надо потребовать, чтобы $h \geqslant h_0$, где $h_0 = O(\delta^{1/3})$, либо проводить вычисление $u(x_i)$ с погрешностью $\delta = O(h^6)$. Например, если $\delta \approx 10^{-12}$, то шаг h надо брать примерно равным 0,01. При этом погрешность аппроксимации и погрешность округления будут примерно равными 10^{-4}.

Вычисление производной $u'(x)$ по заданной функции $u(x)$ также является некорректной операцией в том смысле, что для ограниченной функции $u(x)$ производная $u'(x)$ может быть сколь угодно большой. Например, для $u(x) = \sin \omega x$ имеем $\max\limits_{x \in [a,b]} |u(x)| \leqslant 1$ и $\max\limits_{x \in [a,b]} |u'(x)| = |\omega| \to \infty$ при $\omega \to \infty$.

Строгие определения корректности математической задачи и способы решения некорректных задач изложены в книге [38].

2. Применение интерполирования. Многие формулы численного дифференцирования можно получить как следствие интерполяционных формул. Для этого достаточно заменить функцию $u(x)$ ее интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и вычислить производные многочлена $L_n(x)$, используя его явное представление. В отличие от п. 1 рассмотрим неравномерную сетку

$$\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b\}$$

и обозначим через $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, шаги этой сетки. В качестве примера получим формулы численного дифференцирования, основанные на использовании многочлена Лагранжа $L_{2,i}(x)$, построенного для функции $u(x)$ по трем точкам x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Многочлен $L_{2,i}(x)$ имеет вид

$$L_{2,i}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{h_i(h_i + h_{i+1})} u_{i-1} - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h_i h_{i+1}} u_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} u_{i+1}. \tag{7}$$

Отсюда получим

$$L'_{2,i}(x) = \frac{(2x - x_i - x_{i+1})}{h_i(h_i + h_{i+1})} u_{i-1} - \frac{(2x - x_{i-1} - x_{i+1})}{h_i h_{i+1}} u_i + \frac{(2x - x_{i-1} - x_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} u_{i+1}.$$

Это выражение можно принять за приближенное значение $u'(x)$ в любой точке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Его удобнее записать в виде

$$L'_{2,i}(x) = \frac{1}{\hbar_i} \left[(x - x_{i-1/2}) \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} + (x_{i+1/2} - x) \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right], \tag{8}$$

где $\hbar_i = 0{,}5(h_i + h_{i+1})$, $x_{i-1/2} = x_i - 0{,}5h_i$. В частности, при $x = x_i$ получим

$$L'_{2,i}(x_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{h_i}{\hbar_i} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{\hbar_i} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right), \tag{9}$$

и если сетка равномерна, $h_{i+1} = h_i = h$, то приходим к центральной разностной производной, $L'_{2,i}(x_i) = u_{\overset{\circ}{x},i}$.

При использовании интерполяционного многочлена первой степени точно таким же образом можно получить односторонние разностные производные $u_{\bar{x},i}$ и $u_{x,i}$.

Далее, вычисляя вторую производную многочлена $L_{2,i}(x)$, получим приближенное выражение для $u''(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$u''(x) \approx L''_{2,i}(x) = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right). \qquad (10)$$

На равномерной сетке это выражение совпадает со второй разностной производной $u_{\bar{x}x,i}$. Ясно, что для приближенного вычисления дальнейших производных уже недостаточно многочлена $L_{2,i}(x)$, надо привлекать многочлены более высокого порядка и тем самым увеличивать число узлов, участвующих в аппроксимации.

