Теперь мы в состоянии сформулировать теорему, которая называется *принципом сжимающих отображений* и содержит условия сходимости метода простой итерации

$$x^{k+1}=S(x^k) \tag{7}$$

в конечномерном линейном нормированном пространстве H. Она является многомерным аналогом теоремы 1 из § 2.

Теорема 1. *Пусть оператор S определен на множестве*

$$\overline{U}_r(a)=\{x\in H:\ \|x-a\|\leqslant r\}$$

и является сжимающим оператором на этом множестве с коэффициентом сжатия q, причем

$$\|S(a)-a\|\leqslant(1-q)r,\qquad 0<q<1. \tag{8}$$

Тогда в $\overline{U}_r(a)$ оператор S имеет единственную неподвижную точку x_* и итерационный метод (7) сходится к x_* при любом $x^0\in\in\overline{U}_r(a)$. Для погрешности справедливы оценки

$$\|x^k-x_*\|\leqslant q^k\|x^0-x_*\|, \tag{9}$$

$$\|x^k-x_*\|\leqslant\frac{q^k}{1-q}\|S(x^0)-x^0\|. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1 можно найти в [42].

3. Примеры итерационных методов.

Пример 1. *Метод релаксации* представляет собой частный случай метода (3), когда $B_{k+1}=E$, $\tau_{k+1}=\tau$. Это стационарный итерационный метод, который можно записать в виде

$$x^{k+1}=S(x^k),$$

где

$$S(x)=x-\tau F(x).$$

Метод сходится, если $\|S'(x_*)\|<1$. В данном случае $S'(x)==E-\tau F'(x)$ и

$$F'(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_m}\\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_m}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Пример 2. *Метод Пикара.* Пусть $F(x)$ представляется в виде

$$F(x)=Ax+G(x),$$

где A — матрица $m\times m$. Тогда итерации можно определить следующим образом:

$$Ax^{k+1}+G(x^k)=0.$$

Итерационный метод можно переписать в виде

$$A(x^{k+1}-x^k)+F(x^k)=0,$$

т. е. в канонической форме (3) с $B_{k+1}=A$, $\tau_{k+1}=1$. Можно и здесь ввести итерационный параметр и рассматривать более общий метод

$$A\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau}+F(x^k)=0.$$

Пример 3. *Метод Ньютона* для системы уравнений (1) строится следующим образом.

Пусть приближение $x^k=(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)^T$ уже известно. Выпишем разложение функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ по формуле Тейлора в точке x^k,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)=f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)+(x_1-x_1^k)\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_1}+$$
$$+(x_2-x_2^k)\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_2}+\ldots+(x_m-x_m^k)\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_m}+O(|x-x^k|^2),$$

и отбросим величины второго порядка малости. Тогда система (1) заменится системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_j^k)\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j}+f_i(x^k)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \tag{12}$$

линейной относительно приращений $x_j-x_j^k$, $j=1, 2, \ldots, m$. Решение $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$ системы (12) примем за следующее приближение и обозначим через

$$x^{k+1}=(x_1^{k+1}, \ldots, x_m^{k+1})^T.$$

Таким образом, итерационный метод Ньютона для (1) определяется системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j^{k+1}-x_j^k)\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j}+f_i(x^k)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \tag{13}$$

из которой последовательно, начиная с заданного $x^0=(x_1^0, \ldots, x_m^0)^T$, находятся векторы x^k, $k=1, 2, \ldots$

Систему (13) можно записать в векторном виде

$$F'(x^k)(x^{k+1}-x^k)+F(x^k)=0,\ k=0, 1, \ldots,\ x^0 \text{ задан}, \tag{14}$$

где матрица $F'(x)$ определена согласно (11). Таким образом, метод Ньютона имеет канонический вид (3), где

$$B_{k+1}=F'(x^k), \quad \tau_{k+1}=1.$$

Для реализации метода Ньютона необходимо существование матриц $(F'(x^k))^{-1}$, обратных $F'(x^k)$. По поводу сходимости метода Ньютона для систем уравнений можно сказать то же, что и в случае одного уравнения, а именно, метод имеет квадратичную сходимость, если начальное приближение выбрано достаточно хорошо.

Приведем без доказательства одну из теорем о сходимости метода Ньютона.

Пусть E^m — множество m-мерных вещественных векторов с нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} x_j^2\right)^{1/2}$, $\|A\|$ — норма матрицы A, подчиненная данной норме вектора. Обозначим

$$U_r(x^0) = \{x \in E^m\colon \ \|x - x^0\| < r\}$$

и предположим, что в шаре $U_r(x^0)$ функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы.

Теорема 2. *Предположим, что в $U_r(x^0)$ матрица $F'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L*, т. е.

$$\|F'(x^1) - F'(x^2)\| \leqslant L\|x^1 - x^2\|$$

для любых x^1, $x^2 \in U_r(x^0)$. Пусть в $U_r(x^0)$ матрица $(F'(x))^{-1}$ существует, причем элементы ее непрерывны и

$$\|(F'(x))^{-1}\| \leqslant M.$$

Если начальное приближение x^0 таково, что $\|F(x_0)\| \leqslant \eta$ и

$$q = \frac{M^2 L \eta}{2} < 1,$$

причем

$$M\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1} < r,$$

то система уравнений (2) *имеет решение $x_* \in \overline{U}_r(x_0)$, к которому сходится метод Ньютона* (14). *Оценка погрешности дается неравенством*

$$\|x^k - x_*\| \leqslant M\eta \frac{q^{2^k - 1}}{1 - q^{2^k}}.$$

Доказательство теоремы 2 можно найти в [42].

