ГЛАВА 2

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Примеры и канонический вид итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Итерационные методы Якоби и Зейделя. Перейдем к изучению итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Будем рассматривать систему

$$Ax=f, \tag{1}$$

где матрица $A=[a_{ij}]$, $i, j=1, 2, \ldots, m$, имеет обратную, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $f=(f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$.

Рассмотрим сначала два примера итерационных методов. Для их построения предварительно преобразуем систему (1) к виду

$$x_i=-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j-\sum_{j=i+1}^{m}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j+\frac{f_i}{a_{ii}},\quad i=1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

(при этом предполагается, что все a_{ii} отличны от нуля).

Условимся, как обычно, считать значение суммы равным нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего. Так, уравнение (2) при $i=1$ имеет вид

$$x_1=-\sum_{j=2}^{m}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j+\frac{f_1}{a_{11}}.$$

В дальнейшем верхний индекс будет указывать номер итерации, например

$$x^n=(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)^T,$$

где x_i^n — n-я итерация i-й компоненты вектора x.

В *методе Якоби* исходят из записи системы в виде (2), причем итерации определяются следующим образом:

$$x_i^{n+1}=-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^n-\sum_{j=i+1}^{m}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^n+\frac{f_i}{a_{ii}}, \tag{3}$$

$$n=0, 1, \ldots, n_0,\quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Начальные значения x_i^0, $i=1, 2, \ldots, m$ задаются произвольно. Окончание итераций определяется либо заданием максимального числа итераций n_0, либо условием

$$\max_{1\leq i\leq m}|x_i^{n+1}-x_i^n|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — заданное число. Позже в § 2 будет показано, что при определенных условиях на матрицу A метод Якоби сходится, т. е. $\|x^n-x\|\to 0$ при $n\to\infty$ (здесь x — точное решение системы (1), а x^n — приближенное решение, полученное на n-й итерации).

Итерационный *метод Зейделя* имеет вид

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}},$$

$$i=1, 2, \ldots, m, \quad n=0, 1, \ldots, n_0. \tag{4}$$

Чтобы понять, как находятся отсюда значения x_i^{n+1}, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, запишем подробнее первые два уравнения системы (4):

$$x_1^{n+1} = -\sum_{j=2}^{m} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^n + \frac{f_1}{a_{11}}, \tag{5}$$

$$x_2^{n+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{n+1} - \sum_{j=3}^{m} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^n + \frac{f_2}{a_{22}}. \tag{6}$$

Первая компонента x_1^{n+1} вектора x^{n+1} находится из уравнения (5) явным образом, для ее вычисления нужно знать вектор x^n и значение f_1. При нахождении x_2^{n+1} из уравнения (6) используются только что найденное значение x_1^{n+1} и известные значения x_j^n, $j=3, \ldots, m$, с предыдущей итерации. Таким образом, компоненты x_i^{n+1} вектора x^{n+1} находятся из уравнения (4) последовательно, начиная с $i=1$.

2. Матричная запись методов Якоби и Зейделя. Для исследования сходимости итерационных методов удобнее записывать их не в координатной, а в матричной форме. Представим матрицу A системы (1) в виде суммы трех матриц

$$A = A_1 + D + A_2, \tag{7}$$

где $D = \operatorname{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}]$ — диагональная матрица с той же главной диагональю, что и матрица A, матрица A_1 — нижняя треугольная и матрица A_2 — верхняя треугольная с нулевыми главными диагоналями.

Например, при $m=3$ матрицы A_1, A_2, D имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Представление системы (1) в форме (2) эквивалентно ее записи в виде матричного уравнения

$$x = -D^{-1}A_1x - D^{-1}A_2x + D^{-1}f.$$

Отсюда видно, что метод Якоби (3) в векторной записи выглядит следующим образом:

$$x^{n+1} = -D^{-1}A_1x^n - D^{-1}A_2x^n + D^{-1}f,$$

или, что то же самое,

$$Dx^{n+1} + (A_1 + A_2)x^n = f. \tag{8}$$

Метод Зейделя (4) записывается в виде

$$x^{n+1} = -D^{-1}A_1x^{n+1} - D^{-1}A_2x^n + D^{-1}f$$

или

$$(D+A_1)x^{n+1} + A_2x^n = f. \tag{9}$$

Учитывая (7), методы (8) и (9) можно переписать соответственно в виде

$$D(x^{n+1} - x^n) + Ax^n = f, \tag{10}$$

$$(D + A_1)(x^{n+1} - x^n) + Ax^n = f. \tag{11}$$

Из этой записи видно, что если итерационный метод сходится, то он сходится к решению исходной системы уравнений.

Очень часто для ускорения сходимости в итерационные методы вводят числовые параметры, которые зависят, вообще говоря, от номера итерации. Например, в методы (10), (11) можно ввести *итерационные параметры* τ_{n+1} следующим образом:

$$D\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f,$$

$$(D + A_1)\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f.$$

Способ выбора итерационных параметров выясняется при исследовании сходимости. В теории итерационных методов существует два круга вопросов: а) при каких значениях параметров метод сходится, б) при каких значениях параметров сходимость будет наиболее быстрой (соответствующие параметры называются оптимальными). В дальнейшем (см. § 4) мы подробнее остановимся на этих вопросах в связи с конкретными итерационными методами.

Приведенные выше методы Якоби и Зейделя относятся к *одношаговым итерационным методам*, когда для нахождения x^{n+1} требуется помнить только одну предыдущую итерацию x^n. Иногда используются и *многошаговые итерационные методы*, в которых x^{n+1} определяется через значения x^k на двух и более предыдущих итерациях, т. е. $x^{n+1} = F[x^n, x^{n-1}, \ldots, x^{n-l}]$.

3. Каноническая форма одношаговых итерационных методов. На примере методов Якоби и Зейделя видно, что один и тот же итерационный метод можно записать многими различными способами. Поэтому целесообразно ввести какую-то стандартную форму записи итерационных методов. Условимся прежде всего записывать итерационный метод не в координатной форме, а в матричной, Теперь x_n будет обозначать вектор, полученный в результате n-й итерации.

