ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В данной главе будут рассмотрены численные методы решения простейших, но очень распространенных задач математического анализа — дифференцирования и интегрирования функций.

Дифференцирование и интегрирование являются частными случаями функций, определенных на функциональных пространствах, о которых говорилось во Введении. При этом каждой функции некоторого функционального пространства R ставится в соответствие либо снова функция (при отыскании производной или неопределенного интеграла), либо некоторое число (если ищется производная в определенной точке или определенный интеграл). Например, понимая под R совокупность всех функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную, можно рассматривать дифференцирование как функцию $A(f)$, определенную на R, с помощью которой элементу $f(x) \in R$ ставится в соответствие функция $\varphi(x) \in C$, где $\varphi(x) = f'(x)$, т. е. $A(f) = f'(x)$ или $A \equiv \frac{d}{dx}$.

Во многих случаях значения этих функций не могут быть найдены точно использованием методов дифференциального и интегрального исчисления. Тогда прибегают к приближенному решению этих задач, используя общий метод, описанный во Введении. В этой главе мы будем рассматривать методы численного дифференцирования и интегрирования, основанные на замене пространства R другим пространством $\bar{R}$. т. е. будем заменять задачу $A(f) = \varphi$ $f \in R$ задачей $A(\bar{f}) = \bar{\varphi}$, $\bar{f} \in \bar{R}$.

В основу замены R на $\bar{R}$ положим уже рассмотренный метод приближения — интерполирование.

§ 1. Задача численного дифференцирования

К численному дифференцированию приходится прибегать в том случае, когда функция $f(x)$, для которой нужно найти производную, задана таблично или же функциональная зависимость x и $f(x)$ имеет очень сложное аналитическое выражение. В первом случае методы дифференциального исчисления просто неприменимы, а во втором случае их использование вызывает значительные трудности.

В этих случаях вместо функции $f(x)$ рассматривают интерполирующую функцию $\varphi(x)$ и считают производную от $f(x)$ приближенно равной производной от $\varphi(x)$. Естественно, что при этом производная от $f(x)$ будет найдена с некоторой погрешностью.

Функцию $f(x)$ можно записать в таком виде:

$$f(x)=\varphi(x)+R(x),$$

где $\varphi(x)$ — интерполирующая функция, а $R(x)$ — остаточный член интерполяционной формулы. Дифференцируя это тождество k раз (в предположении, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные k-го порядка), получим:

$$f^{(k)}(x)=\varphi^{(k)}(x)+R^{(k)}(x).$$

Так как за приближенное значение $f^{(k)}(x)$ принимается $\varphi^{(k)}(x)$, то погрешность есть $R^{(k)}(x)$. При замене $f(x)$ интерполирующей функцией $\varphi(x)$ предполагается, что остаточный член мал, но из этого совсем не следует, что мало $R^{(k)}(x)$, ибо производные от малой функции могут быть весьма велики. И на самом деле, практика показывает, что при таком способе вычисления производных $f^{(k)}(x)$ получается сравнительно большая погрешность, особенно при вычислении производных высших порядков.

Рассмотрим формулы дифференцирования в общем случае, когда интерполирующая функция $\varphi(x)$ строится как линейная комбинация базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, образующих систему Чебышева на рассматриваемом отрезке $[a, b]$.

Пользуясь результатами предыдущей главы (см. (2) § 4 гл. 2), запишем функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=\varphi(x)+\sum_{i=0}^{n}\Phi_i(x)\int_{x_i}^{x}K(x_i,s)\,L_{n+1}[f(s)]\,ds. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\Phi_i(x)$ — интерполяционный многочлен, $\Phi_i(x)$ — линейная комбинация базисных функций $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющая условиям

$$\Phi_i(x_j)=\delta_{ij},$$

x_i — узлы интерполирования,

$$K(x, s)=W^{-1}[\varphi_0(s), \ldots, \varphi_n(s)]\cdot\begin{vmatrix}\varphi_0(s) & \varphi_1(s) & \ldots & \varphi_n(s)\\ \varphi_0'(s) & \varphi_1'(s) & \ldots & \varphi_n'(s)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_0^{(n-1)}(s) & \varphi_1^{(n-1)}(s) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(s)\\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x)\end{vmatrix}, \qquad (2)$$

$$L_{n+1}[f(s)]=W[\varphi_0(s), \ldots, \varphi_n(s), f(s)]\,W^{-1}[\varphi_0(s), \ldots, \varphi_n(s)]. \qquad (3)$$

