ладающие более высокой сходимостью. Рассмотрим, например, метод релаксации

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}+f(x_k)=0 \tag{16}$$

(см. (6) из § 1), который имеет линейную сходимость, если

$$M_1>f'(x)>0, \quad 0<\tau<2/M_1.$$

Предположим, что при некотором k получены значения x_k, x_{k+1}, x_{k+2}. Вычислим согласно (15) величину

$$y_{k+1}=x_{k+2}-\frac{(x_{k+2}-x_{k+1})^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k} \tag{17}$$

и исключим из (17) с помощью (16) величины x_{k+1}, x_{k+2}. Имеем

$$x_{k+1}=x_k-\tau f(x_k),$$
$$x_{k+2}=x_{k+1}-\tau f(x_{k+1})=x_k-\tau f(x_k)-\tau f(x_k-\tau f(x_k)),$$

следовательно,

$$y_{k+1}=x_k-\tau\frac{f^2(x_k)}{f(x_k)-f(x_k-\tau f(x_k))}.$$

Проведенные построения позволяют предположить, что одношаговый итерационный метод

$$y_{k+1}=y_k-\tau\frac{f^2(y_k)}{f(y_k)-f(y_k-\tau f(y_k))} \tag{18}$$

обладает более быстрой сходимостью, чем исходный метод релаксации (16). Действительно, как показано, например, в [25], метод (18) при $\tau=1$ (*метод Стеффенсена*) имеет квадратичную сходимость.

§ 3. Сходимость метода Ньютона

1. Простой вещественный корень. Предположим, что уравнение

$$f(x)=0 \tag{1}$$

имеет простой вещественный корень $x=x_*$, так что $f(x_*)=0$, $f'(x_*)\neq 0$. Будем предполагать, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня x_*. Исследуем сходимость метода Ньютона

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0, 1, \ldots \tag{2}$$

Заметим прежде всего, что (2) можно рассматривать как частный случай метода простой итерации

$$x_{k+1}=s(x_k), \quad k=0, 1, \ldots, \tag{3}$$

для которого

$$s(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{4}$$

В § 2 было показано, что для сходимости метода (3) достаточно потребовать, чтобы в некоторой окрестности искомого корня выполнялось неравенство

$$|s'(x)| \leqslant q < 1. \tag{5}$$

Для функции (4) имеем

$$s'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2},$$

и если x_* — корень $f(x)$, то $s'(x_*) = 0$. Поэтому найдется окрестность корня, в которой выполнено неравенство (5). Тем самым при надлежащем выборе начального приближения метод Ньютона сходится. Однако следствием малости $s'(x)$ в окрестности x_* является не просто сходимость, а сходимость существенно более быстрая, чем в общем случае метода простой итерации. В следующей теореме доказано, что метод Ньютона имеет квадратичную сходимость, т. е. что он сходится и погрешность на $(k+1)$-й итерации пропорциональна квадрату погрешности на k-й итерации.

Теорема 1. *Пусть x_* — простой вещественный корень уравнения* (1) *и пусть $f'(x) \neq 0$ в окрестности*

$$U_r(x_*) = \{x\colon\ |x - x_*| < r\}.$$

Предположим, что $f''(x)$ непрерывна в $U_r(x_*)$ и

$$0 < m_1 = \inf_{x \in U_r(x_*)} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in U_r(x_*)} |f''(x)|, \tag{6}$$

причем

$$\frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1. \tag{7}$$

Тогда если $x_0 \in U_r(x_*)$, то метод Ньютона (2) *сходится, причем для погрешности справедлива оценка*

$$|x_k - x_*| \leqslant q^{2^k - 1} |x_0 - x_*|, \tag{8}$$

где

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1. \tag{9}$$

Доказательство. Из уравнения (2) получим

$$x_{k+1} - x_* = x_k - x_* - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

или

$$x_{k+1} - x_* = \frac{F(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{10}$$

где

$$F(x) = (x - x_*) f'(x) - f(x). \tag{11}$$

Заметим, что $F(x_*) = 0$ и

$$F'(x) = (x - x_*) f''(x). \tag{12}$$

Далее, воспользовавшись тождеством

$$F(x_k) = F(x_*) + \int\limits_{x_*}^{x_k} F'(t)\,dt$$

и выражением (12) для $F'(t)$, получим

$$F(x_k) = \int\limits_{x_*}^{x_k} (t - x_*) f''(t)\,dt.$$

Так как функция $t - x_*$ не меняет знак на отрезке интегрирования, можно воспользоваться формулой среднего значения и записать, что

$$F(x_k) = \int\limits_{x_*}^{x_k} (t - x_*) f''(t)\,dt = f''(\xi_k) \int\limits_{x_*}^{x_k} (t - x_*)\,dt = \frac{(x_k - x_*)^2}{2} f''(\xi_k),$$

где $\xi_k = \theta_k x_k + (1 - \theta_k) x_*$, $|\theta_k| < 1$. Обращаясь к (10), получим

$$x_{k+1} - x_* = \frac{f''(\xi_k)(x_k - x_*)^2}{2f'(x_k)}, \tag{13}$$

т. е. погрешность на $(k+1)$-й итерации пропорциональна квадрату погрешности на k-й итерации.