Канонической формой одношагового итерационного метода решения системы (1) называется его запись в виде

$$B_{n+1}\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f, \qquad n = 0, 1, \ldots, n_0. \tag{12}$$

Здесь B_{n+1} — матрица, задающая тот или иной итерационный метод, τ_{n+1} — итерационный параметр. Предполагается, что задано начальное приближение x_0 и что существуют матрицы B_n^{-1}, $n=1, 2, \ldots, n_0-1$. Тогда из уравнения (12) можно последовательно определить все x_n, $n=1, 2, \ldots, n_0$. Для нахождения x_{n+1} по известным f и x_n достаточно решить систему уравнений

$$B_{n+1}x_{n+1}=F_n,$$

где $F_n=(B_{n+1}-\tau_{n+1}A)x_n+\tau_{n+1}f$.

Итерационный метод называют *явным* (*неявным*), если $B_n=E$ ($B_n\neq E$), где E — единичная матрица. Как правило, неявные итерационные методы имеет смысл применять лишь в том случае, когда каждую матрицу B_n обратить легче, чем исходную матрицу A (т. е. когда решение системы уравнений с матрицей B_n требует меньше машинной памяти или времени или алгоритмически проще, чем решение исходной системы). Например, в методе Зейделя приходится обращать треугольную матрицу. В дальнейшем (см. § 4) будет показано, что преимуществом неявных методов является более быстрая сходимость.

Итерационный метод (12) называется *стационарным*, если $B_{n+1}=B$ и $\tau_{n+1}=\tau$ не зависят от номера итерации, и *нестационарным* — в противоположном случае.

Приведем еще несколько примеров итерационных методов. *Методом простой итерации* называют явный метод

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+Ax_n=f \tag{13}$$

с постоянным параметром τ. Явный метод

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau_{n+1}}+Ax_n=f \tag{14}$$

с переменным параметром τ_{n+1} называется *итерационным методом Ричардсона*. Для методов (13), (14) известен способ выбора оптимальных итерационных параметров в том случае, когда A — симметричная положительно определенная матрица (см. § 6).

Обобщением метода Зейделя (11) является *метод верхней релаксации*

$$(D+\omega A_1)\frac{x_{n+1}-x_n}{\omega}+Ax_n=f, \tag{15}$$

где $\omega>0$ — заданный числовой параметр. В § 2 будет показано, что в случае симметричной положительно определенной матрицы A метод (15) сходится при $0<\omega<2$.

Для получения расчетных формул перепишем (15) в виде

$$(E+\omega D^{-1}A_1)x_{n+1}=((1-\omega)E-\omega D^{-1}A_2)x_n+\omega D^{-1}f.$$

В покомпонентной записи получим

$$x_i^{n+1}+\omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{n+1}=$$

$$=(1-\omega)x_i^n-\omega\sum_{j=i+1}^{m}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^n+\omega\frac{f_i}{a_{ii}}, \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда последовательно, начиная с $i=1$, находим все x_i^{n+1}:

$$x_1^{n+1}=(1-\omega)\,x_1^n-\omega\sum_{j=2}^{m}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\,x_j^n+\omega\,\frac{f_1}{a_{11}},$$

$$x_2^{n+1}=-\omega\,\frac{a_{21}}{a_{11}}\,x_1^{n+1}+(1-\omega)\,x_2^n-\omega\sum_{j=3}^{m}\frac{a_{2j}}{a_{22}}\,x_j^n+\omega\,\frac{f_2}{a_{22}}$$

и т. д.

§ 2. Исследование сходимости итерационных методов

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax=f \tag{1}$$

с невырожденной действительной матрицей A и одношаговый стационарный итерационный метод, записанный в каноническом виде

$$B\,\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+Ax_n=f, \qquad n=0,\,1,\,\ldots, \tag{2}$$

где x_0 задан.

Говорят, что итерационный метод (2) *сходится*, если $\|x_n-x\|\to 0$ при $n\to\infty$. Под нормой вектора x будем понимать сейчас среднеквадратичную норму

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{1/2}.$$

Решение x системы (1) будем рассматривать как элемент m-мерного евклидова пространства H со скалярным произведением

$$(u,\,v)=\sum_{j=1}^{m}u_jv_j.$$

При формулировке условий сходимости будут использоваться матричные неравенства. Для действительной матрицы C неравенство $C>0$ означает, что $(Cx,\,x)>0$ для всех $x\in H$, $x\neq 0$. Из неравенства $C>0$ следует, что существует константа $\delta>0$ такая, что $(Cx,\,x)\geqslant\delta\|x\|^2$.

Действительно, если $C>0$ — симметричная матрица, то все ее собственные значения положительны и в качестве δ можно взять минимальное собственное значение. Если $C>0$ — несимметричная матрица, то для любого $x\in H$, $x\neq 0$ имеем

$$(Cx,\,x)=\frac{1}{2}\left[(Cx,\,x)+(x,\,C^*x)\right]>0,$$

где C^* — матрица, транспонированная к C. Поэтому в качестве δ можно взять минимальное собственное значение матрицы $C_0=0{,}5(C+C^*)$. Из оценки $(Cx,\,x)\geqslant\delta\|x\|^2$ следует, что существует матрица C^{-1}. Неравенство $C\geqslant 0$ означает, что $(Cx,\,x)\geqslant 0$ для всех $x\in H$. Если $C\geqslant 0$, то C^{-1} может и не существовать.

