неизвестных. Из этих приближенных значений тем или иным способом получают новые «улучшенные» приближенные значения. С новыми приближенными значениями поступают точно так же и т. д. При выполнении определенных условий можно придти, вообще говоря, после бесконечного числа шагов к точному решению.

Под нашу классификацию не подходят способы решения по методу Монте-Карло. Так названы методы, использующие случайные величины, математические ожидания которых дают решение системы. Пока методы Монте-Карло не могут соревноваться с другими методами, названными выше. Поэтому мы не будем ими здесь заниматься.

## § 2. Метод исключения

Мы начнем изучение численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с точных методов. Простейшим из таких методов является метод исключения.

С методом исключения мы сталкивались уже в обычном школьном курсе алгебры. Комбинируя каким-либо образом уравнения системы, добиваются того, что во всех уравнениях, кроме одного, будет исключено одно из неизвестных. Затем исключают другое неизвестное, третье и т. д. В результате получаем систему с треугольной или диагональной матрицей, решение которой не представляет труда. Метод исключений не вызывает каких-либо теоретических затруднений. Однако точность результата и затрачиваемое на его получение время будут во многом зависеть от организации вычислений. Этому вопросу мы и уделим основное внимание.

Рассмотрим ряд схем, осуществляющих метод исключения на примере системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}
1{,}1161\,x_1+0{,}1254\,x_2+0{,}1397\,x_3+0{,}1490\,x_4&=1{,}5471,\\
0{,}1582\,x_1+1{,}1675\,x_2+0{,}1768\,x_3+0{,}1871\,x_4&=1{,}6471,\\
0{,}1968\,x_1+0{,}2071\,x_2+1{,}2168\,x_3+0{,}2271\,x_4&=1{,}7471,\\
0{,}2368\,x_1+0{,}2471\,x_2+0{,}2568\,x_3+1{,}2671\,x_4&=1{,}8471.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Каждой схеме мы припишем то или иное название. Правда, эти названия не являются общепринятыми.

**1. Схема Гаусса с выбором главного элемента.** Если вычисления производятся не с помощью автоматических вычислительных машин, то удобно нашу систему записать в следующую схему:

| № п/п. | $m_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $a_{i3}$ | $a_{i4}$ | $b_i$ | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 0,11610 | 0,12540 | 0,13970 | 0.14900 | 1,54710 | 3,07730 |
| 2 | | 0,15820 | 1,16750 | 0,17680 | 0,18710 | 1,64710 | 3,33670 |
| 3 | | 0,19680 | 0,20710 | 1,21680 | 0,22710 | 1,74710 | 3,59490 |
| 4 | | 0,23680 | 0,24710 | 0,25680 | 1,26710 | 1,84710 | 3,85490 |

В первом столбце мы записываем номера уравнений. Значение второго столбца будет ясно дальше. 3-й, 4-й, 5-й и 6-й столбцы содержат коэффициенты уравнений, а 7-й столбец — свободные члены. Последний столбец содержит суммы коэффициентов и свободных членов данной строки.

Выбираем теперь наибольший по модулю элемент $a_{ij}$. Будем называть его *главным*. В нашем случае это $a_{44} = 1,26710$. Он в схеме подчеркнут. Делим все элементы столбца, в котором находится главный элемент (в нашем случае $a_{i4}$), на главный элемент и отношения с обратным знаком помещаем в столбце $m_i$ в той же строке, где находится делимое:

| № п/п. | $m_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $a_{i3}$ | $a_{i4}$ | $b_i$ | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —0,11759 | 1,11610 | 0,12540 | 0,13970 | 0,14900 | 1,54710 | 3,07730 |
| 2 | —0,14766 | 0,15820 | 1,16750 | 0,17680 | 0,18710 | 1,64710 | 3,33670 |
| 3 | —0,17923 | 0,19680 | 0,20710 | 1,21680 | 0,22710 | 1,74710 | 3,59490 |
| 4 | | 0,23680 | 0,24710 | 0,25680 | <u>1,26710</u> | 1,84710 | 3,85490 |

