где $l \neq m$. Переставляя в матрице A строки с номерами l и m, получим матрицу $P_{lm}A$, у которой угловой минор порядка $m-1$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l-1,1} & \ldots & a_{l-1,m-1} \\ a_{m1} & \ldots & a_{m,m-1} \\ a_{l+1,1} & \ldots & a_{l+1,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-1,1} & \ldots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

и отличается от (23) только перестановкой строк. Следовательно, этот минор не равен нулю и мы приходим к рассмотренному выше случаю.

6. Вычисление определителя. В большинстве существующих стандартных программ одновременно с решением системы линейных алгебраических уравнений (1) вычисляется определитель матрицы A. Пусть в процессе исключения найдено разложение (22), т. е. построены матрицы L и U. Тогда

$$\det(PA) = \det L \det U = \det L = l_{11} l_{22} \ldots l_{mm},$$

т. е. произведение диагональных элементов матрицы L равно определителю матрицы PA. Поскольку матрицы PA и A отличаются только перестановкой строк, определитель матрицы PA может отличаться от определителя матрицы A только знаком. А именно, $\det(PA) = \det A$, если число перестановок четно, и $\det(PA) = -\det A$, если число перестановок нечетно. Таким образом, для вычисления определителя необходимо знать, сколько перестановок было осуществлено в процессе исключения.

Если матрица A вырождена, то при использовании метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу на некотором шаге исключения k все элементы k-го столбца, находящиеся ниже главной диагонали и на ней, окажутся равными нулю.

Действительно, рассмотрим укороченную систему (см. (11) из § 1), которая получается на k-м шаге исключения:

$$\begin{aligned} a_{kk}^{(k-1)} x_k + \ldots + a_{km}^{(k-1)} x_m &= f_k^{(k-1)}, \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} x_k + \ldots + a_{k+1,m}^{(k-1)} x_m &= f_{k+1}^{(k-1)}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{mk}^{(k-1)} x_k + \ldots + a_{mm}^{(k-1)} x_m &= f_m^{(k-1)}. \end{aligned} \tag{24}$$

При решении системы (24) могут возникнуть два случая: 1) хотя бы один из коэффициентов $a_{kk}^{(k-1)}, a_{k+1,k}^{(k)}, \ldots, a_{mk}^{(k-1)}$ отличен от нуля; 2) $a_{kk}^{(k-1)} = a_{k+1,k}^{(k-1)} = \ldots = a_{mk}^{(k-1)} = 0$. Если для всех $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$ реализуется первый случай, то систему (1) можно решить методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, и, следовательно, $\det A \neq 0$. Если же $\det A = 0$, то при некотором k реализуется второй случай. При этом дальнейшее исключение становится невозможным и программа должна выдать информацию о том, что определитель матрицы равен нулю.

§ 4. Обращение матрицы

Нахождение матрицы, обратной матрице A, эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX=E, \qquad (1)$$

где E — единичная матрица и X — искомая квадратная матрица. Пусть $A=[a_{ij}]$, $X=[x_{ij}]$. Уравнение (1) можно записать в виде системы m^2 уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_{kj}=\delta_{ij}, \qquad i,j=1,2,\ldots,m, \qquad (2)$$

где $\delta_{ij}=1$ при $i=j$ и $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$.

Для дальнейшего важно заметить, что система (2) распадается на m независимых систем уравнений с одной и той же матрицей A, но с различными правыми частями. Эти системы имеют вид

$$Ax^{(j)}=\delta^{(j)}, \qquad j=1, 2, \ldots, m, \qquad (3)$$

где $x^{(j)}=(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^T$, у вектора $\delta^{(j)}$ равна единице j-я компонента и равны нулю остальные компоненты.

Например, для матрицы второго порядка система (2) распадается на две независимые системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}&=1, \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}&=0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}&=0, \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}&=1. \end{aligned}$$

Для решения систем (3) используется метод Гаусса (обычный или с выбором главного элемента). Рассмотрим применение метода Гаусса без выбора главного элемента. Поскольку все системы (3) имеют одну и ту же матрицу A, достаточно один раз совершить прямой ход метода Гаусса, т. е. получить разложение $A=LU$ и запомнить матрицы L и U. Для этого, как мы знаем (см. § 1), требуется сделать $m(m^2-1)/3$ действий умножения и деления.

Обратный ход осуществляется путем решения систем уравнений

$$Ly^{(j)}=\delta^{(j)}, \qquad y^{(j)}=(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj})^T, \qquad (4)$$
$$Ux^{(j)}=y^{(j)}, \qquad j=1,2,\ldots,m, \qquad (5)$$

с треугольными матрицами L и U. Решение системы (5) при каждом j требует $0{,}5\,m(m-1)$ действий. Для решения системы (4) надо еще добавить m делений на диагональные элементы матрицы L, так что здесь потребуется $0{,}5\,m(m+1)$ умножений и делений. Всего при каждом j на обратный ход затрачивается $0{,}5(m-1)m+$ $+0{,}5(m+1)m=m^2$ действий, а для всех j требуется m^3 действий.

Можно сократить число действий, принимая во внимание специальный вид правых частей системы (4). Запишем подробнее первые $j-1$ уравнений системы (4):

$$\begin{gathered} l_{11}y_{1j}=0, \\ l_{21}y_{1j}+l_{22}y_{2j}=0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ l_{j-1,1}y_{1j}+l_{j-1,2}y_{2j}+\ldots+l_{j-1,j-1}\,y_{j-1,j}=0. \end{gathered}$$

Учитывая невырожденность матрицы L, отсюда получим

$$y_{1j}=y_{2j}=\ldots=y_{j-1j}=0.$$

При этом оставшиеся уравнения системы (4) имеют вид

$$\begin{gathered} l_{jj}y_{jj}=1, \\ l_{ij}y_{jj}+l_{i,j+1}y_{j+1,j}+\ldots+l_{ii}y_{ij}=0, \\ i=j+1,\ j+2,\ \ldots,\ m. \end{gathered}$$

Отсюда последовательно находятся неизвестные y_{ij} по формулам

$$y_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=j}^{i-1} l_{ik}y_{kj}}{l_{ii}},\qquad i=j+1, j+2, \ldots, m, \tag{6}$$

$$y_{jj}=1/l_{jj}. \tag{7}$$

Подсчитаем число умножений и делений, необходимое для проведения вычислений по формулам (6). При фиксированном i для вычислений по формуле (6) требуется 1 деление и $i-j$ умножений. Вычисления по формулам (6), (7) при фиксированном j потребуют

$$1+\sum_{i=j+1}^{m}(i-j+1)=\frac{(m-j+2)(m-j+1)}{2}$$

действий. Наконец, решение указанным способом систем (4) при всех $j=1, 2, \ldots, m$ потребует

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(m-j+2)(m-j+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}k(k+1)=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

действий. Общее число действий умножения и деления, необходимое для обращения матрицы указанным способом,

$$\frac{m(m^2-1)}{3}+\frac{m^2(m-1)}{2}+\frac{m(m+1)(m+2)}{6}=m^3.$$

Тем самым обращение матрицы требует не намного больше времени, чем решение системы уравнений.

§ 5. Метод квадратного корня

1. Факторизация эрмитовой матрицы. Метод предназначен для решения систем уравнений

$$Ax=f \tag{1}$$