Перейдем к исследованию сходимости итерационного метода (2). *Погрешность метода на n-й итерации* характеризуется вектором $z_n = x_n - x$, который согласно (1), (2) удовлетворяет однородному уравнению

$$B\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau}+Az_n=0, \qquad n=0, 1, \ldots, \qquad z_0=x_0-x. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть A — симметричная положительно определенная матрица, $\tau>0$ и пусть выполнено неравенство*

$$B-0{,}5\tau A>0. \tag{4}$$

Тогда итерационный метод (2) *сходится.*

Доказательство. Достаточно показать, что среднеквадратичная норма решения z_n уравнения (3) стремится к нулю при $n\to\infty$ и при любой начальной погрешности z_0. Покажем сначала, что при условии (4) числовая последовательность $J_n = (Az_n, z_n)$ является невозрастающей. Из уравнения (3) найдем

$$z_{n+1} = (E-\tau B^{-1}A)z_n, \quad Az_{n+1} = (A-\tau AB^{-1}A)z_n,$$

откуда получим

$$(Az_{n+1}, z_{n+1}) = (Az_n, z_n) - \tau(AB^{-1}Az_n, z_n) - \\ -\tau(Az_n, B^{-1}Az_n) + \tau^2(AB^{-1}Az_n, AB^{-1}Az_n).$$

Вследствие симметричности матрицы A имеем

$$(AB^{-1}Az_n, z_n) = (Az_n, B^{-1}Az_n),$$

поэтому

$$(Az_{n+1}, z_{n+1}) = (Az_n, z_n) - 2\tau((B-0{,}5\tau A)B^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n). \tag{5}$$

Отсюда, учитывая условие (4), получаем неравенство

$$(Az_{n+1}, z_{n+1}) \leqslant (Az_n, z_n).$$

Таким образом, числовая последовательность $J_n = (Az_n, z_n)$ монотонна и ограничена снизу нулем. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} J_n = J. \tag{6}$$

Далее, из положительной определенности матрицы $B-0{,}5\tau A$ следует существование константы $\delta>0$ такой, что

$$((B-0{,}5\tau A)B^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n) \geqslant \delta \|B^{-1}Az_n\|^2.$$

Отсюда и из (5) получаем неравенство

$$J_{n+1} - J_n + 2\delta\tau\|B^{-1}Az_n\|^2 \leqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$ и учитывая (6), убеждаемся в том, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n\| = 0,$$

где $w_n = B^{-1}Az_n$. Наконец, замечая, что A — положительно опреде ленная и, следовательно, обратимая матрица, получим

$$z_n=A^{-1}Bw_n, \quad \|z_n\|\leqslant\|A^{-1}B\|\|w_n\|$$

и тем самым

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n\|=0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Как показано в [32, с. 527], при условиях теоремы 1 для погрешности $z_n=x_n-x$ итерационного метода (2) справедлива оценка

$$\|z_n\|_A\leqslant\rho^n\|z_0\|_A,$$

где $\rho\in(0, 1)$, $\|z_n\|_A=(Az_n, z_n)^{1/2}$. Эта оценка означает, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем ρ. Константа $\rho=(1-2\tau\delta_*\delta/\|B\|^2)^{1/2}$, где δ — минимальное собственное значение матрицы A и δ_* — минимальное собственное значение матрицы $0{,}5\,(B^*+B-\tau A)$.

Применим теорему 1 к конкретным итерационным методам, рассмотренным в предыдущем параграфе. Метод Якоби имеет следующий канонический вид:

$$D(x_{n+1}-x_n)+Ax_n=f, \tag{7}$$

где $D=\operatorname{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}]$. Таким образом, в данном случае $B=D$, $\tau=1$.

Следствие 1. *Пусть A — симметричная положительно определенная матрица с диагональным преобладанием, т. е.*

$$a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, \quad i=1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Тогда метод Якоби сходится.

Доказательство. Условие сходимости (4) в данном случае имеет вид $A<2D$. Покажем, что это матричное неравенство следует из неравенств (8). Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$(Ax, x)=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}x_ix_j$$

и воспользуемся оценками

$$(Ax, x)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}|x_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}|x_j^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}|x_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ji}|x_i^2.$$

Из условий симметричности и положительной определенности матрицы A имеем $a_{ji}=a_{ij}$, $a_{ii}>0$, $i, j=1, 2, \ldots, m$, и поэтому предыдущая оценка приводит к неравенству

$$(Ax, x)\leqslant\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}|x_i^2=\sum_{i=1}^{m}x_i^2\left(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|+a_{ii}\right). \tag{9}$$

Перепишем условие (8) в виде

$$a_{ii}+\sum_{j\neq i}|a_{ij}|<2a_{ii}, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Тогда из неравенства (9) получим

$$(Ax, x)<2\sum_{i=1}^{m} a_{ii}x_i^2=2(Dx, x),$$

что и требовалось.

Следствие 2. *Пусть A — симметричная положительно определенная матрица. Тогда метод верхней релаксации*

$$(D+\omega A_1)\frac{x_{n+1}-x_n}{\omega}+Ax_n=f$$

сходится при условии $0<\omega<2$. *В частности, метод Зейделя* $(\omega=1)$ *сходится.*

Доказательство. Метод верхней релаксации приводится к каноническому виду (2) с $B=D+\omega A_1$, $\tau=\omega$. Напомним, что исходная матрица A представляется в виде суммы $A=D+A_1+A_2$, где A_1 — нижняя треугольная, A_2 — верхняя треугольная и D — диагональная матрицы (см. (7) из § 1). Для симметричной матрицы A матрица A_2 является транспонированной к A_1, поэтому

$$(Ax, x)=(Dx, x)+(A_1x, x)+(A_2x, x)=(Dx, x)+2(A_1x, x).$$

Условие сходимости (4) принимает вид

$$(Bx, x)-0{,}5\omega(Ax, x)=$$
$$=((D+\omega A_1)x, x)-0{,}5\omega((Dx, x)+2(A_1x, x))=(1-0{,}5\omega)(Dx, x)>0$$

и выполняется при $0<\omega<2$.

Рассмотрим еще вопрос о сходимости метода простой итерации

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+Ax_n=f \tag{10}$$

с симметричной положительно определенной матрицей A. Согласно (4) метод сходится при условии

$$E-0{,}5\tau A>0. \tag{11}$$

Какие ограничения на параметр τ накладывает условие (11)? Пусть λ_i, $i=1, 2, \ldots, m$, — собственные значения матрицы A, расположенные в порядке возрастания. Условие (11) эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы $E-0{,}5\tau A$ положительны. Достаточно потребовать положительности минимального собственного числа этой матрицы, равного $1-0{,}5\tau\lambda_m$. Таким образом, итерационный метод (10) сходится, если

$$\tau<2/\lambda_{\max}, \tag{12}$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число матрицы A.

