**2. Простейшие итерационные методы: метод секущих и метод Ньютона.** Если уравнение $f(x)=0$ имеет корень $x=\alpha$, а функция $\psi(x)$ непрерывна в окрестности $x=\alpha$, то уравнение

$$x=\varphi(x)\equiv x-\psi(x)f(x) \tag{17}$$

также имеет корень $x=\alpha$. Функцию $\psi(x)$ можно подобрать так, что итерационный процесс для уравнения (17) будет сходящимся.

Рассмотрим два классических метода, которые можно получить этим способом.

Пусть $f(x)$ — действительная функция действительного переменного $x$, а $x=\alpha$ — действительный корень уравнения $f(x)=0$. Предположим, что в некоторой окрестности точки $x=\alpha$ функция $f(x)$ вместе с $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ и $f''(x)$ в этой окрестности не меняют знака. Это означает, что при переходе через $x=\alpha$ функция $f(x)$ меняет знак и имеет точку $x=\alpha$ простым корнем. Пусть $x_0$ — точка рассматриваемой окрестности, в которой $f(x_0)f''(x_0)>0$. В (17) в качестве функции $\psi(x)$ возьмем функцию

$$\psi(x)\equiv\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}.$$

Тогда уравнение

$$x=\varphi(x)\equiv x-\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}f(x)=\frac{x_0f(x)-xf(x_0)}{f(x)-f(x_0)} \tag{18}$$

также имеет корнем $x=\alpha$. За начальное приближение примем любую, достаточно близкую к $\alpha$ точку $x_1$ рассматриваемой окрестности, в которой $f(x_1)$ имеет знак, противоположный знаку $f(x_0)$, а последующие приближения будем строить обычным способом:

$$x_n=\frac{x_0f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_0)}{f(x_{n-1})-f(x_0)}\qquad(n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{19}$$

Так как, с одной стороны,

$$\varphi'(\alpha)=\frac{[x_0f'(\alpha)-f(x_0)]\,[f(\alpha)-f(x_0)]-f'(\alpha)\,[x_0f(\alpha)-\alpha f(x_0)]}{[f(\alpha)-f(x_0)]^2}=$$
$$=\frac{f(x_0)+(\alpha-x_0)f'(\alpha)}{f(x_0)},$$

а с другой стороны, по формуле Тейлора

$$f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\xi),$$

где $\xi$ заключено между $\alpha$ и $x$, то, полагая $x=x_0$, получим:

$$f(x_0)+(\alpha-x_0)f'(\alpha)=\frac{(x_0-\alpha)^2}{2!}f''(\xi).$$

Следовательно,

$$\varphi'(\alpha)=\frac{(x_0-\alpha)^2}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f(x_0)}.$$

При $x_0$, достаточно близком к $x=\alpha$, $\varphi'(\alpha)$ — малое число, и поэтому существует такая окрестность точки $\alpha$, в которой будет иметь место неравенство

$$|\varphi'(x)| \leqslant K < 1,$$

и если $x_1$ взято из этой окрестности, то последовательность (19) будет сходиться к $x=\alpha$.

Так как $f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = f'(\xi)(x_n - \alpha)$, то, положив $m = \min\limits_{x \in [x_0,\, x_1]} |f'(x)|$, будем иметь:

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{20}$$

что позволяет на каждом шаге по значениям $f(x_n)$ следить за достигнутой точностью.