Дифференцируем обе части равенства. Получим:

$$f'(x)=\varphi'(x)+\sum_{i=0}^{n}\Phi_i'(x)\int_{x_i}^{x}K(x_i, s)L_{n+1}[f(s)]\,ds+$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\Phi_i(x)K(x_i, x)L_{n+1}[f(x)].$$

Но

$$\sum_{i=0}^{n}\Phi_i(x)K(x_i, x)L_{n+1}[f(x)]=L_{n+1}[f(x)]\sum_{i=0}^{n}\Phi_i(x)\sum_{j=0}^{n}\Phi_j(x_i)G_j(x)=$$
$$=L_{n+1}[f(x)]\sum_{i=0}^{n}\Phi_i(x)G_i(x)=L_{n+1}[f(x)]K(x, x)=0.$$

Таким образом,

$$f'(x)=\varphi'(x)+\sum_{i=0}^{n}\Phi_i'(x)\int_{x_i}^{x}K(x_i, s)L_{n+1}[f(s)]\,ds. \tag{4}$$

При численном дифференцировании за приближенное значение производной берут $\varphi'(x)$. Тогда второй член справа будет давать остаточный член.

Дифференцируя последнее равенство еще раз, найдем:

$$f''(x)=\varphi''(x)+\sum_{i=0}^{n}\Phi_i''(x)\int_{x_i}^{x}K(x_i, s)L_{n+1}[f(s)]\,ds+$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\Phi_i'(x)K(x_i, x)L_{n+1}[f(x)]$$

И в этом случае

$$\sum_{i=0}^{n}\Phi_i'(x)K(x_i, x)L_{n+1}[f(x)]=L_{n+1}[f(x)]\sum_{i=0}^{n}\Phi_i'(x)\sum_{j=0}^{n}\Phi_j(x_i)G_j(x)=$$
$$=L_{n+1}[f(x)]\sum_{i=0}^{n}\Phi_i'(x)G_i(x)=L_{n+1}[f(x)]\left.\frac{\partial K(x, s)}{\partial x}\right|_{x=s}=0.$$

Поэтому

$$f''(x)=\varphi''(x)+\sum_{i=0}^{n}\Phi_i''(x)\int_{x_i}^{x}K(x_i, s)L_{n+1}[f(s)]\,ds. \tag{5}$$

Опять первый член справа дает приближенное значение производной, а второй — остаточный член.

Эти рассуждения можно провести для производных любого порядка, меньшего или равного n.

Из полученных выражений остаточных членов видно, что формулы численного дифференцирования дают точное значение для производных, если $f(x)$ является произвольной линейной комбинацией базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

В следующем параграфе будут рассмотрены конкретные формулы численного дифференцирования, в основе которых лежит интерполирование с помощью алгебраических многочленов.

§ 2. Формулы численного дифференцирования

1. Формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих узлов. Будем исходить из интерполяционной формулы Ньютона для неравных промежутков:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;\ x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;\ x_1;\ x_2)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+(x-x_0)(x-x_1)\ldots$$
$$\ldots(x-x_n)f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n). \tag{1}$$

Для сокращения записей обозначим $x-x_i=\alpha_i$. Дифференцируя обе части равенства (1) один раз, будем иметь:

$$f'(x)=f(x_0;\ x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)f(x_0;\ x_1;\ x_2)+$$
$$+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)+\ldots$$
$$\ldots+(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+$$
$$+\frac{d\omega_n(x)}{dx}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+\omega_n(x)\frac{df(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)}{dx}. \tag{2}$$

