где C — произвольная квадратная матрица и d — произвольный столбец, то, действуя по схеме без обратного хода, мы получим на месте столбца d столбец $CA^{-1}b+d$.

Если же рассмотреть матрицу

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline -C & 0 \end{array}\right), \tag{41}$$

где B — произвольная матрица и 0 — матрица нулей, то нашим процессом мы придем к матрице $CA^{-1}B$. В частности, если взять матрицу

$$\left(\begin{array}{c:c} A & I \\ \hdashline -I & 0 \end{array}\right), \tag{42}$$

то мы придем к матрице A^{-1}.

§ 3. Метод квадратного корня

В том случае, когда матрица A симметрическая, в приведенных ранее схемах можно сделать ряд упрощений. Мы не будем здесь останавливаться на этих довольно простых вопросах, а изложим вместо этого очень удобный для симметрических матриц *метод квадратного корня.*

Пусть данная нам система записана в виде

$$Ax=b, \tag{1}$$

где A — квадратная симметрическая матрица, b — вектор-столбец из правых частей системы и x — вектор-столбец неизвестных. Решение системы (1) будем осуществлять в два этапа. На первом этапе представим матрицу A в виде

$$A=LL', \tag{2}$$

где L — нижняя треугольная матрица и L' — транспонированная по отношению к L матрица. Такое представление всегда возможно. Чтобы не осложнять записей, ограничимся рассмотрением систем четвертого порядка. Будем разыскивать такие α_{ij}, что

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Произведя умножение матриц в правой части и приравнивая затем соответствующие элементы правой и левой частей, получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{11}^2 = a_{11}, \quad \alpha_{11}\alpha_{21} = a_{12}, \quad \alpha_{11}\alpha_{31} = a_{13}, \quad \alpha_{11}\alpha_{41} = a_{14},\\
&\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = a_{22}, \quad \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} = a_{23}, \quad \alpha_{21}\alpha_{41} + \alpha_{22}\alpha_{42} = a_{24},\\
&\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = a_{33}, \quad \alpha_{31}\alpha_{41} + \alpha_{32}\alpha_{42} + \alpha_{33}\alpha_{43} = a_{34},\\
&\qquad \alpha_{41}^2 + \alpha_{42}^2 + \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = a_{44}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad \alpha_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}, \quad \alpha_{31} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}, \quad \alpha_{41} = \frac{a_{14}}{\sqrt{a_{11}}},\\
&\alpha_{22} = \sqrt{a_{22} - \alpha_{21}^2}, \quad \alpha_{32} = \frac{a_{23} - \alpha_{21}\alpha_{31}}{\alpha_{22}}, \quad \alpha_{42} = \frac{a_{24} - \alpha_{21}\alpha_{41}}{\alpha_{22}},\\
&\alpha_{33} = \sqrt{a_{33} - \alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2}, \quad \alpha_{43} = \frac{a_{34} - \alpha_{31}\alpha_{41} - \alpha_{32}\alpha_{42}}{\alpha_{33}},\\
&\qquad \alpha_{44} = \sqrt{a_{44} - \alpha_{41}^2 - \alpha_{42}^2 - \alpha_{43}^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Нетрудно сообразить, как будут выражаться α_{ij} через a_{ij} в общем случае системы n-го порядка.

Нужно заметить, что при действительных a_{ij} могут получиться чисто мнимые значения α_{ij}. Но так как вычисления с чисто мнимыми величинами нисколько не труднее, чем с действительными, это не вызовет дополнительных трудностей. Если, кроме того, матрица A положительно определенная, то мнимых величин вообще не будет.

После того как матрица L найдена, переходят ко второму этапу. При этом сначала решают систему

$$Ly = b, \tag{6}$$

а затем находят x из системы

$$L'x = y. \tag{7}$$

Так как обе системы с треугольными матрицами, то они решаются без труда.

Схема квадратного корня очень удобна, требует небольшого количества операций умножения и деления и очень небольших записей. Всего при решении системы n уравнений придется n раз произвести извлечение корня и проделать

$$\frac{n^3 + 9n^2 + 2n}{6} \tag{8}$$

операций умножения и деления

Проиллюстрируем этот метод на примере системы шести уравнений с симметрической матрицей. Часть коэффициентов мы не выписывали, пользуясь симметрией.

6,1818	0,1818 7,1818 a_{ik}	0,3141 0,2141 8,2435	0,1415 0,1815 0,1214 9,3141	0,1516 0,1526 0,2516 0,3145 5,3116	0,2141 0,3114 0,2618 0,6843 0,8998 4,1313	7,1818 8,2435 9,3141 5,3116 4,1313 3,1816
2,486323	0,073120 2,678891 α_{ik}	0,126331 0,076473 2,867349	0,056911 0,066199 0,038066 3,050415	0,060974 0,055300 0,083585 0,099720 2,299543	0,086111 0,113892 0,084472 0,219198 0,373697 1,978909	2,888522 2,998364 3,041100 1,584361 1,468632 0,726854
1,040932	1,050668	1,026605	0,474071	0,578973	0,367300	y_i / x_i

Подставляя найденные значения в левые части системы, получим соответственно

7,181794; 8,243489; 9,314104; 5,311593; 4,131297; 3,181600. (9)

§ 4. Метод ортогонализации

Пусть дана система

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{1}$$

порядка n. Здесь мы, чтобы избежать в дальнейшем путаницы, над векторами поставили черточки. Решение системы будем разыскивать в виде

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{x}^{(k)}, \tag{2}$$

где $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$ — n векторов, удовлетворяющих условиям

$$(A\bar{x}^{(k)}, \bar{x}^{(l)}) = 0, \quad \text{при } k > l \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Здесь рассматривается обычное скалярное произведение векторов в n-мерном векторном пространстве, т. е. если $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Пусть такие векторы найдены. Как это делается, будет показано ниже. Рассмотрим скалярное произведение обеих частей системы (1) с $\bar{x}^{(l)}$:

$$(A\bar{x}, \bar{x}^{(l)}) = (\bar{b}, \bar{x}^{(l)}) \quad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$