Из рассмотрения графика функции $q(\tau)$ видно, что точка минимума определяется условием

$$|1-\tau M_1| = |1-\tau m_1|$$

и равна

$$\tau = \tau_0 = 2/(M_1+m_1).$$

При этом значении τ имеем

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{m_1}{M_1},$$

так что для погрешности справедлива оценка

$$|z_n| \leqslant \rho_0^n |z_0|, \quad n = 0, 1, \ldots$$

3. **Метод Ньютона.** Пусть начальное приближение x_0 известно. Заменим $f(x)$ отрезком ряда Тейлора

$$f(x) \approx H_1(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)$$

и за следующее приближение x_1 возьмем корень уравнения $H_1(x) = 0$, т. е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Вообще, если итерация x_k известна, то следующее приближение x_{k+1} в *методе Ньютона* определяется по правилу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Метод Ньютона называют также *методом касательных*, так как новое приближение x_{k+1} является абсциссой точки пересечения касательной, проведенной в точке $(x_k, f(x_k))$ к графику функции $f(x)$, с осью Ox.

Исследование сходимости метода Ньютона будет проведено в § 3. Здесь отметим без доказательства лишь две особенности этого метода. Во-первых, метод имеет *квадратичную сходимость*, т. е. в отличие от линейных задач погрешность на следующей итерации пропорциональна квадрату погрешности на предыдущей итерации: $x_{k+1}-x_* = O((x_k-x_*)^2)$.

И, во-вторых, такая быстрая сходимость метода Ньютона гарантируется лишь при очень хороших, т. е. близких к точному решению, начальных приближениях. Если начальное приближение выбрано неудачно, то метод может сходиться медленно, либо не сойдется вообще.

Модифицированный метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

применяют в том случае, когда хотят избежать многократного вычисления производной $f'(x)$. Метод (10) предъявляет меньше требований к выбору начального приближения x_0, однако обладает лишь *линейной сходимостью*, т. е. $x_{k+1}-x_*=O(x_k-x_*)$.

Метод (10) гарантирует отсутствие деления на нуль, если $f'(x_0)\neq 0$.

4. Метод секущих. Этот метод получается из метода Ньютона (9) заменой $f'(x_k)$ разделенной разностью $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$, вычисленной по известным значениям x_k и x_{k-1}. В результате получаем итерационный метод

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k),\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\tag{11}$$

который в отличие от ранее рассмотренных методов является *двухшаговым*, т. е. новое приближение x_{k+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_k и x_{k-1}. В методе (11) необходимо задавать два начальных приближения x_0 и x_1.

Геометрическая интерпретация метода секущих состоит в следующем. Через точки $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ проводится прямая, абсцисса точки пересечения этой прямой с осью Ox и является новым приближением x_{k+1}. Иначе говоря, на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция $f(x)$ интерполируется многочленом первой степени и за очередное приближение x_{k+1} принимается корень этого многочлена.

5. Интерполяционные методы. Идея *интерполяционных методов* состоит в том, что нахождение корней уравнения (1) заменяется нахождением корней интерполяционного многочлена, построенного для $f(x)$. Интерполяционный метод первого порядка приводит к методу секущих. Интерполяционный метод второго порядка называется *методом парабол*. Метод Ньютона (9) можно получить, заменяя $f(x)$ интерполяционным многочленом Эрмита первой степени.

Получим формулы метода парабол. Пусть приближения x_{k-2}, x_{k-1}, x_k известны. Построим интерполяционный многочлен Ньютона (см. (11) из § 1 гл. 3)

$$P_2(x)=f(x_k)+(x-x_k)f(x_k,\ x_{k-1})+(x-x_k)(x-x_{k-1})f(x_k,\ x_{k-1},\ x_{k-2})$$

и обозначим $z=x-x_k$. Тогда уравнение $P_2(x)=0$ примет вид

$$az^2+bz+c=0,\tag{12}$$

где $a=f(x_k,\ x_{k-1},\ x_{k-2})$, $b=f(x_k,\ x_{k-1})+(x_k-x_{k-1})f(x_k,\ x_{k-1},\ x_{k-2})$, $c=f(x_k)$.

Решая уравнение (12), получим два, может быть комплексных, корня, $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, по которым вычислим $x^{(1)}=x_k+z^{(1)}$, $x^{(2)}=x_k+z^{(2)}$. В качестве следующего приближения в методе парабол выбирается то из значений $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, которое ближе к x_k, т. е. отвечающее минимальному по модулю корню уравнения (12). Метод парабол удобен тем, что позволяет получить комплексные корни уравнения (7), пользуясь вещественными начальными приближениями x_0, x_1, x_2.