ГЛАВА 4

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Излагаются методы итераций, Ньютона, деления отрезка пополам и наискорейшего (градиентного) спуска.

§ 24. Метод итераций

Пусть дано уравнение с одной неизвестной x:

$$x = \varphi(x), \qquad (1)$$

где φ — заданная функция от x. Если не накладывать никаких ограничений на функцию φ, то могут возникнуть различные ситуации, а именно, уравнение (1) может иметь либо одно решение, либо некоторое конечное число решений (больше одного), либо бесконечное множество решений, либо, наконец, уравнение (1) может совсем не иметь решений. Обычно возникают сразу два вопроса: о наличии решений и о том, как найти решения.

Ниже формулируется и доказывается теорема, которая дает достаточные условия существования на некотором отрезке единственного решения уравнения (1). Эта теорема указывает также способ нахождения приближенного решения, называемый *методом итераций*, и обеспечивает оценки погрешности приближенного решения.

Определение. Говорят, что функция φ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ *условию Липшица* с постоянной α, если для любых x_1, $x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2|. \qquad (2)$$

Замечание 1. В частности, если функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то она удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица с постоянной

$$\alpha = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)|, \qquad (3)$$

что легко следует из формулы конечных приращений Лагранжа.

Теорема 1. *Пусть функция* φ *удовлетворяет на отрезке* $[x_0, x_0+r]$ *условию Липшица с постоянной* α, *причем*

$$0<\alpha<1, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \varphi(x_0)-x_0 \leqslant (1-\alpha)r. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) *имеет на отрезке* $[x_0, x_0+r]$ *единственное решение*

$$x_* = \lim_{k\to\infty} x_k, \tag{6}$$

где x_0 — *левый конец отрезка* $[x_0, x_0+r]$,

$$x_k=\varphi(x_{k-1}), \quad k=1, 2, \ldots \tag{7}$$

При этом имеют место оценки

$$|x_*-x_k| \leqslant \rho\alpha^k, \tag{8}$$

$$|x_*-x_k| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_k-x_{k-1}|, \tag{9}$$

где $\rho=\dfrac{\varphi(x_0)-x_0}{1-\alpha} \leqslant r, \quad k=1, 2, \ldots$

Доказательство. Установим сначала, что рекуррентная числовая последовательность $\{x_k\}$ действительно может быть найдена по формуле (7) и что эта последовательность целиком расположена на отрезке $[x_0, x_0+\rho]$, принадлежащем заданному отрезку $[x_0, x_0+r]$.

Предположим для простоты, что $x_0=0$. Тогда отрезок $[x_0, x_0+\rho]$ совпадет с отрезком $[0, \rho]$ и с учетом выбора ρ будет выполняться равенство

$$\varphi(0)=(1-\alpha)\rho. \tag{10}$$

В неравенстве (2), которому по условию удовлетворяет функция φ на отрезке $[0, r]$ и, в частности, на отрезке $[0, \rho]$, положим $x_1=x$, $x_2=0$ и заменим полученное таким образом неравенство на следующие два эквивалентных на отрезке $[0, \rho]$ неравенства для функции φ:

$$\varphi(0)-\alpha x \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(0)+\alpha x. \tag{11}$$

Из равенства (10) и правого неравенства (11) вытекает, что функция φ подчиняется на отрезке $[0, \rho]$

следующему ограничению:

$$\varphi(x) \leqslant \rho. \tag{12}$$

Допустим, что члены последовательности $\{x_k\}$ с номерами $k = 0, 1, \ldots, m-1$ уже найдены с помощью формулы (7) и удовлетворяют условию

$$0 \leqslant x_k \leqslant \rho. \tag{13}$$

Например, при $m = 2$ сделанные предположения заведомо выполнены, так как точки $x_0 = 0$, $x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0)$, являющиеся членами рассматриваемой последовательности, в силу (10) подчиняются неравенствам (13).

Коль скоро $x_{m-1} \in [0, \rho]$, то по формуле (7), где $k = m$, может быть найден следующий член x_m. Покажем, что он тоже удовлетворяет условию (13). Рассмотрим два случая.