Пример 4. *Модифицированный метод Ньютона* имеет вид

$$F'(x^0)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0 \qquad (15)$$

и обладает линейной сходимостью. Упрощение в численной реализации по сравнению с обычным методом Ньютона состоит в том, что матрицу $F'(x)$ надо обращать не на каждой итерации, а лишь один раз. Возможно циклическое применение модифицированного метода Ньютона, когда $F'(x)$ обращается через определенное число итераций.

Пример 5. *Метод Ньютона с параметром* имеет вид

$$F'(x^k)\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + F(x^k) = 0. \qquad (16)$$

Рассмотренные до сих пор методы являлись линейными относительно новой итерации x^{k+1}. Возможны и нелинейные методы, когда для вычисления x^{k+1} приходится решать нелинейные системы уравнений. Приведем примеры таких методов.

Пример 6. *Нелинейный метод Якоби* для системы (1) имеет вид

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \ldots, x_m^k) = 0, \qquad (17)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь для отыскания x^{k+1} необходимо решить m независимых скалярных уравнений. Для решения скалярного уравнения можно применить какой-либо из итерационных методов, рассмотренных в § 1, причем не обязательно применять один и тот же метод для всех уравнений.

Пример 7. *Нелинейный метод Зейделя* состоит в последовательном решении уравнений

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \ldots, x_m^k) = 0 \qquad (18)$$

относительно переменной x_i^{k+1}, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Большое распространение получили гибридные методы, когда внешние итерации осуществляются одним методом, а внутренние — другим. При этом число внутренних итераций может быть фиксированным и не очень большим, так что внутренние итерации не доводятся до сходимости. В результате получается некоторый новый метод, сочетающий свойства исходных методов. Приведем примеры таких методов.

Пример 8. *Внешние итерации — по Зейделю и внутренние — по Ньютону.* Здесь в качестве основной (внешней) итерации выбирается нелинейный метод Зейделя (18), а для нахождения x_i^{k+1} используется метод Ньютона. Обозначим $y_i = x_i^{k+1}$. Тогда итерации определяются следующим образом:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, y_i^s, x_{i+1}^k, \ldots, x_m^k)(y_i^{s+1} - y_i^s) +$$
$$+ f(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, y_i^s, x_{i+1}^k, \ldots, x_m^k) = 0,$$
$$s = 0, 1, \ldots, l, \quad y_i^0 = x_i^k, \quad y_i^{l+1} = x_i^{k+1}, \qquad (19)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь индексом s обозначен номер внутренней итерации.

Иногда в (19) делают всего одну внутреннюю итерацию, полагая $l = 0$, $y_i^0 = x_i^k$, $y_i^1 = x_i^{k+1}$. Тогда приходят к следующему итерационному методу:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \ldots, x_m^k)(x_i^{k+1} - x_i^k) +$$
$$+ f_i(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \ldots, x_m^k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (20)$$

В частности, при $m=2$ метод (20) принимает вид

$$\frac{\partial f_1(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_1}(x_1^{k+1}-x_1^k)+f_1(x_1^k, x_2^k)=0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{k+1}, x_2^k)(x_2^{k+1}-x_2^k)+f_2(x_1^{k+1}, x_2^k)=0. \tag{21}$$

Пример 9. *Внешние итерации — по Ньютону и внутренние — по Зейделю.* Запишем метод Ньютона для системы (2) в виде

$$F'(x^k)(x^{k+1}-x^k)+F(x^k)=0, \tag{22}$$

где $F'(x^k)=(a_{ij})$, $a_{ij}=\dfrac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j}$, $i, j=1, 2, \ldots, m$. Для решения системы линейных уравнений (22) воспользуемся методом Зейделя. Напомним (см. § 1 гл. 2), что для линейной системы

$$Aw+F=0 \tag{23}$$

метод Зейделя строится следующим образом. Матрица A представляется в виде суммы $A=A_-+D+A_+$, где матрицы A_-, A_+, D соответственно нижняя треугольная, верхняя треугольная и диагональная. Итерации метода Зейделя строятся по правилу

$$(A_-+D)w^{s+1}+A_+w^s+F=0, \quad s=0, 1, \ldots, l, \tag{24}$$

и система (24) решается путем обращения нижней треугольной матрицы A_-+D.

В случае системы (22) надо положить $A=F'(x^k)$, вычислить последовательно векторы w^s согласно (24), начиная с $w^0=0$, и положить $w^{l+1}=x^{k+1}-x^k$, так что $x^{k+1}=x^k+w^{l+1}$.

Заметим, что итерации по Зейделю можно осуществлять и относительно вектора x^{k+1}.

Пусть в (24) совершается только одна итерация, т. е. $l=0$. Тогда, учитывая, что $w^0=0$, $w^1=x^{k+1}-x^k$, получим метод

$$(A_-+D)(x^{k+1}-x^k)+F(x^k)=0, \tag{25}$$

где A_-+D — «нижняя треугольная» часть матрицы Якоби (11), вычисленной при $x=x^k$.

В частности, при $m=2$ метод (25) принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^k, x_2^k)(x_1^{k+1}-x_1^k)+f_1(x_1^k, x_2^k)=0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^k, x_2^k)(x_1^{k+1}-x_1^k)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^k, x_2^k)(x_2^{k+1}-x_2^k)+f_2(x_1^k, x_2^k)=0. \tag{26}$$

Сопоставление (21) и (26) показывает, что методы, рассмотренные в двух последних примерах, не совпадают.