Геометрически этот метод состоит в том, что значение $x_{n+1}$ есть абсцисса точки пересечения прямой, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_n, f(x_n))$, с осью $x$ (рис. 8). Поэтому этот метод

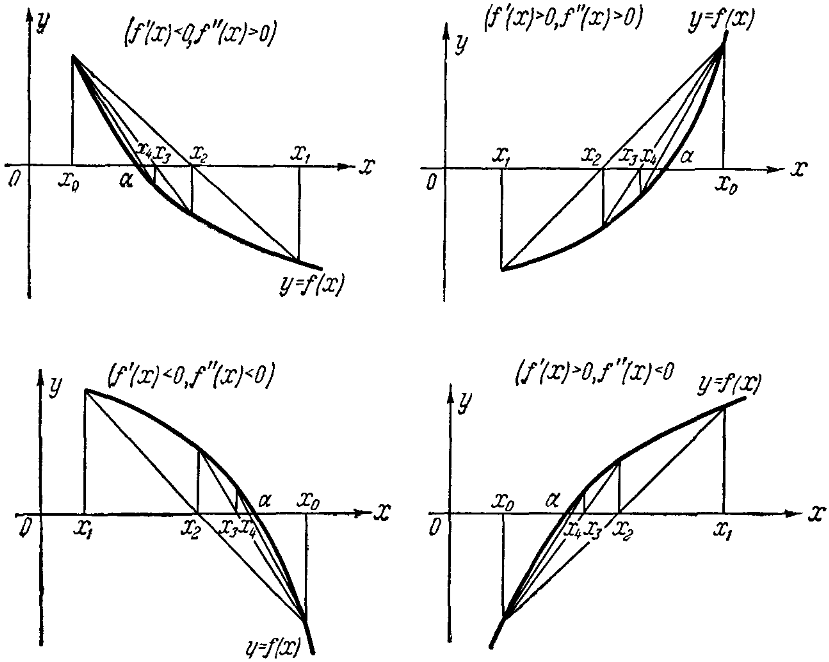


Рис. 8.

называют *методом секущих* или *методом линейной интерполяции*, так как на каждом шаге за приближенное значение корня $x_{n+1}$ принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, построенного по значениям $f(x)$ в точках $x_0$ и $x_n$.

Метод секущих является итерационным методом первого порядка.

Второй классический метод решения уравнения $f(x)=0$ — *метод Ньютона* — получим, если положить в (17)

$$\psi(x)\equiv\frac{1}{f'(x)},$$

т. е. свести отыскание корня $x=\alpha$ уравнения $f(x)=0$ к отысканию корня уравнения

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\equiv\varphi(x). \tag{21}$$

Будем предполагать, что на отрезке $[a, b]$, содержащем единственный корень $x=\alpha$ уравнения $f(x)=0$, функция $f(x)$ имеет непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$, не обращающиеся в нуль на этом отрезке. В этом случае

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

и $\varphi'(\alpha)=0$. Это означает, что существует такая окрестность точки $x=\alpha$, что если начальное приближение $x=x_0$ взято из этой окрестности, то последовательность

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{22}$$

будет сходиться к $x=\alpha$. Начальное приближение $x_0$ целесообразно выбирать так, чтобы было

$$f(x_0)f''(x_0)>0. \tag{23}$$

Метод Ньютона применим не только для отыскания действительных корней уравнения $f(x)=0$, но и комплексных корней, только нужно иметь в виду, что при отыскании комплексного корня в случае действительной функции $f(x)$ начальное приближение $x_0$ нужно брать комплексным числом, а не действительным.

В случае, если $x=\alpha$ является действительным корнем уравнения $f(x)=0$, этот метод имеет простую геометрическую интерпретацию. Значение $x_{n+1}$ есть абсцисса точки пересечения касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $x=x_n$ с осью $x$ (рис. 9). Поэтому метод Ньютона часто называют *методом касательных*.

Как видно из рис. 9 последовательные приближения к действительному корню в методе Ньютона сходятся к нему монотонно, приближаясь со стороны $x_0$.

Если за начальное приближение в методе Ньютона взять точку $x_0$, где $f(x_0)f''(x_0)<0$, то, как видно из рис. 10, мы можем не прийти к корню $x=\alpha$, если только начальное приближение не очень хорошее.

Так как в методе Ньютона $\varphi'(\alpha)=0$, а $\varphi''(\alpha)$, вообще говоря, не равна нулю, то метод Ньютона является итерационным методом второго порядка.