Докажем оценку (8) по индукции. При $k=0$ из (13) получим

$$x_1 - x_* = \frac{f'(\xi_0)(x_0 - x_*)^2}{2f'(x_0)}. \tag{14}$$

По условию теоремы $x_0 \in U_r(x_*)$, и поэтому согласно первому из условий (6) имеем $|f'(x_0)| \geqslant m_1 > 0$. Кроме того, $\xi_0 = \theta_0 x_0 + (1 - \theta_0) x_*$,

$$\xi_0 - x_* = \theta_0 (x_0 - x_*),\quad |\xi_0 - x_*| \leqslant |\theta_0|\,|x_0 - x_*| < r,$$

т. е. $\xi_0 \in U_r(x_*)$. Но тогда согласно (6) $|f''(\xi_0)| \leqslant M_2$. Таким образом, приходим к оценке

$$|x_1 - x_*| \leqslant \frac{M_2 (x_0 - x_*)^2}{2m_1} = q\,|x_0 - x_*|,$$

совпадающей с оценкой (8) при $k=1$.

Предположим, что оценка (8) выполняется при $k = l \geqslant 1$, и докажем, что она выполняется и при $k = l + 1$. При $k = l$ выражение (13) принимает вид

$$x_{l+1} - x_* = \frac{f''(\xi_l)(x_l - x_*)^2}{2f'(x_l)}. \tag{15}$$

Покажем, что x_l, $\xi_l \in U_r(x_*)$. Действительно, из (8) при $k = l$ имеем

$$|x_l - x_*| \leqslant q^{2^l - 1} |x_0 - x_*| < |x_0 - x_*| < r,$$

т. е. $x_l \in U_r(x_*)$. Кроме того,

$$\xi_l - x_* = \theta_l (x_l - x_*),\qquad |\theta_l| < 1,$$

и, следовательно, $\xi_l \in U_r(x_*)$.

Теперь можно воспользоваться условиями (6) и оценить

$$|f'(x_l)|\geqslant m_1>0, \quad |f''(\xi_l)|\leqslant M_2.$$

Отсюда и из (15) получим

$$|x_{l+1}-x_*|\leqslant \frac{M_2\,(x_l-x_*)^2}{2m_1}.$$

Из этого неравенства и из неравенства (8), имеющего следующий вид при $k=l$:

$$|x_l-x_*|^2\leqslant q^{2^{l+1}-2}\,|x_0-x_*|^2,$$

получим оценку

$$|x_{l+1}-x_*|\leqslant\left(\frac{M_2\,|x_0-x_*|}{2m_1}\right)q^{2^{l+1}-2}\,|x_0-x_*|=q^{2^{l+1}-1}\,|x_0-x_*|,$$

т. е. оценку (8) при $k=l+1$. Из оценки (8) следует сходимость метода (2), так как для $q\in(0, 1)$ правая часть неравенства (8) стремится к нулю при $k\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Замечания. 1. Условие (7) означает, что начальное приближение надо брать достаточно близко к искомому корню.

2. Выполнение равенства (13) означает, что метод имеет квадратичную сходимость.

3. Поскольку x_* заранее неизвестен, иногда трудно проверить условие $x_0\in U_r(x_*)$. Но если известно, что $|f'(x)|\geqslant m_1>0$ в некоторой окрестности корня, то для оценки близости начального приближения к корню можно воспользоваться неравенством

$$|x_0-x_*|\leqslant|f(x_0)|/m_1. \qquad (16)$$

Действительно,

$$f(x_0)=f(x_0)-f(x_*)=(x_0-x_*)f'(\xi),$$

откуда и следует (16).

2. **Кратные корни.** Говорят, что x_* является корнем кратности p, если

$$f(x_*)=f'(x_*)=\ldots=f^{(p-1)}(x_*)=0, \qquad f^{(p)}(x_*)\neq 0$$

Будем предполагать сейчас, что $f^{(p+1)}(x)$ непрерывна в окрестности корня x_* кратности p. В случае корня кратности p квадратичную сходимость имеет *метод Ньютона с параметром*

$$f'(x_k)\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}+f(x_k)=0, \qquad (17)$$

где $\tau=p$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть x_* — корень кратности p уравнения* (1) *и в окрестности*

$$U_r(x_*)=\{x\colon\ |x-x_*|<r\}$$

производная $f^{(p)}(x)$ отлична от нуля.

Пусть $f^{(p+1)}(x)$ непрерывна в $U_r(x_*)$ и

$$0<m_p=\inf_{x\in U_r(x_*)}|f^{(p)}(x)|, \quad M_{p+1}=\sup_{x\in U_r(x_*)}|f^{(p+1)}(x)|,$$