1. $0 \leqslant x_{m-1} \leqslant \min\{\rho, \varphi(0)/\alpha\}$. Используя равенство (7) при $k = m$, а также левое неравенство (11), получаем

$$x_m = \varphi(x_{m-1}) \geqslant \varphi(0) - \alpha x_{m-1} \geqslant \varphi(0) - \\ - \alpha \min\left\{\rho, \frac{\varphi(0)}{\alpha}\right\} \geqslant \varphi(0) - \alpha \frac{\varphi(0)}{\alpha} = 0. \tag{14}$$

2. $\varphi(0)/\alpha < x_{m-1} \leqslant \rho$. Вычитая из равенства (7) с $k = m$ равенство (7) с $k = m - 1$ и принимая во внимание условие Липшица (2), находим

$$|x_m - x_{m-1}| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{m-2})| \leqslant \alpha |x_{m-1} - x_{m-2}|.$$

Далее, аналогично получаем

$$|x_{m-1} - x_{m-2}| \leqslant \alpha |x_{m-2} - x_{m-3}|$$

и т. д. Через конечное число шагов мы придем к неравенству

$$|x_m - x_{m-1}| \leqslant \alpha^{m-1} |x_1 - x_0|. \tag{15}$$

Отсюда, учитывая, что

$$|x_1 - x_0| = \varphi(0), \quad x_{m-1} > \varphi(0)/\alpha \geqslant \alpha^{m-1}\varphi(0)$$

(ибо $0 < \alpha < 1$), находим

$$x_m \geqslant x_{m-1} - |x_m - x_{m-1}| > 0. \tag{16}$$

Кроме рассмотренных случаев 1, 2, для x_{m-1}, удовлетворяющего условию (13) при $k = m - 1$, других случаев быть не может. Следовательно, из (14) и (16) вытекает левое неравенство (13) при $k=m$. Правое неравенство (13) при $k=m$ следует из равенства $x_m=\varphi(x_{m-1})$, где $x_{m-1}\in[0,\rho]$, и из неравенства (12).

Из доказанного по индукции следует, что при $x_0=0$ бесконечная последовательность $\{x_k\}$ может быть действительно построена по формуле (7) и все ее члены удовлетворяют условию (13). Если $x_0\neq 0$, то совершенно аналогично доказывается, что последовательность $\{x_k\}$, найденная по формуле (7), целиком расположена на отрезке $[x_0, x_0+\rho]$.

Установим теперь, что рассматриваемая последовательность $\{x_k\}$ — фундаментальная. Учитывая неравенство (15), которое очевидно справедливо при любом натуральном m и произвольном x_0, и неравенство $|x_1-x_0|=|\varphi(x_0)-x_0|<r$, вытекающее из условий (4), (5), находим

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant\sum_{m=n+1}^{n+p}|x_m-x_{m-1}|\leqslant\sum_{m=n+1}^{n+p}\alpha^{m-1}|x_1-x_0|<$$

$$<r\sum_{m=n+1}^{n+p}\alpha^{m-1}=r\alpha^n\frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}<\alpha^n\frac{r}{1-\alpha},\qquad(17)$$

где n, p — любые натуральные числа. Поскольку $\alpha^n\to 0$ при $n\to\infty$, то соотношения (17) показывают, что последовательность $\{x_k\}$ — фундаментальная. Поэтому существует предел (6), причем, так как последовательность $\{x_k\}$ расположена на отрезке $[x_0, x_0+\rho]$, то $x_*\in[x_0, x_0+\rho]$.

Заданная функция φ удовлетворяет условию Липшица (2) на отрезке $[x_0, x_0+\rho]$, которое, в частности, означает, что функция φ непрерывна на этом отрезке. Это позволяет перейти к пределу при $k\to\infty$ в равенстве (7), осуществив предельный переход справа под знаком функции φ. В результате мы получим равенство

$$x_*=\varphi(x_*),\qquad(18)$$

говорящее о том, что $x_*\in[x_0, x_0+\rho]$ является решением уравнения (1). Существование решения уравнения (1) на отрезке $[x_0, x_0+\rho]$, а значит, и на отрезке $[x_0, x_0+r]$, содержащем отрезок $[x_0, x_0+\rho]$, доказано.