За приближенное значение первой производной при численном дифференцировании будет приниматься

$$L_n'(x)=f(x_0;\ x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)f(x_0;\ x_1;x_2)+$$
$$+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)+\ldots$$
$$\ldots+(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})\times$$
$$\times f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n). \tag{3}$$

Остаточный член будет выглядеть так:

$$R=\frac{d\omega_n(x)}{dx}f(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)+\omega_n(x)\frac{df(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)}{dx}. \tag{4}$$

Упростим второй член справа. По определению

$$\frac{df(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)}{dx}=\lim_{x'\to x}\frac{f(x';\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)-f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)}{x'-x}=$$
$$=\lim_{x'\to x}f(x';\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)=f(x;\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n).$$

Таким образом,

$$R=\frac{d\omega_n(x)}{dx}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+\omega_n(x)f(x;\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) \tag{5}$$

или, если использовать связь разделенных разностей с производными,

$$R = \frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + \omega_n(x)\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}. \tag{6}$$

В узлах интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$ второй член справа обращается в нуль и выражение остаточного члена будет более простым.

Дифференцируя еще раз, получим:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2f(x_0; x_1; x_2) + 2(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots \\ &\ldots + 2(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-4}\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})\times \\ &\times f(x_0; x_1; \ldots; x_n) + \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2}f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \\ &+ 2\frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{df}{dx}(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \frac{d^2f(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx^2}\omega_n(x). \end{aligned} \tag{7}$$

За приближенное значение второй производной при численном дифференцировании будет приниматься

$$\begin{aligned} L_n''(x) &= 2[f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots \\ &\ldots + (\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-4}\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})\times \\ &\times f(x_0; x_1; \ldots; x_n)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Остаточный член будет иметь вид

$$\begin{aligned} R &= \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2}f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \\ &+ 2\frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{df(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx} + \omega_n(x)\frac{d^2f(x; x_0; \ldots; x_n)}{dx^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Второй член справа упрощается так же, как это делалось для первой производной. Упростим третий член. В силу определения производной и свойств разделенных разностей будем иметь:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}f(x; x_0; \ldots; x_n) = \frac{d}{dx}f(x; x; x_0; \ldots; x_n) = \\ &= \lim_{x'\to x}\frac{f(x'; x'; x_0; x_1; \ldots; x_n) - f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{x'-x} = \\ &= \lim_{x'\to x}\frac{f(x'; x'; x_0; x_1; \ldots; x_n) - f(x'; x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{x'-x} + \\ &+ \lim_{x'\to x}\frac{f(x'; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) - f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n)}{x'-x} = \\ &= \lim_{x'\to x}f(x'; x'; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + \lim_{x'\to x}f(x'; x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = \\ &\qquad = 2f(x; x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n). \end{aligned}$$

Таким образом, остаточный член в этом случае примет следующий вид:

$$R=\frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+$$
$$+2\frac{d\omega_n(x)}{dx}f(x;\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)+2\omega_n(x)f(x;\ x;\ x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) \tag{10}$$

или

$$R=\frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}+2\frac{d\omega_n(x)}{dx}\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}+2\omega_n(x)\frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}. \tag{11}$$

Если x принимает одно из значений $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то последний член справа обратится в нуль и остаточный член упростится. Аналогичные рассуждения можно провести и для любого $k\leqslant n$. В общем случае получим:

$$f^{(k)}(x)=k!\,[f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_k)+(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k)f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{k+1})+$$
$$+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_k\alpha_{k+1})\times$$
$$\times f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{k+2})+\ \ldots\ +(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-k}+\ \ldots$$
$$\ldots\ +\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{n-1})f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)]+$$
$$+\frac{d^k}{dx^k}[\omega_n(x)f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)]. \tag{12}$$

Для упрощения остаточных членов нам понадобятся выражения

$$\frac{d^m}{dx^m}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)\qquad (m\leqslant n).$$

Покажем, что

$$\frac{d^m}{dx^m}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)=m!\,f(\underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{m+1\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n). \tag{13}$$