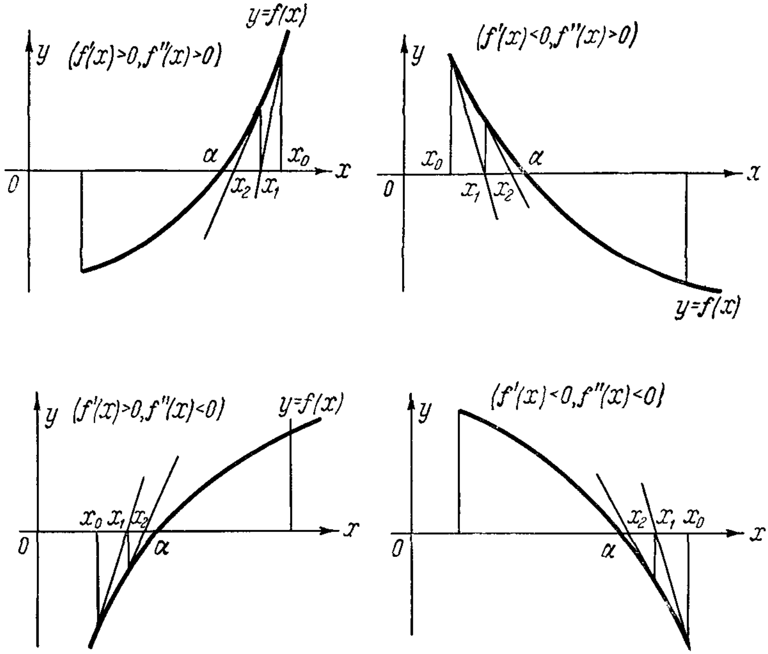
y
(f'(x)>0, f''(x)>0)
y=f(x)
α
x₀
x₂ x₁
0
x
y
(f'(x)<0, f''(x)>0)
x₀
α
x₁ x₂
0
x
y=f(x)
y
(f'(x)>0, f''(x)<0)
y=f(x)
x₀ x₁ x₂
0
α
x
y
(f'(x)<0, f''(x)<0)
x₂ x₁ x₀
0
α
x

Рис. 9.

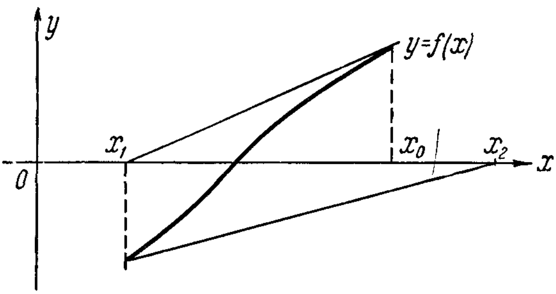
y
y=f(x)
x₁
x₀
x₂
0
x

Рис. 10.

Скорость сходимости метода Ньютона можно оценить следующим образом. По формуле Тейлора

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_n)^2,$$

где $\xi$ заключено между $\alpha$ и $x_n$. Отсюда

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \alpha - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$

Следовательно,

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$

Если $m_1 = \min\limits_{[a,\,b]} |f'(x)|$, а $M_2 = \max\limits_{[a,\,b]} |f''(x)|$, где $[a, b]$ — отрезок, содержащий $x_0$ и $\alpha$, на котором не меняют знака $f'(x)$ и $f''(x)$, то

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{M_2}{2m_1} |x_n - \alpha|^2. \tag{24}$$

Это указывает на быструю сходимость метода Ньютона.

Комбинируя метод секущих и метод Ньютона, можно получить нестационарный метод отыскания действительных корней уравнения $f(x) = 0$, преимущество которого заключается в том, что при прежних предположениях относительно $f'(x)$ и $f''(x)$ последовательные приближения $x_n$ и $x_{n+1}$ лежат по разные стороны от корня, и поэтому можно следить в процессе вычислений за достигнутой точностью, и в то же время он сходится значительно быстрей метода секущих.