Условие (12) и необходимо для сходимости метода (10), т. е. если (12) нарушено, то найдется начальное приближение x_0, при котором $\|x_n - x\| \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем последнее утверждение. Возьмем в качестве начального приближения вектор $x_0 = x + \mu$, где x — точное решение задачи (1), а μ — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_{max} = \lambda_m$, т. е. $A\mu = \lambda_m \mu$. При таком выборе начального приближения имеем $z_0 = x_0 - x = \mu$. Из уравнения (3) при $B = E$ получим

$$z_n = (E - \tau A)^n z_0 = (E - \tau A)^n \mu$$

и, следовательно, $z_n = (1 - \tau\lambda_m)^n \mu$, $\|z_n\| = |1 - \tau\lambda_m|^n \|\mu\|$.

Если $\tau = 2\lambda_m^{-1}$, то $\|z_n\| = \|\mu\| \not\to 0$ при $n \to \infty$. Если же $\tau > 2\lambda_m^{-1}$, то $|1 - \tau\lambda_m| > 1$ и $\|z_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, условие (12) необходимо и достаточно для сходимости метода простой итерации (10).

В заключение параграфа отметим, что теория итерационных методов не заканчивается исследованием сходимости. При наличии хотя бы двух итерационных методов возникает вопрос о том, какой из этих методов сходится быстрее, т. е. для какого метода погрешность $\|x_n - x\|$ станет меньше заданного числа ε при меньшем числе итераций n. Сюда же примыкает вопрос о нахождении итерационных параметров, минимизирующих число итераций, необходимых для получения заданной точности. Этот круг вопросов будет подробно рассмотрен в следующих параграфах.

§ 3. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных итерационных методов

1. Введение. Некоторые итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений уже рассматривались в § 1, 2. Напомним необходимые для дальнейшего сведения.

Пусть дана система уравнений

$$Ax = f, \tag{1}$$

где $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$,— вещественная квадратная матрица, имеющая обратную, и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$. Канонической формой одношагового итерационного метода называется его запись в виде

$$B_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где n — номер итерации, x_0 — заданное начальное приближение, $x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)^T$. Матрицы B_{n+1} и числа $\tau_{n+1} > 0$ задают тот или иной конкретный итерационный метод.

В настоящем параграфе подробно рассматриваются стационарные итерационные методы

$$B \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + Ax_n = f, \tag{3}$$

в которых матрица B и числовой параметр τ не зависят от номера итерации n.

Погрешность итерационного метода (3) $v_n = x_n - x$, где x — точное решение системы (1), удовлетворяет уравнению

$$B\frac{v_{n+1}-v_n}{\tau} + Av_n = 0, \quad n=0, 1, \ldots, \quad v_0 = x_0 - x, \tag{4}$$

которое отличается от уравнения (3) лишь тем, что является однородным.

Сходимость итерационного метода (3) означает, что $v_n \to 0$ в некоторой норме при $n\to\infty$. Переписывая уравнение (4) в разрешенной относительно v_{n+1} форме

$$v_{n+1} = Sv_n, \tag{5}$$

где

$$S = E - \tau B^{-1}A, \tag{6}$$

видим, что свойство сходимости итерационного метода целиком определяется матрицей S. Необходимые и достаточные условия сходимости в терминах матрицы S приведены ниже в п. 3. Матрица S называется *матрицей перехода от n-й итерации к* $(n+1)$*-й*.

2. Норма матрицы. При исследовании сходимости будем рассматривать векторы x_n и x как элементы m-мерного линейного пространства H, в котором введена норма $\|x\|$ вектора x. Нормой матрицы A, подчиненной данной норме вектора, называется число

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Норму вектора в пространстве H можно ввести различным образом. Нам прежде всего потребуется норма

$$\|x\|_C = \max_{1\leq i\leq m}|x_i|.$$

Подчиненная ей норма матрицы A выражается через элементы матрицы A следующим образом:

$$\|A\|_C = \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|.$$

Докажем это утверждение. Для любого вектора x справедливо неравенство

$$\|Ax\|_C = \max_{1\leq i\leq m}\left|\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\right| \leq \max_{1\leq j\leq m}|x_j| \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}| = \left(\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\right)\|x\|_C,$$

т. е.

$$\|Ax\|_C \leq \left(\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\right)\|x\|_C. \tag{7}$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно построить вектор $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)^T$, для которого выполняется равенство

$$\| Ax_0 \|_C = \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{m} | a_{ij} | \right) \| x_0 \|_C. \tag{8}$$

Пусть функция

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} | a_{ij} |, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

достигает максимума при $i=k$, т. е.

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{m} | a_{ij} | = \sum_{j=1}^{m} | a_{kj} |. \tag{9}$$

Рассмотрим вектор x_0, имеющий координаты

$$x_j^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{kj} \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } a_{kj} < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что $\|x_0\|_C = 1$. Оценим снизу выражение для $\|Ax_0\|_C$. Имеем

$$\| Ax_0 \|_C = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^0 \right| \geqslant \left| \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j^0 \right|.$$

Далее, исходя из определения (10) вектора x_0, получим

$$\left| \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j^0 \right| = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j^0 = \sum_{j=1}^{m} | a_{kj} |,$$

и, следовательно,

$$\| Ax_0 \|_C \geqslant \sum_{j=1}^{m} | a_{kj} | = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{m} | a_{ij} |.$$

Последнее равенство справедливо в силу (9). Тем самым нашли вектор x_0, для которого

$$\| Ax_0 \| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{m} | a_{ij} | \| x_0 \|_C.$$

Поскольку для каждого вектора x справедливо противоположное неравенство (7), заключаем, что для x_0 справедливо равенство (8).