Будем теперь прибавлять к каждой из строк схемы строку, содержащую главный элемент, умноженную на соответствующее $m_i$. Строку, содержащую главный элемент, в дальнейшем не выписываем. Не выписываем также и столбец, в котором содержится главный элемент, так как он состоит из нулей. В нашем случае получим:

| № п/п. | $m_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $a_{i3}$ | $a_{i4}$ | $b_i$ | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —0,09353 | 1,08825 | 0,09634 | 0,10950 | | 1,32990 | 2,62399 |
| 2 | —0,11862 | 0,12323 | 1,13101 | 0,13888 | | 1,37436 | 2,76748 |
| 3 | | 0,15436 | 0,16281 | <u>1,17077</u> | | 1,41604 | 2,90398 |

Мы вписали сюда же значения $m_i$, которые получатся на следующем шаге. Производим проверку правильности вычислений. Для этого складываем столбцы $a_{ij}$ и $b_i$ и сравниваем со столбцом $s_i$. Если расхождения в пределах ошибок округления, то считаем вычисления правильными. Если расхождения слишком велики, то повторяем соответствующие вычисления.

В дальнейшем поступаем с нашей таблицей, как и с предыдущей. Выбираем главный элемент (в нашем случае это будет 1,17077) и делим на него элементы того же столбца. Результаты с обратными знаками записываются в столбец $m_i$ (у нас это уже сделано). Затем последовательно умножаем строку, из которой взят главный элемент, на $m_i$ и складываем с соответствующими строками. Производим проверку и переходим к следующему шагу. Так продолжаем до тех пор, пока у нас не останется одна строка. В нашем примере будем иметь:

| № | $m_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $a_{i3}$ | $a_{i4}$ | $b_i$ | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1<br>2 | −0,07296 | 1,07381<br>0,10492 | 0,08111<br>1,11170 | | | 1,19746<br>1,20639 | 2,35238<br>2,42301 |
| 1 | | 1,06616 | | | | 1,10944 | 2,17560 |

Взяв уравнения, в которых выбирались главные элементы, получим новую систему, эквивалентную данной:

$$\left.\begin{aligned}
&1{,}06616\,x_1 = 1{,}10944,\\
&0{,}10492\,x_1 + 1{,}11170\,x_2 = 1{,}20639,\\
&0{,}15436\,x_1 + 0{,}16281\,x_2 + 1{,}17077\,x_3 = 1{,}41604,\\
&0{,}23680\,x_1 + 0{,}24710\,x_2 + 0{,}25680\,x_3 + 1{,}26710\,x_4 = 1{,}84710.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Матрица новой системы треугольная. Решение такой системы не встретит затруднений. Находим:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1{,}10944}{1{,}06616} = 1{,}04059,\\
x_2 &= \frac{1{,}20639 - 0{,}10492\cdot 1{,}04059}{1{,}11170} = \frac{1{,}09721}{1{,}11170} = 0{,}98697,\\
x_3 &= \frac{1{,}41604 - 0{,}15436\cdot 1{,}04059 - 0{,}16281\cdot 0{,}98697}{1{,}17077} = \frac{1{,}09473}{1{,}17077} = 0{,}93505,\\
x_4 &= \frac{1{,}84710 - 0{,}23680\cdot 1{,}04059 - 0{,}24710\cdot 0{,}98697 - 0{,}25680\cdot 0{,}93505}{1{,}26710} =\\
&= \frac{1{,}11669}{1{,}26710} = 0{,}88130.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Приведенную нами схему исключения неизвестных назовем *схемой исключения Гаусса с выбором главного элемента.* Сам процесс исключения называют *прямым ходом,* а решение системы с треугольной матрицей — *обратным ходом.* При практическом использовании схемы Гаусса не следует, конечно, разрывать отдельные этапы, как это сделано нами для облегчения объяснений. Не следует также выписывать и окончательную систему уравнений.

Контроль обратного хода осуществляется с помощью столбца $s_i$. Если в окончательной системе заменить $b_i$ на $s_i$, то должны получить вместо $x_i$ величины $x_i + 1$. Проверка полученных результатов может быть сделана также путем подстановки их в исходную систему уравнений. В нашем случае получим последовательно в левых частях равенства: 1,54711; 1,64712; 1,74710; 1,84711. Как мы видим, расхождения между правыми и левыми частями не превосходят двух единиц пятого десятичного знака, что нужно считать удовлетворительным.

Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими $m_i$ и тем самым уменьшить вычислительную погрешность.