Допустим, что точка $x_{**} \in [x_0, x_0 + r]$ тоже является решением уравнения (1), т. е.

$$x_{**} = \varphi(x_{**}). \tag{19}$$

Вычитая из (18) равенство (19) и учитывая условие Липшица (2), получаем

$$|x_* - x_{**}| = |\varphi(x_*) - \varphi(x_{**})| \leqslant \alpha |x_* - x_{**}|,$$

т. е.

$$|x_* - x_{**}| \leqslant \alpha |x_* - x_{**}|.$$

Это неравенство возможно при условии (4), только если $x_{**} = x_*$. Единственность решения уравнения (1) на отрезке $[x_0, x_0 + r]$ тоже доказана.

Остается установить оценки (8), (9) для погрешности $x_* - x_k$ приближенного решения x_k уравнения (1). Используя равенства (18) и (7), а также условие Липшица (2), находим

$$|x_* - x_k| = |\varphi(x_*) - \varphi(x_{k-1})| \leqslant \alpha |x_* - x_{k-1}| =$$
$$= \alpha |\varphi(x_*) - \varphi(x_{k-2})| \leqslant \alpha^2 |x_* - x_{k-2}| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^k |x_* - x_0|. \tag{20}$$

Поскольку $x_* \in [x_0, x_0 + \rho]$, то $|x_* - x_0| \leqslant \rho$. Отсюда и из (20) следует оценка (8).

Из равенств (7), (18) следует равенство

$$x_* - x_{k-1} = x_k - x_{k-1} + \varphi(x_*) - \varphi(x_{k-1}),$$

из которого с помощью условия Липшица (2) получаем

$$|x_* - x_{k-1}| \leqslant |x_k - x_{k-1}| + \alpha |x_* - x_{k-1}|,$$

или

$$|x_* - x_{k-1}| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} |x_k - x_{k-1}|.$$

Отсюда, воспользовавшись первым неравенством в цепочке неравенств (20), приходим к оценке (9). Теорема полностью доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

где a — число, $1/2 \leqslant a < 1$. Это уравнение является уравнением вида (1) с $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Оно имеет решение $x_* = \sqrt{a}$, в чем нетрудно убедиться непосредственно.

Попытаемся применить теорему 1. Положим $x_0 = a$, $r = 1 - a$, т. е. выберем $[x_0, x_0 + r] = [a, 1]$. Имеем при $1/2 \leqslant a < 1$

$$\max_{[a,1]} |\varphi'(x)| = \max_{[a,1]} \left| \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \right| = \frac{1-a}{2a} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция φ удовлетворяет на отрезке $[a, 1]$ условию Липшица (2) с $\alpha = 1/2$. Таким образом, условие (4) выполнено.

Проверим условие (5). Находим

$$\varphi(x_0) - x_0 = \frac{1}{2}(a + 1) - a = \frac{1}{2}\, 1 - a) = (1 - \alpha) r.$$

Условие (5) тоже выполнено. Теорема 1 гарантирует, что на отрезке $[a, 1]$ рассматриваемое уравнение имеет единственное решение, и именно то, о котором мы уже догадались, т. е. $x_* = \sqrt{a}$. Для его вычисления может быть применен в соответствии с (7) метод итераций:

$$x_0 = a, \quad x_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Погрешность целесообразно оценивать в процессе вычислений по неравенству (9), которое более точное, чем (8).

Данный способ вычисления квадратного корня, сводящийся к арифметическим действиям, применяется в ЭВМ, в которых отсутствует элементарная операция извлечения квадратного корня.