3. Теорема о сходимости итерационного метода. Справедлива

Теорема 1. *Итерационный метод* (3) *сходится при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы $S = E - \tau B^{-1} A$ по модулю меньше единицы.*

Доказательство. Представим уравнение (4) для погрешности $v_n = x_n - x$ в виде (5)—(6). Докажем сначала необходимость условий теоремы 1. Предположим, что матрица S имеет собственное число s, для которого $|s| > 1$, и покажем, что в этом случае можно так подобрать начальное приближение x_0, чтобы погрешность $v_n = x_n - x$ неограниченно возрастала при $n \to \infty$. Пусть μ — собственный вектор матрицы S, отвечающий собственному числу

s, $|s|>1$. Возьмем в качестве начального приближения вектор $x_0=x+\mu$, так что начальная погрешность $v_0=\mu$. Тогда из уравнения (5) получим

$$v_n=S^n v_0=s^n v_0=s^n\mu$$

и $\|v_n\|=|s|^n\|\mu\|\to\infty$ при $n\to\infty$. Если $|s|=1$, то $\|v_n\|=\|\mu\|\not\to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство достаточности условий теоремы 1 проведем сначала в предположении, что матрица S имеет m линейно независимых собственных векторов. Пусть s_k, $k=1, 2, \ldots, m$,— собственные числа матрицы S и μ_k, $k=1, 2, \ldots, m$,— отвечающие им линейно независимые собственные векторы. Разложим начальную погрешность $v_0=x_0-x$ по векторам μ_k:

$$v_0=\sum_{k=1}^{m} c_k\mu_k.$$

Тогда получим

$$v_n=S^n v_0=\sum_{k=1}^{m} c_k s_k^n\mu_k.$$

В любой норме справедлива оценка

$$\|v_n\|\leqslant\rho^n\sum_{k=1}^{m}|c_k|\,\|\mu_k\|, \tag{11}$$

где $\rho=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}|s_k|$—спектральный радиус матрицы S. Из оценки (11) в силу предположения теоремы 1 о том, что $\rho<1$, и следует сходимость метода.

4. Продолжение доказательства. В общем случае, когда система собственных векторов матрицы S не является полной, доказательство достаточности условий теоремы 1 проводится с помощью приведения S к жордановой форме. Напомним (см. [12], стр. 147), что для любой квадратной матрицы S порядка m существует невырожденная матрица P такая, что матрица $\tilde{S}=P^{-1}SP$ имеет жорданову каноническую форму

$$\tilde{S}=\begin{bmatrix}\tilde{S}_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \tilde{S}_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{S}_l\end{bmatrix},$$

где $\tilde{S}_k$ либо собственное число матрицы S, либо жорданова клетка, т. е. матрица вида

$$\tilde{S}_k=\begin{bmatrix}s_k & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & s_k & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & s_k\end{bmatrix},$$

а s_k — собственные числа матрицы S.

Помимо обычной жордановой формы нам потребуется еще так называемая модифицированная жорданова форма матрицы S. Она строится следующим образом.

Применим к матрице $\tilde{S}$ преобразование подобия $D^{-1}\tilde{S}D$ с диагональной матрицей $D=\operatorname{diag}[1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{m-1}]$, где ε — любое положительное число. Нетрудно убедиться, что матрица

$$\hat{S}=D^{-1}\tilde{S}D$$

имеет ту же блочно-диагональную структуру, что и матрица $\tilde{S}$, однако жордановы клетки имеют теперь следующий вид:

$$\hat{S}_k=\begin{bmatrix} s_k & \varepsilon & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_k & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & s_k \end{bmatrix}.$$

Матрицы S и $\hat{S}$ связаны равенством

$$\hat{S}=Q^{-1}SQ, \quad Q=PD. \tag{12}$$

Матрица $\hat{S}$ имеет в каждой строке не более двух отличных от нуля элементов, поэтому

$$\|\hat{S}\|_C\leqslant\rho(S)+\varepsilon, \tag{13}$$

где $\rho(S)$ — спектральный радиус матрицы S, т. е.

$$\rho(S)=\max_{1\leqslant k\leqslant m}|s_k|.$$

Напомним, что согласно (10) из § 6 гл. 1 подчиненная норма матрицы удовлетворяет неравенству

$$\|S\|\geqslant\rho(S). \tag{14}$$

Покажем теперь, что можно найти такую норму вектора, для которой подчиненная норма матрицы станет сколь угодно близкой к ее спектральному радиусу. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon>0$ существует норма $\|\cdot\|_*$ вектора такая, что для подчиненной нормы матрицы справедливо неравенство*

$$\|S\|_*\leqslant\rho(S)+\varepsilon. \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся преобразованием (12) и определим норму вектора $\|\cdot\|_*$ равенством

$$\|y\|_*=\|Q^{-1}y\|_C$$

для любого вектора $y\in H$. Для подчиненной нормы матрицы S имеем

$$\|S\|_*=\sup_{y\neq 0}\frac{\|Sy\|_*}{\|y\|_*}=\sup_{y\neq 0}\frac{\|Q^{-1}Sy\|_C}{\|Q^{-1}y\|_C}.$$

Обозначая $Q^{-1}y=x$ и учитывая (12), (13), получим отсюда

$$\|S\|_* = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Q^{-1}SQx\|_C}{\|x\|_C} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\hat{S}x\|_C}{\|x\|_C} = \|\hat{S}\|_C \leqslant \rho(S)+\varepsilon,$$

что и требовалось.

Завершим доказательство теоремы 1. Из уравнения (5) получим

$$v_n = S^n v_0, \quad n=0, 1, \ldots \tag{16}$$

Пусть $\|\cdot\|_*$ — норма, для которой выполнено неравенство (15). По условию теоремы $\rho(S)<1$, поэтому существует $\varepsilon>0$ такое, что $\|S\|_* \leqslant \rho(S)+\varepsilon \leqslant q < 1$. Из (16) получим оценку

$$\|v_n\|_* \leqslant \|S\|_*^n \|v_0\|_* \leqslant q^n \|v_0\|_*, \tag{17}$$

из которой следует, что $\|v_n\|_* \to 0$ при любых начальных приближениях.

§ 4. Оценки скорости сходимости стационарных итерационных методов

1. Скорость сходимости итерационного метода. При практическом использовании итерационных методов важен не только сам факт сходимости, но и скорость, с которой приближенное решение сходится к точному. Так как при численном решении всегда осуществляется конечное число итераций, необходимо знать, во сколько раз уменьшается начальная погрешность после проведения заданного числа итераций. Ответить на эти вопросы позволяет анализ оценок погрешности итерационного метода.

