Упрощенный метод Ньютона:

$$\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^{k-1} - F^{-1}(\boldsymbol{x}^0) f(\boldsymbol{x}^{k-1}). \tag{14}$$

Упрощение состоит в том, что обратная матрица $F^{-1}(\boldsymbol{x}^0)$ находится один раз, а не в каждой итерации, как в (13).

Если $\det F(\boldsymbol{x}^*) \neq 0$ и начальное приближение $\boldsymbol{x}^0$ взято достаточно близко к $\boldsymbol{x}^*$, то итерации (13) и (14) сходятся в метрике (24.22) к $\boldsymbol{x}^*$. Характер сходимости тот же, что и при $n = 1$, т. е. итерации (13), начиная с некоторого момента, сходятся очень быстро по квадратичному закону, а для итераций (14) гарантируется сходимость только по геометрической прогрессии.

## § 26. Метод деления отрезка пополам

Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) f(b) < 0$ и известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение (единственный корень) $x_* \in [a, b]$. Полагаем $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = (a_0 + b_0)/2$, т. е. $c_0$ — середина отрезка $[a_0, b_0]$. Вычисляем $f(c_0)$. Если $f(c_0) = 0$, то $x_* = c_0$ и вычисления на этом заканчиваются. Если $f(c_0) \neq 0$, то знак $f(c_0)$ совпадает либо со знаком $f(a_0)$, либо со знаком $f(b_0)$, коль скоро $f(a_0) f(b_0) < 0$.

Таким образом, на концах одного из двух отрезков $[a_0, c_0]$ или $[c_0, b_0]$ функция $f$ имеет одинаковые знаки, а на концах другого — противоположные. Сохраняем отрезок, на концах которого $f$ имеет противоположные знаки, а другой отрезок, как не содержащий корень $x_*$, отбрасываем. Оставленный отрезок обозначим через $[a_1, b_1]$, где

$$a_1 = \begin{cases} c_0, & \operatorname{sign} f(a_0) = \operatorname{sign} f(c_0), \\ a_0, & \operatorname{sign} f(a_0) \neq \operatorname{sign} f(c_0), \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} c_0, & \operatorname{sign} f(b_0) = \operatorname{sign} f(c_0), \\ b_0, & \operatorname{sign} f(b_0) \neq \operatorname{sign} f(c_0). \end{cases}$$

Очевидно, $\operatorname{sign} f(a_1) = \operatorname{sign} f(a_0)$ и $\operatorname{sign} f(b_1) = \operatorname{sign} f(b_0)$. Поэтому $f(a_1) f(b_1) < 0$. Искомый корень $x_*$ находится теперь на вдвое меньшем отрезке $[a_1, b_1]$.

Далее поступаем аналогично. Допустим, что уже найден некоторый отрезок $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, на концах которого функция $f$ имеет противоположные знаки и, следовательно, он содержит искомый корень $x_*$. Находим середину отрезка $[a_k, b_k]$:

$$c_k = (a_k + b_k)/2. \tag{1}$$

Вычисляем $f(c_k)$. Если $f(c_k) = 0$, то $x_* = c_k$. Вычисления заканчиваются. Если $f(c_k) \neq 0$, то полагаем

$$a_{k+1} = \begin{cases} c_k, & \operatorname{sign} f(a_k) = \operatorname{sign} f(c_k), \\ a_k, & \operatorname{sign} f(a_k) \neq \operatorname{sign} f(c_k), \end{cases}$$
$$b_{k+1} = \begin{cases} c_k, & \operatorname{sign} f(b_k) = \operatorname{sign} f(c_k), \\ b_k, & \operatorname{sign} f(b_k) \neq \operatorname{sign} f(c_k), \end{cases} \tag{2}$$

и т. д. Этот процесс может быть конечным, если середина отрезка, полученного на некотором шаге, совпадает с искомым корнем $x_*$, либо этот процесс бесконечный.

На рис. 16 показано несколько начальных шагов. Если вычисления доведены до $k$-го шага, то в качестве

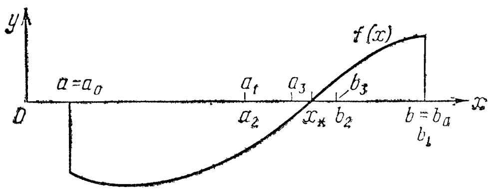


Рис. 16

приближенного значения для искомого корня $x_*$ естественно принять $c_k$. При этом справедлива очевидная оценка погрешности

$$|x_* - c_k| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}. \tag{3}$$

Изложенный метод является типично машинным, так как вычисления по формулам (1), (2) очень простые и цикличные. Он обладает достаточно быстрой сходимостью. На каждом шаге правая часть оценки погрешности (3) убывает вдвое.