З а м е ч а н и я. 2. Справедлив другой вариант теоремы 1, когда отрезок $[x_0, x_0 + r]$ заменяется на отрезок $[x_0 - r, x_0]$, вместо условия (5) фигурирует условие

$$0 \leqslant x_0 - \varphi(x_0) \leqslant (1 - \alpha) r, \tag{5*}$$

а

$$\rho = \frac{x_0 - \varphi(x_0)}{1 - \alpha}.$$

3. Итерации (7) имеют геометрическую интерпретацию. Решение x_* уравнения (1) является абсциссой точки пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$. Сходящиеся итерации изображены на рис. 12. 13. Геометрически видно, что если в окрестности решения x_* выполняются неравенства $0 < \varphi'(x) \leqslant \alpha < 1$, то последовательность $\{x_k\}$ монотонно сходится к x_*, причем с той стороны, с которой расположено начальное приближение (см. рис. 12). В случае $-1 < -\alpha \leqslant \leqslant \varphi'(x) < 0$ последовательные приближения расположены поочередно с разных сторон от решения x_* (см. рис. 13). В последнем случае очень просто можно су-

дить по двум последовательным приближениям о достигнутой точности, а именно, уклонение x_k от x_* не превышает $|x_k - x_{k-1}|$. Легко усмотреть также, что сходимость тем быстрее, чем меньше $|\varphi'|$.

4. Если функция φ, входящая в уравнение (1), не удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\alpha < 1$, то итерации (7) могут расходиться. Например, рас-

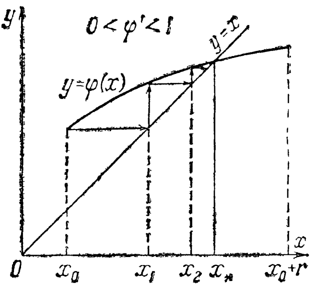

Рис. 12

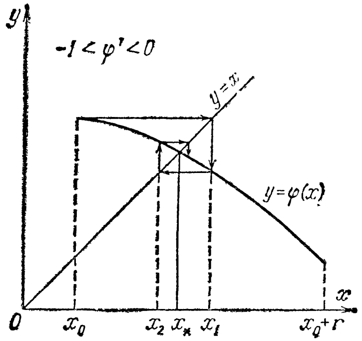

Рис. 13

смотрим уравнение (1), где $\varphi(x) = bx$, $b > 1$, b — число. Очевидно, функция φ удовлетворяет на всей оси x условию Липшица с постоянной $\alpha = b > 1$ и не удовлетворяет условию Липшица ни с какой постоянной меньше единицы на любом отрезке. Рассматриваемое уравнение $x = bx$ имеет единственное решение $x_* = 0$. Однако при любом $x_0 \neq 0$ согласно (7) $x_k = b^k x_0 \to \infty$ при $k \to \infty$.

Решение системы уравнений. Введем в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ расстояние*)

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{21}$$

с помощью нормы (20.1) (см. п. 8 введения). В соответствии с (20.1), (21) имеем

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \rho_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j|, \\ \rho_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}. \end{cases} \tag{22}$$

*) При чтении данной главы предполагается знакомство с § 1.5 книги: Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1985.

Множество $\bar{S}(y^0; r) = \{x\colon \rho(x, y^0) \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке y^0 (индексы у векторов будем располагать вверху). Опираясь на критерий Коши для числовых последовательностей, можно доказать, что любой замкнутый шар $\bar{S}(y^0; r)$, а также все пространство $\mathbb{R}^n$ является полным метрическим пространством с метрикой (22).

Рассмотрим уравнение (систему n, вообще говоря, нелинейных уравнений с n неизвестными)

$$x = \varphi(x), \tag{23}$$

где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ — заданная вектор-функция переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$), $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Например, при $n = 2$ система (23) в более подробной записи имеет вид

$$(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2))$$

или

$$x_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \quad x_2 = \varphi_2(x_1, x_2),$$

где $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ — заданные функции переменных x_1, x_2.

Следующая теорема обосновывает метод итераций решения нелинейной системы уравнений (23).