Как это следует из предыдущего, при $m=1$ и 2 эта формула справедлива. Предположим, что она справедлива при $m=r$, и докажем ее справедливость при $m=r+1$. В силу нашего предположения

$$\frac{d^r}{dx^r}f(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)=r!\,f(\underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{r+1\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)$$

и

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)=r!\,\frac{d}{dx}f(\underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{r+1\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n).$$

Воспользуемся опять определением производной

$$\frac{d^{r+1}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)}{dx^{r+1}} =$$

$$= r!\lim_{x'\to x}\frac{f(\underbrace{x';\ x';\ \ldots;\ x'}_{r+1\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) - f(\underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{r+1\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)}{x'-x}$$

Выражение в числителе последней дроби можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{r+1}\{f(\underbrace{x';\ x';\ \ldots;\ x'}_{k\ \text{раз}};\ \underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{r+1-k\ \text{раз}};\ x_0;\ \ldots;\ x_n) -$$

$$- f(\underbrace{x';\ x';\ \ldots;\ x'}_{k-1\ \text{раз}};\ \underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{r+2-k\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)\} =$$

$$= (x'-x)\sum_{k=1}^{r+1} f(\underbrace{x';\ x';\ \ldots;\ x'}_{k\ \text{раз}};\ \underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{r+2-k\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n).$$

Таким образом,

$$\frac{d^{r+1}f(x;\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)}{dx^{r+1}} =$$

$$= r!\lim_{x'\to x}\sum_{k=1}^{r+1} f(\underbrace{x';\ \ldots;\ x'}_{k\ \text{раз}};\ \underbrace{x;\ \ldots;\ x}_{r+2-k\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) =$$

$$= (r+1)!\,f(\underbrace{x;\ x;\ \ldots;\ x}_{r+2\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n),$$

и формула (13) доказана. В силу доказанной формулы остаточный член при численном отыскании производной порядка k может быть представлен в виде

$$R = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{d^i}{dx^i} f(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)\frac{d^{k-i}\omega_n(x)}{dx^{k-i}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!} f(\underbrace{x;\ \ldots;\ x}_{i+1\ \text{раз}};\ x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)\frac{d^{k-i}\omega_n(x)}{dx^{k-i}} \qquad (14)$$

или

$$R = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!\,(n+i+1)!} f^{(n+i+1)}(\xi_i)\,\omega_n^{(k-i)}(x), \qquad (15)$$

где ξ_i — некоторые точки, заключенные в интервале между наибольшим и наименьшим из чисел $x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Если точка x находится вне отрезка, содержащего точки x_0, x_1, ..., x_n, то остаточный член может быть представлен более простым выражением. Для этого рассмотрим многочлен

$$Q(x) = L_n(x) + C\omega_n(x) \qquad (C = \text{const}).$$

Он совпадает с функцией $f(x)$ в точках x_0, x_1, ..., x_n. Подберем постоянную C так, чтобы в точке x', для которой производится оценка, имело место равенство

$$Q^{(k)}(x') = L_n^{(k)}(x') + C\omega_n^{(k)}(x') = f^{(k)}(x').$$

Это возможно, так как все корни уравнения $\omega_n^{(k)}(x) = 0$ лежат в наименьшем отрезке, содержащем x_0, x_1, ..., x_n. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - C\omega_n(x).$$

Эта функция обращается в нуль в точках x_0, x_1, ..., x_n. Следовательно, первая производная ее обращается на наименьшем отрезке, содержащем точки x_0, x_1, ..., x_n, в нуль по крайней мере n раз. Проводя те же рассуждения дальше, получим, что производная порядка k обратится на этом отрезке в нуль по крайней мере $n+1-k$ раз. Но в силу выбора C она обратится в нуль и в точке x', лежащей вне этого отрезка. Таким образом, она обращается в нуль по крайней мере в $n+2-k$ точках. Снова будем последовательно применять теорему Ролля. В конце концов, придем к выводу, что производная порядка $n+1$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке ξ. Но

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - C\omega_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - C(n+1)!$$

Отсюда

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

и

$$f^{(k)}(x') - L_n^{(k)}(x') = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_n^{(k)}(x'). \qquad (16)$$

Получили более простое выражение остаточного члена.

