7. Метод прогонки. Система уравнений (16) представляет собой частный случай систем линейных алгебраических уравнений

$$Ay=f$$

с трехдиагональной матрицей $A=[a_{ij}]$, т. е. с матрицей, все элементы которой, не лежащие на главной и двух побочных диагоналях, равны нулю ($a_{ij}=0$ при $j>i+1$ и $j<i-1$).

В общем случае системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей имеют вид

$$a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j, \quad j=1,\, 2,\, \ldots,\, N-1, \tag{41}$$

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2. \tag{42}$$

Для численного решения систем с трехдиагональными матрицами применяется *метод прогонки*, который представляет собой вариант метода последовательного исключения неизвестных. Особенно широкое применение метод прогонки получил при решении систем разностных уравнений, возникающих при аппроксимации краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

Приведем вывод расчетных формул метода прогонки. Будем искать решение системы (41) в виде

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j=0,\, 1,\, \ldots,\, N-1, \tag{43}$$

где α_{j+1}, β_{j+1} — неизвестные пока коэффициенты. Отсюда найдем

$$y_{j-1} = \alpha_j y_j + \beta_j = \alpha_j(\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j =$$
$$= \alpha_j \alpha_{j+1} y_{j+1} + (\alpha_j \beta_{j+1} + \beta_j), \quad j=1,\, 2,\, \ldots,\, N-1.$$

Подставляя полученные выражения для y_j, y_{j-1} в уравнение (41), приходим при $j=1, 2, \ldots, N-1$ к уравнению

$$[\alpha_{j+1}(a_j\alpha_j - c_j) + b_j]\, y_{j+1} + [\beta_{j+1}(a_j\alpha_j - c_j) + a_j\beta_j + f_j] = 0.$$

Последнее уравнение будет выполнено, если коэффициенты α_{j+1}, β_{j+1} выбрать такими, чтобы выражения в квадратных скобках обращались в нуль. А именно, достаточно положить

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j\beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j=1,\, 2,\, \ldots,\, N-1. \tag{44}$$

Соотношения (44) представляют собой нелинейные разностные уравнения первого порядка. Для их решения необходимо задать начальные значения α_1, β_1. Эти начальные значения находим из требования эквивалентности условия (43) при $j=0$, т. е. условия $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$, первому из уравнений (42). Таким образом, получаем

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \quad \beta_1 = \mu_1. \tag{45}$$

Нахождение коэффициентов α_{j+1}, β_{j+1} по формулам (44), (45) называется *прямой прогонкой*. После того как прогоночные коэффициенты α_{j+1}, β_{j+1}, $j=0, 1, \ldots, N-1$, найдены, решение системы (41), (42) находится по рекуррентной формуле (43), начиная с

$j=N-1$. Для начала счета по этой формуле требуется знать y_N, которое определяется из уравнений

$$y_N=\varkappa_2 y_{N-1}+\mu_2, \quad y_{N-1}=\alpha_N y_N+\beta_N$$

и равно $(\varkappa_2\beta_N+\mu_2)/(1-\varkappa_2\alpha_N)$. Нахождение y_j по формулам

$$y_j=\alpha_{j+1}y_{j+1}+\beta_{j+1}, \quad j=N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 0,$$

$$y_N=\frac{\varkappa_2\beta_N+\mu_2}{1-\varkappa_2\alpha_N} \tag{46}$$

называется *обратной прогонкой*. Алгоритм решения системы (41), (42), определяемый по формулам (44)—(46), называется *методом прогонки*. Применяются и другие варианты метода прогонки (см. [32]).

Метод прогонки можно применять, если знаменатели выражений (44), (46) не обращаются в нуль. Покажем, что *для возможности применения метода прогонки достаточно потребовать, чтобы коэффициенты системы* (41), (42) *удовлетворяли условиям*

$$a_j\neq 0, \quad b_j\neq 0, \quad |c_j|\geqslant|a_j|+|b_j|, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{47}$$

$$|\varkappa_1|\leqslant 1, \quad |\varkappa_2|<1. \tag{48}$$

Заметим, что числа a_j, b_j, c_j, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ могут быть комплексными.

