)} = \frac{120}{3}\left(\frac{1}{(2-t)^6} - \frac{1}{(1+t)^6}\right)$ більша за 0 коли $t > 1/2$ та менша за 0 коли $t < 1/2$ Отже (локальні) максимуми доягаються на кінцях: $g^{(4)}(0) = g^{(4)}(1) = {}^{33}\!/_{32}$. Отже $M_4 = 33/32$, та $|R_2(f)| \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5 = \frac{33}{32*2880} \approx 0.00035807291(6)$.
В методі Рунге виставимо точність $\epsilon = 10^{-3}$ та кількість ітерацій не більше 20.

Результати:

```
Simpson:     0.46209824977674413
Runge:       0.46209812849863746
Richardson:  0.46209812041343035
Real value:  0.46209812037329684

Error (ariori):           0.00035807291666666664
|Simpson - Runge|:        1.2127810666839878e-07
|Simpson - Richardson|:   1.293633137833261e-07
|Runge - Richardson|:     8.085207114927329e-09
|Simpson - Real|:         1.2940344729095443e-07
|Runge - Real|:           1.2940344729095443e-07
|Richardson - Real|:      4.0133507628326015e-11
```