Пусть на отрезке $[a, b]$ содержится единственный корень уравнения $f(x) = 0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ на этом отрезке не меняют знаков. Если $f(a) f''(a) > 0$, то находим $x_0$ и $x_1$ по формулам:

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \tag{25}$$

а следующие приближения находим по формулам:

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, \qquad x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2} f(x_{2n-1}) - x_{2n-1} f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}. \tag{26}$$

Если же $f(b) f''(b) > 0$, то $x_0$ и $x_1$ находим по формулам:

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \qquad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \tag{25'}$$

а следующие приближения — по тем же формулам (26). Как видно из рис. 11, последовательные приближения $x_{2n}$ и $x_{2n+1}$ всегда расположены по разные стороны от $x=\alpha$ и первые совпадающие знаки $x_{2n}$ и $x_{2n+1}$ и будут верными знаками для $x=\alpha$.

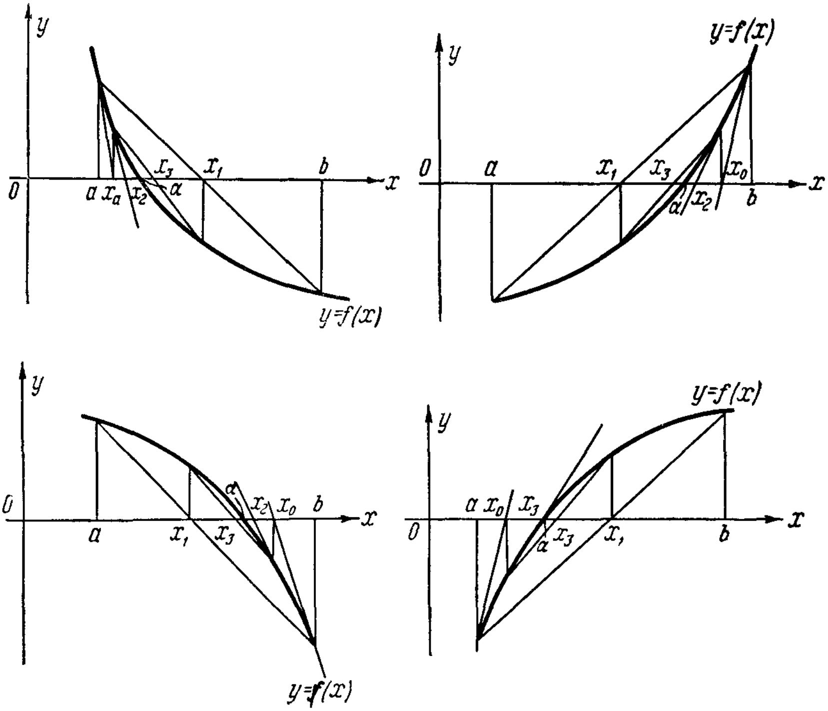


Рис. 11.

**3. Метод Чебышева построения итераций высших порядков.** В 1838 г. П. Л. Чебышев предложил метод отыскания действительных корней уравнения $f(x)=0$, частными случаями которого явились многие, разработанные до него методы. В основе метода Чебышева лежит представление функции, обратной к функции $f(x)$, по формуле Тейлора.

Пусть уравнение $f(x)=0$ на отрезке $[a, b]$ имеет корень $x=\alpha$. Относительно функции $f(x)$ предположим, что она непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе с производными достаточно высокого порядка и $f'(x) \neq 0$ на $[a, b]$. При этих предположениях функция $y=f(x)$ имеет обратную функцию $x=F(y)$, определенную на отрезке $[c, d]$, являющемся областью значений $f(x)$ при $x \in [a, b]$. Функция $F(y)$ имеет столько же непрерывных производных, сколько имеет и $f(x)$. Так как

$$x \equiv F[f(x)] \quad (x \in [a, b]), \qquad y \equiv f[F(y)] \quad (y \in [c, d]), \tag{27}$$