Теорема 2. *Пусть на замкнутом шаре* $\bar{S} = \bar{S}(y^0; r)$ *задана вектор-функция* $\varphi(x)$, *причем для любых* $x, y \in \bar{S}$ *выполняется неравенство*

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y) \tag{24}$$

и, кроме того,

$$\rho(\varphi(y^0), y^0) \leqslant (1 - \alpha) r, \tag{25}$$

где α — *число*, $0 \leqslant \alpha < 1$. *Тогда на* $\bar{S}$ *существует единственное решение* x^* *уравнения* (23), *причем*

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x^k, \tag{26}$$

где $x^0 \in \bar{S}$ *произвольно,*

$$x^k = \varphi(x^{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

При этом выполняются неравенства

$$\rho(x^*, x^k) \leqslant \alpha^k \rho(x^*, x^0) \leqslant 2\alpha^k r, \tag{28}$$

$$\rho(x^*, x^k) \leqslant \frac{\alpha}{1 - \alpha}\rho(x^k, x^{k-1}). \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $x \in \bar{S}(y^0; r)$, т. е. $\rho(x, y^0) \leqslant r$. Тогда, применяя неравенство треугольника для расстояния, на основании (24), (25) получаем

$$\rho(\varphi(x), y^0) \leqslant \rho(\varphi(x), \varphi(y^0)) + \rho(\varphi(y^0), y^0) \leqslant \\ \leqslant \alpha\rho(x, y^0) + (1-\alpha) r \leqslant r.$$

Таким образом, если $x \in \bar{S}(y^0; r)$, то и $\varphi(x) \in \in \bar{S}(y^0; r)$, т. е. оператор $\varphi(x)$ отображает полное метрическое пространство $\bar{S}(y^0; r)$ в себя. Кроме того, по условию (24) он является сжимающим. Следовательно, по принципу сжатых отображений существует на $\bar{S}$ единственная неподвижная точка x^* оператора $\varphi(x)$, являющаяся решением уравнения (системы) (23).

Соотношения (26), (28)', (29), кроме правого неравенства в (28), установлены в § 1.5 указанной выше книги. Неравенство $\alpha^k\rho(x^*, x^0) \leqslant 2\alpha^k r$ вытекает из неравенства треугольника:

$$\rho(x^*, x^0) \leqslant \rho(x^*, y^0) + \rho(y^0, x^0) \leqslant r + r = 2r.$$

Теорема доказана.

Неравенства (28) свидетельствуют о том, что итерации (26) сходятся к искомому решению x^* по геометрической прогрессии со знаменателем $\alpha < 1$. Поскольку известны r, α, то можно предсказать достаточное число итераций k, при котором погрешность $\rho(x^*, x^k)$ будет меньше заданного $\varepsilon > 0$. Достаточно потребовать выполнения неравенства $2\alpha^k r < \varepsilon$ или $\alpha^k < \varepsilon/(2r)$. Отсюда

$$k > \ln\frac{\varepsilon}{2r}\frac{1}{\ln\alpha},$$

так как $\ln\alpha < 0$. Минимальное k находится по формуле

$$k = \max\left\{0, \left[\frac{1}{\ln\alpha}\ln\frac{\varepsilon}{2r}\right] + 1\right\}, \tag{30}$$

где $[a]$ — целая часть от a.

Для получения оценки погрешности $\rho(x^*, x^k)$ в процессе вычислений отдают предпочтение неравенству (29), правая часть которого тоже выражается через известные величины. Обычно оно дает более точную оценку, чем (28). Это связано с тем, что погрешность на некоторых промежуточных итерациях может убывать быстрее, чем в α раз. Оценка (28) этого не почувствует, а правая часть в (29) автоматически учтет это обстоятельство.

Замечания. 5. Если оператор $\varphi(x)$ является сжимающим во всем пространстве $\mathbf{R}^n$, т. е. условие (24) с $\alpha<1$ выполнено для любых $x, y\in\mathbf{R}^n$, то без дополнительного условия (25) из принципа сжатых отображений вытекают существование решения системы (23) и его единственность в $\mathbf{R}^n$. Однако полезно и в этой ситуации ввести условие (25), которое, если задать некоторое y^0 (по возможности ближе к искомому решению x^*) и положить $r=\rho(\varphi(y^0), y^0)/(1-\alpha)$, будет выполнено. Тогда, еще не решая системы (23), можно утверждать, что единственное в $\mathbf{R}^n$ решение x^* находится на самом деле в замкнутом шаре $\bar{S}(y^0; r)$, и возможно воспользоваться оценками (28), (30).