В предыдущем параграфе при доказательстве теоремы 1 была получена оценка (17), которую можно переписать в виде

$$\|x_n - x\|_* \leqslant q^n \|x_0 - x\|_*, \quad n=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $q \in (0, 1)$. Если для погрешности итерационного метода выполняются оценки вида (1), то говорят, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

Используя оценку (1), можно определить число итераций, достаточное для того, чтобы начальная погрешность уменьшилась в заданное число раз. Действительно, зададим произвольное $\varepsilon>0$ и потребуем, чтобы $q^n<\varepsilon$, т. е. чтобы

$$n \geqslant n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/q)}. \tag{2}$$

Тогда из (1) получим, что

$$\|x_n - x\|_* \leqslant \varepsilon \|x_0 - x\|_*,$$

т. е. после проведения $n_0(\varepsilon)$ итераций начальная погрешность $\|x_0 - x\|_*$ уменьшилась в ε^{-1} раз. Целая часть числа $n_0(\varepsilon)$ называется ***минимальным числом итераций, необходимым для получения заданной точности ε.***

Выражение $\ln(1/q)$, находящееся в знаменателе числа $n_0(\varepsilon)$, называется *скоростью сходимости итерационного метода.* Скорость сходимости целиком определяется свойствами матрицы перехода S и не зависит ни от номера итерации n, ни от выбора начального приближения x_0, ни от задаваемой точности ε. Качество различных итерационных методов сравнивают обычно по их скорости сходимости: чем выше скорость сходимости, тем лучше метод.

2. Оценки скорости сходимости в случае симметричных матриц *A* и *B*. Продолжим изучение итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax=f. \tag{3}$$

Будем по-прежнему рассматривать стационарные одношаговые итерационные методы

$$B\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+Ax_n=f. \tag{4}$$

Теорема о сходимости, доказанная в предыдущем параграфе, имеет принципиальное теоретическое значение и накладывает минимальные ограничения на матрицы A и B. Однако ее непосредственное применение к конкретным итерационным методам не всегда возможно, так как отыскание или исследование спектра матрицы $S=E-\tau B^{-1}A$ является, как правило, более трудной задачей, чем решение системы (3).

В настоящем параграфе будет доказана теорема, в которой условия сходимости формулируются в виде легко проверяемых матричных неравенств, связывающих матрицы A и B. Аналогичная теорема о сходимости была доказана в § 2, однако там не были получены оценки скорости сходимости.

Будем рассматривать решение x системы (3) и последовательные приближения x_n как элементы конечномерного линейного пространства H, а матрицы A, B и другие — как операторы, действующие в пространстве H. Предположим, что в H введены скалярное произведение (y, v) и норма $\|y\|=\sqrt{(y, y)}$. Для двух симметричных матриц A и B неравенство $A\geqslant B$ означает, что $(Ax, x)\geqslant(Bx, x)$ для всех $x\in H$. В случае симметричной положительно определенной матрицы D будем обозначать $\|y\|_D=\sqrt{(Dy, y)}$.

Теорема 1. *Пусть A и B — симметричные положительно определенные матрицы, для которых справедливы неравенства*

$$\gamma_1 B\leqslant A\leqslant\gamma_2 B, \tag{5}$$

где γ_1, γ_2 — положительные постоянные, $\gamma_2>\gamma_1$. При

$$\tau=2/(\gamma_1+\gamma_2) \tag{6}$$

итерационный метод (4) *сходится и для погрешности справедливы оценки*

$$\|x_n-x\|_A\leqslant\rho^n\|x_0-x\|_A,\qquad n=0, 1, \ldots, \tag{7}$$

$$\|x_n-x\|_B\leqslant\rho^n\|x_0-x\|_B,\qquad n=0, 1, \ldots, \tag{8}$$

где $\|v\|_A=\sqrt{(Av,v)}$, $\|v\|_B=\sqrt{(Bv,v)}$ *и*

$$\rho=\frac{1-\xi}{1+\xi},\qquad \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\,. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1 будет дано в п. 4. Сделаем необходимые замечания и приведем следствия из этой теоремы.

Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$A\mu=\lambda B\mu. \tag{10}$$

Если для матриц A и B выполнены неравенства (5), то из (10) для любого собственного вектора получим неравенства

$$\gamma_1(B\mu,\mu)\leqslant(A\mu,\mu)=\lambda(B\mu,\mu)\leqslant\gamma_2(B\mu,\mu).$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_1\leqslant\lambda_{\min}(B^{-1}A),\quad \gamma_2\geqslant\lambda_{\max}(B^{-1}A), \tag{11}$$

где $\lambda_{\min}(B^{-1}A)$ и $\lambda_{\max}(B^{-1}A)$ — минимальное и максимальное собственные числа задачи (10).

Таким образом, наиболее точными константами, с которыми выполняются неравенства (5), являются константы

$$\gamma_1=\lambda_{\min}(B^{-1}A),\quad \gamma_2=\lambda_{\max}(B^{-1}A).$$

В этом случае параметр

$$\tau_0=\frac{2}{\lambda_{\min}(B^{-1}A)+\lambda_{\max}(B^{-1}A)}$$

называется оптимальным итерационным параметром, так как он минимизирует величину

$$\rho=\frac{1-\xi}{1+\xi},\qquad \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

на множестве всех положительных γ_1, γ_2, удовлетворяющих условиям (11).

Пусть $\lambda_{\min}(A)$ и $\lambda_{\max}(A)$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы A.

Следствие 1. *Если* $A^T=A>0$, *то для метода простой итерации*

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+Ax_n=f \tag{12}$$

при $\tau=\tau_0=\dfrac{2}{\lambda_{\min}(A)+\lambda_{\max}(A)}$ *справедлива оценка*

$$\|x_n-x\|\leqslant\rho_0^n\|x_0-x\|, \tag{13}$$

где $\rho_0=\dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi=\dfrac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}$.

Следствие 2. *Для симметричной матрицы A и $\tau_0 = 2/(\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A))$ справедливо равенство*

$$\|E - \tau_0 A\| = \rho_0,$$

где $\rho_0 = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \dfrac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}$.

