также получающуюся в процессе наших вычислений, то имеет место равенство

$$A = BC. \tag{24}$$

Это равенство просто получается, если использовать формулы (19) и (20). Так как B^{-1} снова треугольная матрица, то прямой ход при решении системы уравнений по компактной схеме Гаусса эквивалентен умножению системы на треугольную матрицу.

3. Обращение матрицы. Равенство (24) можно использовать для *обращения матриц*. Эта задача важна как сама по себе, так и в тех случаях, когда приходится решать много систем с одной и той же матрицей, но с различными правыми частями.

Перепишем (24) следующим образом:

$$A^{-1}B = C^{-1}, \quad CA^{-1} = B^{-1}. \tag{25}$$

Матрица C^{-1} будет верхней треугольной, и ее диагональные элементы равны единице. Поэтому если обозначить элементы матрицы A^{-1} через d_{ij}, то первое из равенств (25) даст $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений для определения d_{ij}:

$$\left.\begin{array}{rcccccc}
i = & 1 & 2 & 3 & \ldots & n, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}b_{j1}^{(1)} = & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0, \\
\sum\limits_{j=2}^{n} d_{ij}b_{j2}^{(3)} = & & 1 & 0 & \ldots & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
d_{nn}b_{nn}^{(2n-1)} = & & & & & 1.
\end{array}\right\} \tag{26}$$

Так как матрица B^{-1} нижняя треугольная, то второе из равенств (25) даст еще $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений для отыскания d_{ij}:

$$\left.\begin{array}{rccccc}
j = & 2 & 3 & \ldots & n, \\
d_{1j} + \sum\limits_{i=2}^{n} d_{ij}c_{1i}^{(2)} = & 0 & 0 & \ldots & 0, \\
d_{2j} + \sum\limits_{i=3}^{n} d_{ij}c_{2i}^{(4)} = & & 0 & \ldots & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
d_{n-1,\,n} + d_{nn}c_{n-1,\,n}^{(2n-2)} = & & & & 0.
\end{array}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, мы получили n^2 уравнений для определения неизвестных элементов d_{ij} обратной матрицы A^{-1}. Решение системы (26) — (27) не представляет труда. Полагаем в каждом из уравнений (26) $i=n$ и находим последовательно $d_{n,n}$, $d_{n,n-1}$, ..., $d_{n,1}$. Затем из уравнений (27) при $j=n$ находим $d_{n-1,n}$, $d_{n-2,n}$, ..., $d_{1,n}$. Потом снова возвращаемся к уравнениям (26) и, полагая в них $i=n-1$, находим $d_{n-1,n-1}$, $d_{n-1,n-2}$, ..., $d_{n-1,1}$. После этого из уравнений (27) при $j=n-1$ находим $d_{n-2,n-1}$, ..., $d_{1,n-1}$. Так, переходя поочередно от системы (26) к (27) и наоборот, мы в конце концов найдем все d_{ij}. Вычислительная схема остается прежней, только вместо одной строки для неизвестных x_i у нас будет n строк для матрицы A^{-1}.

Если воспользоваться результатами, полученными при решении примера (1) по компактной схеме Гаусса, то без труда найдем, что матрица, обратная к матрице данной системы, будет такова:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0,93794 & -0,06844 & -0,07961 & -0,08592 \\ -0,08852 & 0,90599 & -0,09919 & -0,10560 \\ -0,11135 & -0,11697 & 0,87842 & -0,12707 \\ -0,13546 & -0,14018 & -0,14381 & 0,85161 \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Интересно заметить, что при этом оказывается

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} 0,99999 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 1,00001 & 0,00000 & -0,00001 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,99999 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 1,00000 \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Точность вполне удовлетворительна. Если бы точность нас не удовлетворила, то для уточнения можно было бы применить какой-либо метод последовательного приближения, о чем будем говорить позже.

4. Вычисление определителей. Схемы Гаусса можно применить для вычисления определителей. При этом никаких новых трудностей не возникает, поэтому только кратко опишем для примера применение для этой цели схемы Гаусса с выбором главного элемента.

Анализируя схему Гаусса с выбором главного элемента для решения системы уравнений, легко убедиться, что при выполнении прямого хода мы совершаем такие преобразования матрицы коэффициентов исходной системы, при которых величина ее определителя не изменяется. После завершения прямого хода получается система с такой матрицей, которую путем перестановки строк и столбцов можно преобразовать в треугольную матрицу, причем на главной диагонали будут стоять наши главные элементы. Следовательно, определитель матрицы исходной системы только знаком может отличаться от произведения главных элементов. С каким знаком нужно брать это произведение, легко сообразить, не выполняя преобразование матрицы к треугольному виду.

Эти рассуждения показывают, что для вычисления определителя по схеме Гаусса с выбором главного элемента нужно в точности повторить прямой ход для решения системы по этой схеме (не выполняя действий со столбцом свободных членов), а затем взять с соответствующим знаком произведение главных элементов.

5. Схема Жордана. Когда мы решали систему по схеме Гаусса, то на каждом шаге число уравнений уменьшалось на единицу. Будем теперь оставлять все уравнения, но при выборе главного элемента не будем учитывать коэффициенты тех уравнений, из которых уже выбирался главный элемент. Получим новую схему, которую будем называть *схемой Жордана*. Так как здесь нет по существу ничего нового, то мы лишь проиллюстрируем эту схему на том же самом примере:

№ п/п.	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	—0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	—0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3	—0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1	—0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	—0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
4	—0,21934	0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1	—0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
2		0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
3	—0,14645	0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
4	—0,19015	0,20294	0,21139		1,26710	1,53651	3,21794
1		1,06616				1,10944	2,17560
2	—0,09841	0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
3	—0,13037	0,13899		1,17077		1,23936	2,54912
4	—0,17163	0,18299			1,26710	1,30711	2,75720
1		1,06616				1,10944	2,17560
2			1,11170			1,09721	2,20891
3				1,17077		1,09472	2,26549
4					1,26710	1,11670	2,38380