6. Система линейных алгебраических уравнений (21.1) является частным случаем системы (23) с оператором $\varphi(x)=Bx+b$, где B — заданная матрица, b — заданный вектор. Если $\|B\|<1$, то данный оператор является сжимающим во всем пространстве $\mathbf{R}^n$. Действительно, пусть произвольные $x, y\in\mathbf{R}^n$. Тогда в силу (21), (20.8)

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y))=\|\varphi(x)-\varphi(y)\|=\|Bx-By\|=$$

$$=\|B(x-y)\|\leqslant\|B\|\|x-y\|=\|B\|\rho(x, y),$$

т. е.

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y))\leqslant\alpha\rho(x, y),$$

где $\alpha=\|B\|<1$. Следовательно, для последовательных приближений (21.2) справедлива оценка (29), которая при замене $\rho(x^*, x^k)$ на $\|x^*-x^k\|$ и $\rho(x^k, x^{k-1})$ на $\|x^k-x^{k-1}\|$ обращается в неравенство (21.8).

7. Теорема 2 при $n=1$ не совпадает с теоремой 1. Разница состоит в следующем. В теореме 1 уравнение (1) рассматривается либо только на отрезке $[x_0, x_0+r]$, либо только на отрезке $[x_0-r, x_0]$ (см. замечание 2) в зависимости от знака разности $\varphi(x_0)-x_0$. При этом не требуется, чтобы функция φ была определена на другом отрезке. В теореме 2 при $n=1$ предполагается, что функция φ с нужными

свойствами задана на отрезке $[x_0 - r,\ x_0 + r]$ (здесь y^0 заменено на x_0).

Оценки величины α. Предположим, что вектор-функция $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$ имеет непрерывные частные производные по $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ на замкнутом шаре $\bar{S} = \bar{S}(y^0;\ r)$. Обозначим

$$\alpha_{ij} = \max_{\bar{S}} |\partial\varphi_i/\partial x_j|. \tag{31}$$

Пусть $x,\ y \in \bar{S}$. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$\varphi_i(x) - \varphi_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i(\xi^i)}{\partial x_j}(x_j - y_j), \tag{32}$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\xi^i \in \bar{S}$ — некоторая промежуточная точка.

С помощью матрицы

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(\xi^1)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1(\xi^1)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n(\xi^n)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_n(\xi^n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{33}$$

соотношения (32) можно объединить в одно векторное равенство

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \Phi(x - y),$$

где справа матрица Φ умножается на вектор $x - y$. Отсюда в соответствии с (21), (20.8) находим

$$\rho(\varphi(x),\ \varphi(y)) = \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|\Phi(x - y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Phi\|\|x - y\| = \|\Phi\|\rho(x,\ y),$$

т. е.

$$\rho_m(\varphi(x),\ \varphi(y)) \leqslant \|\Phi\|_m\, \rho_m(x,\ y), \quad m = 1,\ 2,$$

где в зависимости от выбора расстояния по формуле (22) первым или вторым способом берется соответствующая норма матрицы (33).

Далее, воспользовавшись соотношениями (20.5), (20.6), с учетом (31) получаем

$$\rho_m(\varphi(x),\ \varphi(y)) \leqslant \alpha_m \rho_m(x,\ y), \quad m = 1,\ 2, \tag{34}$$

где

$$\alpha_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}, \quad \alpha_2 = \left(\sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2}. \tag{35}$$

Если при $m = 1$ или 2 окажется, что $\alpha_m < 1$, то при соответствующем выборе метрики будет выполнено условие (24) теоремы 2 с $\alpha = \alpha_m$.

Пример. Требуется выяснить существование решения системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2) = 1{,}1 - \sin \frac{x_2}{3} + \ln\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{5}\right), \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2) = 0{,}5 + \cos \frac{x_1 x_2}{6} \end{aligned} \tag{36}$$

в окрестности точки $y^0 = (y_1^0, y_2^0) = (1, 1)$.