Как известно, при работе на цифровых машинах, да и при работе вручную, наибольшее количество времени затрачивается на производство действий умножения и деления. Поэтому важно знать, сколько действий умножения и деления потребуется для решения заданной системы. Если система имеет порядок $n$, то после выбора главного элемента нужно произвести $n-1$ делений для определения коэффициентов $m_i$. Затем нужно умножить строку, содержащую главный элемент, на каждый из этих множителей. Для этого потребуется $(n+1)(n-1)=n^2-1$ умножений. Таким образом, первый шаг работы по схеме Гаусса требует $n^2+n-2$ умножений и делений. Следующий шаг потребует $(n-1)^2+(n-1)-2$ таких операций и т. д. Всего до обратного хода нужно произвести

$$[n^2+n-2]+[(n-1)^2+(n-1)-2]+\ldots$$
$$\ldots+[1^2+1-2]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-2n \qquad (4)$$

операций умножения и деления. Для обратного хода потребуется

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (5)$$

операций умножения и деления, если не производить контроля с столбцом $s_i$. Столько же операций потребуется при использовании такого контроля. Итак, всего на решение системы $n$ уравнений по схеме Гаусса с выбором главного элемента и текущим контролем потребуется

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-2n+n(n+1)=\frac{n}{3}(n^2+6n-1) \qquad (6)$$

операций умножения и деления.

**2. Компактная схема Гаусса.** Придумано много различных видоизменений схемы Гаусса, дающих те или иные преимущества. Приведем одну такую схему. Рассмотрим сначала систему четырех уравнений общего вида:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+a_{14}^{(0)}x_4&=a_{15}^{(0)},\\
a_{21}^{(0)}x_1+a_{22}^{(0)}x_2+a_{23}^{(0)}x_3+a_{24}^{(0)}x_4&=a_{25}^{(0)},\\
a_{31}^{(0)}x_1+a_{32}^{(0)}x_2+a_{33}^{(0)}x_3+a_{34}^{(0)}x_4&=a_{35}^{(0)},\\
a_{41}^{(0)}x_1+a_{42}^{(0)}x_2+a_{43}^{(0)}x_3+a_{44}^{(0)}x_4&=a_{45}^{(0)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Исходные данные, промежуточные и окончательные результаты будем записывать в следующую схему:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & a_{14}^{(0)} & a_{15}^{(0)} \\
a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} & a_{25}^{(0)} \\
a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} & a_{35}^{(0)} \\
a_{41}^{(0)} & a_{42}^{(0)} & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} & a_{45}^{(0)} \\
\hline
b_{11}^{(1)} & \multicolumn{1}{|c}{c_{12}^{(2)}} & c_{13}^{(2)} & c_{14}^{(2)} & c_{15}^{(2)} \\
\cline{2-2}
b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(3)} & \multicolumn{1}{|c}{c_{23}^{(4)}} & c_{24}^{(4)} & c_{25}^{(4)} \\
\cline{3-3}
b_{31}^{(1)} & b_{32}^{(3)} & b_{33}^{(5)} & \multicolumn{1}{|c}{c_{34}^{(6)}} & c_{35}^{(6)} \\
\cline{4-4}
b_{41}^{(1)} & b_{42}^{(3)} & b_{43}^{(5)} & b_{44}^{(7)} & \multicolumn{1}{|c}{c_{45}^{(8)}} \\
\hline
x_1^{(12)} & x_2^{(11)} & x_3^{(10)} & x_4^{(9)} &
\end{array}
$$

Верхнюю половину схемы мы отводим для коэффициентов и свободных членов исходной системы, а в нижней половине будут помещаться промежуточные и окончательные результаты. Верхний индекс показывает порядок получения промежуточных и окончательных результатов.

Величины $b_{i1}^{(1)}$ просто совпадают с соответствующими величинами $a_{i1}^{(0)}$ и выписываются здесь лишь для удобства пользования схемой.

Величины $c_{1j}^{(2)}$ вычисляем по формулам

$$c_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(0)}}{b_{11}^{(1)}} \qquad (j = 2,\ 3,\ 4,\ 5). \tag{8}$$

При этом уравнение

$$x_1 + c_{12}^{(2)} x_2 + c_{13}^{(2)} x_3 + c_{14}^{(2)} x_4 = c_{15}^{(2)} \tag{9}$$

эквивалентно первому уравнению исходной системы.