В приложениях часто встречаются задачи с плохо обусловленной матрицей A, когда отношение $\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$ велико. В этом случае число ρ_0 близко к единице и метод простой итерации сходится медленно. Оценим число итераций $n_0(\varepsilon)$, которое требуется в случае малых ξ для достижения заданной точности ε, т. е. для получения оценки

$$\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon \|x_0 - x\|.$$

Из условия $\rho_0^n < \varepsilon$ получаем, что $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, где

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_0)},$$

и при малых ξ имеем

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi} = O\left(\frac{1}{\xi}\right). \tag{14}$$

Таким образом, метод простой итерации (12) в случае малых ξ является медленно сходящимся методом. Ускорить сходимость итерационных методов можно двумя способами: во-первых, за счет применения неявных итерационных методов (4), когда $B \neq E$, и, во-вторых, оставаясь в классе явных методов, можно выбрать $\tau = \tau_n$ зависящим от номера итерации и таким, чтобы уменьшить общее число итераций. Применяется и комбинация этих двух способов, т. е. используются неявные итерационные методы с переменными итерационными параметрами.

Использование неявных итерационных методов (4) объясняется тем, что при соответствующем выборе матрицы B отношение $\xi = \dfrac{\lambda_{\min}(B^{-1}A)}{\lambda_{\max}(B^{-1}A)}$ для обобщенной задачи на собственные значения (10) будет больше, чем отношение $\dfrac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}$.

3. Правила действий с матричными неравенствами. Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1, приведем необходимые для дальнейшего сведения из линейной алгебры.

1) *Если A — вещественная симметричная матрица, то существует ортогональная матрица Q (т. е. $Q^T = Q^{-1}$) такая, что $A = Q^T \Lambda Q$, где Λ — диагональная матрица. На главной диагонали матрицы Λ находятся собственные значения матрицы A.* Доказательство см. в [12, с. 156].

2) *Для симметричной матрицы A неравенство $A \geqslant 0$ ($A > 0$) эквивалентно неотрицательности (положительности) всех ее собственных значений.*

Доказательство. Используя свойство 1), получим для любого $x \in H$, что

$$(Ax, x) = (Q^T \Lambda Qx, x) = (\Lambda Qx, Qx) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i^2,$$

где λ_i — собственные числа матрицы A и y_i — i-я компонента вектора $y = Qx$. Отсюда сразу следует, что если все $\lambda_i \geqslant 0$ ($\lambda_i > 0$), то $(Ax, x) \geqslant 0$ для любого $x \in H$ ($(Ax, x) > 0$ для любого $x \neq 0$). Обратно, пусть λ_j — любое собственное число матрицы A. Зададим вектор y, у которого все компоненты кроме j-й равны нулю, а $y_j = 1$. Так как матрица $Q^{-1} = Q^T$ существует, для заданного вектора y найдется вектор $x \in H$ такой, что $Qx = y$. Но тогда

$$0 \leqslant (Ax, x) = (\Lambda y, y) = \lambda_j,$$

т. е. $\lambda_j \geqslant 0$.

3) *Если* $A^T = A > 0$, *то существует* A^{-1}.

Доказательство. Согласно 2) все собственные числа матрицы A положительны, следовательно, $\det A \neq 0$ и существует A^{-1}.

4) *Для симметричной матрицы* S *и любого числа* $\rho > 0$ *эквивалентны следующие* матричные неравенства:

$$-\rho E \leqslant S \leqslant \rho E, \tag{15}$$

$$S^2 \leqslant \rho^2 E. \tag{16}$$

Доказательство. Согласно свойству 2) условие (15) эквивалентно неравенствам

$$|s_k| \leqslant \rho, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где s_k — собственные числа матрицы S. Отсюда получаем $s_k^2 \leqslant \rho^2$, $k = 1, 2, \ldots, m$, что в свою очередь эквивалентно (16).

5) *Если* $A^T = A$ *и* $A \geqslant 0$ ($A > 0$), *то существует матрица* B, *обладающая следующими свойствами:*

$$B^2 = A, \quad B^T = B, \quad B \geqslant 0 \quad (B > 0). \tag{17}$$

Эта матрица называется *квадратным корнем из матрицы* A и обозначается $A^{1/2}$.

Доказательство. Пусть λ_i — собственные числа матрицы A, $i = 1, 2, \ldots, m$. Согласно свойству 1) существует ортогональная матрица Q такая, что

$$QAQ^T = \Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m].$$

Поскольку все λ_i неотрицательны, можно определить матрицу $\Lambda^{1/2}$ как

$$\Lambda^{1/2} = \mathrm{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_m}].$$

Тогда матрица $B = Q^T \Lambda^{1/2} Q$ обладает свойствами (17).

6) *Пусть* $A^T = A$ *и* L — *невырожденная матрица. Тогда эквивалентны неравенства*

$$A \geqslant 0, \quad L^T A L \geqslant 0.$$

Аналогично, эквивалентны строгие неравенства

$$A>0, \quad L^T AL>0.$$

Доказательство. Для любого $x \in H$ имеем $(L^T ALx, x) = (ALx, Lx)$. Значит, $L^T AL \geqslant 0$, если $A \geqslant 0$. Докажем обратное. Так как L^{-1} существует, любой $x \in H$ можно представить в виде $x = Ly$, где $y = L^{-1}x$. Тогда получим

$$(Ax, x) = (L^T ALy, y) \geqslant 0,$$

т. е. $A \geqslant 0$.

7) *Если A и B — симметричные и L — невырожденная матрицы, то эквивалентны неравенства*

$$A \geqslant B, \quad L^T AL \geqslant L^T BL.$$

Доказательство следует немедленно из (6).

8) *Пусть $C^T = C > 0$ и α, β — любые действительные числа. Тогда эквивалентны неравенства*

$$\alpha C \geqslant \beta E, \quad \alpha E \geqslant \beta C^{-1}.$$

Доказательство. Согласно 5) существует матрица $C^{1/2} = (C^{1/2})^T > 0$. Используя свойство 7), перейдем от первого неравенства ко второму с помощью следующей цепочки эквивалентных неравенств:

$$\alpha (C^{-1/2}) C (C^{-1/2}) \geqslant \beta (C^{-1/2}) (C^{-1/2}),$$
$$\alpha (C^{-1/2} C^{1/2}) (C^{1/2} C^{-1/2}) \geqslant \beta C^{-1},$$
$$\alpha E \geqslant \beta C^{-1}.$$

9) *Пусть $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, α и β — любые действительные числа. Тогда эквивалентны неравенства*

$$\alpha A \geqslant \beta B, \quad \alpha B^{-1} \geqslant \beta A^{-1}.$$

Доказательство. Умножая первое неравенство слева и справа на $B^{-1/2}$, перейдем к эквивалентному неравенству

$$\alpha C \geqslant \beta E, \quad C = B^{-1/2} A B^{-1/2}.$$

Согласно 8) последнее неравенство эквивалентно неравенству $\alpha E \geqslant \beta C^{-1}$, т. е.

$$\alpha E \geqslant \beta B^{1/2} A^{-1} B^{1/2},$$

умножая которое слева и справа на $B^{-1/2}$, получим $\alpha B^{-1} \geqslant \beta A^{-1}$.