Решение. Выбираем метрику $\rho_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ и полагаем $r = 1$. Тогда

$$\overline{S} = \overline{S}(y^0; r) = \{x: \rho_1(x, y^0) \leqslant 1\} = \{x: 0 \leqslant x_i \leqslant 2, \ i = 1, 2\},$$

т. е. замкнутый шар $\overline{S}$ при выбранной конкретной метрике $\rho_1(x, y)$ и $n = 2$ является в обычном понимании замкнутым квадратом.

Находим частные производные

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1 + x_2 + 5}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{3} \cos \frac{x_2}{3} + \frac{1}{x_1 + x_2 + 5},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{6} \sin \frac{x_1 x_2}{6}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{6} \sin \frac{x_1 x_2}{6}.$$

Отсюда, учитывая, что $\sin(2/3) < 2/3$, получаем

$$\max_{\overline{S}} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| = \frac{1}{5}, \quad \max_{\overline{S}} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right| \leqslant \max\left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{9}, \frac{1}{5} \right\} = \frac{2}{9},$$

$$\max_{\overline{S}} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right| < \frac{2}{6} \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad \max_{\overline{S}} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right| < \frac{2}{9}.$$

В соответствии с (34), (35) в качестве α может быть взята величина

$$\alpha = \max\left\{ \frac{1}{5} + \frac{2}{9}, \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \right\} = \frac{4}{9}.$$

Таким образом, условие (24) теоремы 2 выполнено с $\alpha = 4/9 < 1$. Выясним, выполнено ли условие (25). Имеем

$$\rho_1(\varphi(y^0), y^0) = \max\{|\varphi_1(1, 1) - 1|, |\varphi_2(1, 1) - 1|\}. \tag{37}$$

Поскольку $0 < \sin(1/3) < 1/3$, $0 < \ln(1 + 2/5) < 2/5$, $0 < \cos(1/6) < 1$, то из (36), (37) получаем

$$\rho_1(\varphi(y^0), y^0) < 0{,}5 < (1 - \alpha) r = 5/9.$$

Условие (25) тоже выполнено. По теореме 2 система (36) имеет на рассматриваемом замкнутом квадрате $\bar{S}(y^0;\ 1)$ единственное решение x^*. Выбор y^0 и r оказался удачным.

Итерации (27) проводятся по формулам

$$x_1^k = \varphi_1\left(x_1^{k-1},\ x_2^{k-1}\right), \qquad x_2^k = \varphi_2\left(x_1^{k-1},\ x_2^{k-1}\right).$$

В качестве начального приближения естественно взять $x^0 = y^0 = (1,\ 1)$, т. е. $x_1^0 = x_2^0 = 1$. Точность итераций согласно (29) оценивается неравенством

$$\rho_1(x^*,\ x^k) \leqslant \frac{4}{5}\rho_1(x^k,\ x^{k-1}) = \frac{4}{5}\max\left\{\left|x_1^k - x_1^{k-1}\right|,\ \left|x_2^k - x_2^{k-1}\right|\right\}.$$

Замечание 8. Одним из условий применимости метода итераций является, грубо говоря, малость частных производных вектор-функции $\varphi(x)$. На практике требуется, чтобы хотя бы одна из величин (35) была меньше 1. Но этого для существования решения еще мало. Возникает вопрос о выборе подходящих y^0, r, при которых выполняются условия (24), (25) теоремы 2. Точку y^0 желательно взять по возможности ближе к решению x^*. Варьирование r приводит к тому, что с увеличением r обычно увеличиваются величины (31) или их оценки сверху и, следовательно, увеличивается вычисляемое α, но при слишком малом r может оказаться невыполнимым условие (25). Задача выбора y^0, r практически трудная и в каждом случае требует индивидуального подхода. Успех не гарантируется, даже если решение у системы (23) существует, тем более что заранее может быть не известно о наличии решения. При отсутствии же решения указанные y^0 и r, естественно, нельзя подобрать.

§ 25. Метод Ньютона

Рассмотрим уравнение с одной неизвестной x

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если $f \in C_2[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, т. е. f принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения с противоположными знаками, а f'' не меняет знака на $[a, b]$, то уравнение (1) имеет на $[a, b]$ единственное решение (корень) x_*.*

Утверждение теоремы достаточно очевидно. При условиях теоремы 1 возможны четыре случая,