После этого вычисляем величины $b_{i2}^{(3)}$ $(i > 1)$ по формулам

$$b_{i2}^{(3)} = a_{i2}^{(0)} - b_{i1}^{(1)} c_{12}^{(2)} \qquad (i = 2,\ 3,\ 4). \tag{10}$$

Таким образом, $b_{i2}^{(3)}$ будут являться коэффициентами при $x_2$ во втором, третьем и четвертом уравнениях системы после исключения в них неизвестного $x_1$ с помощью уравнения (9).

Следующим этапом будет являться получение коэффициентов и правой части второго уравнения после исключения из него указанным выше способом неизвестного $x_1$ и последующего деления на коэффициент при $x_2$. Очевидно, эти величины $c_{2j}^{(4)}$ будут определяться по формулам:

$$c_{2j}^{(4)} = \frac{a_{2j}^{(0)} - b_{21}^{(1)} c_{1j}^{(2)}}{b_{22}^{(3)}} \qquad (j = 3,\ 4,\ 5). \tag{11}$$

Таким образом, после преобразования второе уравнение примет вид

$$x_2 + c_{23}^{(4)} x_3 + c_{24}^{(4)} x_4 = c_{25}^{(4)}. \tag{12}$$

Далее будем исключать неизвестное $x_2$ из третьего и четвертого уравнений. Опять сначала подсчитываем коэффициенты при $x_3$ в третьем и четвертом уравнениях. Они определятся по формулам:

$$b_{i3}^{(5)} = a_{i3}^{(0)} - b_{i1}^{(1)} c_{13}^{(2)} - b_{i2}^{(3)} c_{23}^{(4)} \qquad (i = 3,\ 4). \tag{13}$$

Первые два члена правой части этой формулы дают коэффициенты при $x_3$ третьего и четвертого уравнений после исключения $x_1$, а после вычитания последнего члена получим результат исключения $x_2$.

Коэффициенты и правая часть третьего уравнения после деления на коэффициент при $x_3$ примут вид

$$c_{3j}^{(6)} = \frac{a_{3j}^{(0)} - b_{31}^{(1)} c_{1j}^{(2)} - b_{32}^{(3)} c_{2j}^{(4)}}{b_{33}^{(5)}} \qquad (j = 4,\ 5), \tag{14}$$

а само это уравнение запишется в виде

$$x_3 + c_{34}^{(6)} x_4 = c_{35}^{(6)}. \tag{15}$$

Остается еще исключить $x_3$ из четвертого уравнения. При этом коэффициент при $x_4$ в нем примет вид

$$b_{44}^{(7)} = a_{44}^{(0)} - b_{41}^{(1)} c_{14}^{(2)} - b_{42}^{(3)} c_{24}^{(4)} - b_{43}^{(5)} c_{34}^{(6)}, \tag{16}$$

а свободный член после исключения $x_3$ и деления на коэффициент при $x_4$ будет

$$c_{45}^{(8)} = \frac{a_{45}^{(0)} - b_{41}^{(1)} c_{15}^{(2)} - b_{42}^{(3)} c_{25}^{(4)} - b_{43}^{(5)} c_{35}^{(6)}}{b_{44}^{(7)}}. \tag{17}$$

При этом четвертое уравнение запишется в виде

$$x_4 = c_{45}^{(8)}. \tag{18}$$

Нетрудно заметить, что для системы $n$ уравнений при отыскании величин $b_{ij}^{(2j-1)}$, $c_{jl}^{(2j)}$ следует поочередно использовать формулы:

$$b_{ij}^{(2j-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}^{(2k-1)} c_{kj}^{(2k)} \qquad (i = j,\ j+1,\ \ldots,\ n), \tag{19}$$

$$c_{jl}^{(2j)} = \frac{a_{jl}^{(0)} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{jk}^{(2k-1)} c_{kl}^{(2k)}}{b_{jj}^{(2j-1)}} \qquad (l = j+1,\ j+2,\ \ldots,\ n+1). \tag{20}$$

Если проследить ход вычислений по схеме, то легко обнаружить закон образования величин $b_{ij}^{(2j-1)}$ и $c_{jl}^{(2j)}$.