Порядок погрешности аппроксимации зависит как от порядка интерполяционного многочлена, так и от расположения узлов интерполирования. Получим выражение для погрешности аппроксимации, возникающей при замене $u'(x)$ выражением $L'_{2,i}(x)$. Будем считать, что $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и что величины h_i, h_{i+1} имеют один и тот же порядок малости при измельчении сетки. По формуле Тейлора в предположении ограниченности $u^{\mathrm{IV}}(x)$ получим

$$u_{i+k} = u(x) + (x_{i+k} - x)\,u'(x) + \frac{(x_{i+k} - x)^2}{2} u''(x) + \frac{(x_{i+k} - x)^3}{6} u'''(x) + O(h^4),$$

где $k = 0, \pm 1$, $h = \max\{h_i, h_{i+1}\}$. Отсюда приходим к следующим разложениям разностных отношений:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = u'(x) - (x - x_{i-1/2})\,u''(x) + \left(\frac{(x - x_{i-1/2})^2}{2} + \frac{h_i^2}{24}\right) u'''(x) + O(h^3), \qquad (11)$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} = u'(x) + (x_{i+1/2} - x)\,u''(x) + \left(\frac{(x_{i+1/2} - x)^2}{2} + \frac{h_{i+1}^2}{24}\right) u'''(x) + O(h^3). \qquad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в выражение для разностной производной (8) и приводя подобные члены, получим

$$L'_{2,i}(x) = u'(x) - \left[\frac{(x - x_i)^2}{2} - \frac{(h_{i+1} - h_i)(x - x_i)}{3} - \frac{h_i h_{i+1}}{6}\right] u'''(x) + O(h^3),$$
$$x \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Отсюда видно, что разностное выражение (8) аппроксимирует $u'(x)$ со вторым порядком. Несколько хуже обстоит дело с выражением (10), аппроксимирующим вторую производную. Из (4) видно, что на равномерной сетке в точке $x=x_i$ имеет место аппроксимация $O(h^2)$. Покажем, что на неравномерной сетке ($h_i \neq h_{i+1}$) погрешность аппроксимации будет иметь только первый порядок. Подставляя разложения (11), (12) в выражение (10) для $L''_{2,i}(x)$, получим

$$L''_{2,i}(x) = u''(x) + \left(x_i - x + \frac{h_{i+1} - h_i}{3}\right) u'''(x) + O(h^2).$$

Здесь даже на равномерной сетке второй порядок аппроксимации имеет место лишь в точке $x=x_i$, а относительно других точек (например, точек $x=x_{i-1}$ и $x=x_{i+1}$) выполняется аппроксимация только первого порядка.

ГЛАВА 5

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Примеры итерационных методов решения нелинейных уравнений

1. Введение. Пусть задана функция $f(x)$ действительного переменного. Требуется найти корни уравнения

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

или, что то же самое, нули функции $f(x)$.

Уже на примере алгебраического многочлена известно, что нули $f(x)$ могут быть как действительными, так и комплексными. Поэтому более точная постановка задачи состоит в нахождении корней уравнения (1), расположенных в заданной области комплексной плоскости. Можно рассматривать также задачу нахождения действительных корней, расположенных на заданном отрезке. Иногда, пренебрегая точностью формулировок, будем говорить, что требуется решить уравнение (1).

Задача нахождения корней уравнения (1) обычно решается в два этапа. На первом этапе изучается расположение корней (в общем случае на комплексной плоскости) и проводится их разделение, т. е. выделяются области в комплексной плоскости, содержащие только один корень. Кроме того, изучается вопрос о кратности корней. Тем самым находятся некоторые начальные приближения для корней уравнения (1). На втором этапе, используя заданное начальное приближение, строится итерационный процесс, позволяющий уточнить значение отыскиваемого корня.

Не существует каких-то общих регулярных приемов решения задачи о расположении корней произвольной функции $f(x)$. Наиболее полно изучен вопрос о расположении корней алгебраических многочленов

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m. \tag{2}$$

Например известно, что если для многочлена (2) с действительными коэффициентами выполнены неравенства

$$f(c) > 0,\ f'(c) > 0,\ \ldots,\ f^{(m)}(c) > 0,$$