Сначала докажем по индукции, что при условиях (47), (48) модули прогоночных коэффициентов α_j, $j=1,\ \ldots,\ N-1$, не превосходят единицы. Согласно (45), (48) имеем $|\alpha_1|=|\varkappa_1|\leqslant 1$. Предположим, что $|\alpha_j|\leqslant 1$ для некоторого j и докажем, что $|\alpha_{j+1}|\leqslant 1$. Из оценок

$$|c_j-\alpha_j a_j|\geqslant\big||c_j|-|\alpha_j|\,|a_j|\big|\geqslant\big||c_j|-|a_j|\big|$$

и условий (47) получаем

$$|c_j-\alpha_j a_j|\geqslant|b_j|>0,$$

т. е. знаменатели выражений (44) не обращаются в нуль. Более того,

$$|\alpha_{j+1}|=\frac{|b_j|}{|c_j-\alpha_j a_j|}\leqslant 1.$$

Следовательно, $|\alpha_j|\leqslant 1$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Далее, учитывая второе из условий (48) и только что доказанное неравенство $|\alpha_N|\leqslant 1$, имеем

$$|1-\varkappa_2\alpha_N|\geqslant 1-|\varkappa_2|\,|\alpha_N|\geqslant 1-|\varkappa_2|>0,$$

т. е. не обращается в нуль и знаменатель в выражении для y_N.

К аналогичному выводу можно прийти и в том случае, когда условия (47), (48) заменяются условиями

$$a_j\neq 0, \quad b_j\neq 0, \quad |c_j|>|a_j|+|b_j|, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{49}$$

$$|\varkappa_1|\leqslant 1, \quad |\varkappa_2|\leqslant 1. \tag{50}$$

В этом случае из предположения $|\alpha_j|\leqslant 1$ следует

$$|c_j-\alpha_j a_j|\geqslant\big||c_j|-|a_j|\big|>|b_j|, \quad |\alpha_{j+1}|<1,$$

т. е. все прогоночные коэффициенты, начиная со второго, по модулю строго меньше единицы. При этом $|1-\varkappa_2\alpha_N| \geqslant 1-|\varkappa_2||\alpha_N| \geqslant 1-|\alpha_N|>0$.

Таким образом при выполнении условий (47), (48) (так же как и условий (49), (50)) система (41)—(42) эквивалентна системе (44)—(46). Поэтому условия (47), (48) (или условия (49), (50)) гарантируют существование и единственность решения системы (41), (42) и возможность нахождения этого решения методом прогонки. Кроме того, доказанные неравенства $|\alpha_j| \leqslant 1$, $j=1, 2, \ldots, N$, обеспечивают устойчивость счета по рекуррентным формулам (46). Последнее означает, что погрешность, внесенная на каком-либо шаге вычислений, не будет возрастать при переходе к следующим шагам. Действительно, пусть в формуле (46) при $j=j_0+1$ вместо y_{j_0+1} вычислена величина $\tilde{y}_{j_0+1}=y_{j_0+1}+\delta_{j_0+1}$. Тогда на следующем шаге вычислений, т. е. при $j=j_0$, вместо $y_{j_0}=\alpha_{j_0+1}y_{j_0+1}+\beta_{j_0+1}$ получим величину $\tilde{y}_{j_0}=\alpha_{j_0+1}(y_{j_0+1}+\delta_{j_0+1})+\beta_{j_0+1}$ и погрешность окажется равной

$$\delta_{j_0}=\tilde{y}_{j_0}-y_{j_0}=\alpha_{j_0+1}\delta_{j_0+1}.$$

Отсюда получим, что $|\delta_{j_0}| \leqslant |\alpha_{j_0+1}||\delta_{j_0+1}| \leqslant |\delta_{j_0+1}|$, т. е. погрешность не возрастает.

Отметим, что для разностной краевой задачи (16), записанной в виде

$$y_{j-1}-2y_j+y_{j+1}=-h^2 f_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

имеем $a_j=b_j=1$, $c_j=2$, $\varkappa_1=\varkappa_2=0$. Поэтому выполнены условия устойчивости (47), (48) и решение задачи (16) можно отыскивать методом прогонки.