Неизвестные $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ находятся последовательно из системы уравнений

$$x_i + \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}^{(2i)} x_k = c_{i,n+1}^{(2i)} \qquad (i = n,\ n-1, \ldots, 1). \tag{21}$$

Будем называть эту схему *компактной схемой Гаусса*. При решении системы $n$ уравнений по компактной схеме Гаусса требуется произвести столько же умножений и делений, как и в схеме главных элементов. Однако она требует меньше записей. Схема допускает такой же контроль, как и ранее.

Так как вычисления по компактной схеме Гаусса более систематизированы, чем по схеме главных элементов, то процесс вычислений легче программируется для автоматических машин. С другой стороны, вычисления по этой схеме могут привести к большой потере точности. Кроме того, для того чтобы процесс вычислений был осуществим, нужно требовать отличие от нуля всех $b_{ii}^{(2i-1)}$.

Приведем результаты вычислений при решении приведенной в начале параграфа системы (1) по компактной схеме Гаусса:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,11610 | 0,12540 | 0,13970 | 0,14900 | 1,54710 | 3,07730 |
| 0,15820 | 1,16750 | 0,17680 | 0,18710 | 1,64710 | 3,33670 |
| 0,19680 | 0,20710 | 1,21680 | 0,22710 | 1,74710 | 3,59490 |
| 0,23680 | 0,24710 | 0,25680 | 1,26710 | 1,84710 | 3,85490 |
| 1,11610 | 0,11236 | 0,12517 | 0,13350 | 1,38617 | 2,75720 |
| 0,15820 | 1,14972 | 0,13655 | 0,14437 | 1,24187 | 2,52279 |
| 0,19680 | 0,18499 | 1,16691 | 0,14921 | 1,06655 | 2,21576 |
| 0,23680 | 0,22049 | 0,19705 | 1,17425 | 0,88130 | 1,88130 |
| 1,04058 | 0,98696 | 0,93505 | 0,88130 | | |

Применяя компактную схему Гаусса, мы элементарными преобразованиями переводим матрицу $A$ системы в верхнюю треугольную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12}^{(2)} & c_{13}^{(2)} & c_{14}^{(2)} & \ldots & c_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & c_{23}^{(4)} & c_{24}^{(4)} & \ldots & c_{2n}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Интересно отметить, что если рассмотреть еще матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(3)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(3)} & b_{n3}^{(5)} & b_{n4}^{(7)} & \ldots & b_{n,n}^{(2n-1)} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

также получающуюся в процессе наших вычислений, то имеет место равенство

$$A = BC. \qquad (24)$$

Это равенство просто получается, если использовать формулы (19) и (20). Так как $B^{-1}$ снова треугольная матрица, то прямой ход при решении системы уравнений по компактной схеме Гаусса эквивалентен умножению системы на треугольную матрицу.

**3. Обращение матрицы.** Равенство (24) можно использовать для *обращения матриц*. Эта задача важна как сама по себе, так и в тех случаях, когда приходится решать много систем с одной и той же матрицей, но с различными правыми частями.

Перепишем (24) следующим образом:

$$A^{-1}B = C^{-1}, \quad CA^{-1} = B^{-1}. \qquad (25)$$

Матрица $C^{-1}$ будет верхней треугольной, и ее диагональные элементы равны единице. Поэтому если обозначить элементы матрицы $A^{-1}$ через $d_{ij}$, то первое из равенств (25) даст $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений для определения $d_{ij}$:

$$\left.\begin{array}{rcccc}
i = & 1 & 2 & 3 \ldots n, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}b_{j1}^{(1)} = & 1 & 0 & 0 \ldots 0, \\
\sum\limits_{j=2}^{n} d_{ij}b_{j2}^{(3)} = & & 1 & 0 \ldots 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
d_{nn}b_{nn}^{(2n-1)} = & & & 1.
\end{array}\right\} \qquad (26)$$

Так как матрица $B^{-1}$ нижняя треугольная, то второе из равенств (25) даст еще $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений для отыскания $d_{ij}$:

$$\left.\begin{array}{rccc}
j = & 2 & 3 \ldots n, \\
d_{1j} + \sum\limits_{i=2}^{n} d_{ij}c_{1i}^{(2)} = & 0 & 0 \ldots 0, \\
d_{2j} + \sum\limits_{i=3}^{n} d_{ij}c_{2i}^{(4)} = & & 0 \ldots 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
d_{n-1,\,n} + d_{nn}c_{n-1,\,n}^{(2n-2)} = & & 0.
\end{array}\right\} \qquad (27)$$