4. Доказательство теоремы 1. Уравнение для погрешности $v_n = x_n - x$ имеет вид

$$B \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} + Av_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$
$$v_0 = x_0 - x,$$

откуда получим

$$v_{n+1} = Sv_n, \quad S = E - \tau B^{-1} A. \tag{19}$$

Лемма 1. *Пусть A и B — симметричные положительно определенные матрицы и $\rho>0$ — число. Матричные неравенства*

$$\frac{1-\rho}{\tau}B\leqslant A\leqslant\frac{1+\rho}{\tau}B \tag{20}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы при любых $v_0\in H$ для решения задачи (18) *выполнялась оценка*

$$\|v_{n+1}\|_A\leqslant\rho\|v_n\|_A,\quad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{21}$$

Доказательство. Оценку (21) можно записать в виде

$$\|w_{n+1}\|\leqslant\rho\|w_n\|, \tag{22}$$

где $w_n=A^{1/2}v_n$, $\|w_n\|=\sqrt{(w_n,\ w_n)}$. Из (19) получим, что функция w_n удовлетворяет уравнению

$$w_{n+1}=\tilde{S}w_n, \tag{23}$$

где $\tilde{S}=A^{1/2}SA^{-1/2}=E-\tau C$, $C=A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$. Для решения этого уравнения в силу симметричности матрицы $\tilde{S}$ имеем

$$\|w_{n+1}\|^2=(\tilde{S}w_n,\ \tilde{S}w_n)=(\tilde{S}^2w_n,\ w_n).$$

Тем самым оценка (22) эквивалентна неравенству

$$\tilde{S}^2\leqslant\rho^2E \tag{24}$$

и остается доказать эквивалентность неравенств (20) и (24).

Согласно свойству 4) из п. 3, неравенство (24) эквивалентно двум матричным неравенствам

$$-\rho E\leqslant\tilde{S}\leqslant\rho E$$

или

$$\frac{1-\rho}{\tau}E\leqslant C\leqslant\frac{1+\rho}{\tau}E.$$

Так как $C=A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ — симметричная положительно определенная матрица, согласно свойству 8) из п. 3, в этих неравенствах можно перейти к обратным матрицам, т. е. записать, что

$$\frac{1-\rho}{\tau}C^{-1}\leqslant E\leqslant\frac{1+\rho}{\tau}C^{-1}.$$

Подставляя сюда выражение для C, получим

$$\frac{1-\rho}{\tau}A^{-1/2}BA^{-1/2}\leqslant E\leqslant\frac{1+\rho}{\tau}A^{-1/2}BA^{-1/2}.$$

Умножая последние неравенства слева и справа на $A^{1/2}$ (см. свойство 6) из п. 3), приходим к неравенствам (20). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При тех же условиях что и в лемме* 1, *неравенства* (20) *необходимы и достаточны для выполнения оценки*

$$\|v_{n+1}\|_B\leqslant\rho\|v_n\|_B,\quad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{25}$$

Доказательство проводится почти так же, как и в лемме 1, только в качестве w_n надо взять вектор $B^{1/2}v_n$, а в качестве C — матрицу $B^{-1/2}AB^{-1/2}$.

Для доказательства теоремы 1 теперь достаточно заметить, что матричные неравенства (5) можно переписать в виде (20), где

$$\rho=\frac{1-\xi}{1+\xi},\quad \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2},\quad \tau=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}.$$

После этого замечания утверждение теоремы 1 следует из лемм 1 и 2.

5. Оценка погрешности в случае несимметричной матрицы *B*. Пусть задана любая симметричная положительно определенная матрица D. Обозначим через S матрицу перехода итерационного метода (4), т. е. $S=E-\tau B^{-1}A$, и через v_n — погрешность метода, $v_n=x_n-x$. Для исследования сходимости итерационных методов в случае несимметричных матриц A и B может оказаться полезной следующая простая

Лемма 3. *Если B^{-1} существует, то для выполнения оценок*

$$\|v_{n+1}\|_D\leqslant\rho\|v_n\|_D,\qquad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{26}$$

необходимо и достаточно выполнение матричного неравенства

$$\rho^2D\geqslant S^TDS. \tag{27}$$

Доказательство. Учитывая уравнение для погрешности (19), перепишем (26) в виде

$$(DSv_n,\ Sv_n)\geqslant\rho^2(Dv_n,\ v_n)$$

или

$$\rho^2(Dv_n,\ v_n)\geqslant(S^TDSv_n,\ v_n),\qquad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Так как v_0 произвольно, отсюда следует (27).

Обратно, если выполнено (27), то

$$\|v_{n+1}\|_D^2=(Dv_{n+1},\ v_{n+1})=(S^TDSv_n,\ v_n)\leqslant\rho^2(Dv_n,\ v_n)=\rho^2\|v_n\|_D^2,$$

т. е. приходим к (26).

В следующей теореме сформулированы достаточные условия сходимости метода (4) в случае несимметричной матрицы B.

Теорема 2. *Пусть A — симметричная положительно определенная матрица и B — невырожденная матрица. Если выполнено матричное неравенство*

$$\frac{B^T+B}{2}-\frac{\tau}{2}A\geqslant\frac{1-\rho^2}{2\tau}B^TA^{-1}B \tag{28}$$

с константой $\rho\in(0,\ 1)$, не зависящей от n, то итерационный метод (4) *сходится и для погрешности справедлива оценка*

$$\|x_n-x\|_A\leqslant\rho^n\|x_0-x\|_A. \tag{29}$$

Доказательство. Достаточно показать, что выполнены условия леммы 3 при $D=A$. Запишем неравенство (27) для $D=A$