Рассмотрим пример на применение формул численного дифференцирования.

Пример. По таблице

x	10°	14°	16°	20°
$\sin x$	0,173648	0,241922	0,275637	0,342020

используя формулы численного дифференцирования, найти $\cos 15°$ и $\sin 15°$.

Составляем таблицу разделенных разностей:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;\ x_{i+1})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2};\ x_{i+3})$
10°	0,173648			
		17068,50		
14°	0,241922		—35,17	
		16857,50		—0,84
16°	0,275637		—43,62	
		16595,75		
20°	0,342020			

Отсюда получаем, учитывая, что в нашем случае $\alpha_0 = 5$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$:

$$\cos 15° = [f(x_0;\ x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(x_0;\ x_1;\ x_2) + \\ + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)] \frac{180}{\pi} = \\ = [0{,}0170685 - 0{,}000211 + 0{,}00000084] \cdot 57{,}295779 = 0{,}965912.$$

Множитель $\frac{180}{\pi}$ справа появился за счет того, что у нас x взято в градусном измерении. Точное значение с шестью верными знаками $\cos 15° = 0{,}965926$. Используя формулу для второй производной, получим:

$$\sin 15° = -2[f(x_0;\ x_1;\ x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3)] \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 = \\ = 2[0{,}00003517 + 5 \cdot 0{,}00000084]\, 3282{,}8063 = 0{,}257027.$$

Точное значение $\sin 15°$ с шестью знаками равно 0,258819. Расхождения получились довольно значительными. Это и естественно, так как функции могут быть и очень близки друг к другу, но иметь сильно различающиеся производные.

Произведем оценку погрешности. В первом случае остаточный член будет иметь следующий вид:

$$R = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} \omega_3'(x) + \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!} \omega_3(x).$$

При этом

$$\omega_3(x) = (x - 10°)(x - 14°)(x - 16°)(x - 20°)\left(\frac{\pi}{180}\right)^4,$$

$$\omega_3'(x) = [(x - 14°)(x - 16°)(x - 20°) + \\ + (x - 10°)(x - 16°)(x - 20°) + (x - 10°)(x - 14°)(x - 20°) + \\ + (x - 10°)(x - 14°)(x - 16°)]\left(\frac{\pi}{180}\right)^3.$$

При $x = 15°$ получим:

$$\omega_3(15°) = 25\cdot 0{,}000000092, \quad \omega_3'(15°) = 0.$$

Таким образом,

$$|R| < \frac{25}{120}\cdot 0{,}000000092 \approx 0{,}000000019\,.$$

Эта величина значительно меньше фактически полученной погрешности. В данном случае вычислительная погрешность значительно перекрывает погрешность метода.

Во втором случае

$$R = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\omega_3''(x) + 2\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}\omega_3'(x) + 2\frac{f^{(6)}(\xi_3)}{6!}\omega_3(x).$$

При этом

$$\omega_3''(15°) = \left(\frac{\pi}{180}\right)^2[-52] \approx -0{,}0003\cdot 52 = -0{,}00156.$$

Таким образом,

$$|R| < \frac{0{,}00156}{24} + \frac{2\cdot 25\cdot 0{,}000000092}{720} \approx 0{,}000065.$$

И в этом случае вычислительная погрешность очень велика.

2. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих узлов. Если узлы интерполирования расположены через равные промежутки, то удобнее использовать соответствующие интерполяционные формулы. Так, например, взяв интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования вперед

$$f(x) = f(x_0 + th) = f_0 + tf^1_{\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!}f^2_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}f^3_{\frac{3}{2}} + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}f^4_2 + \ldots, \qquad (17)$$

в результате последовательного дифференцирования получим:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\left[f^1_{\frac{1}{2}} + \frac{2t-1}{2!}f^2_1 + \frac{3t^2-6t+2}{3!}f^3_{\frac{3}{2}} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}f^4_2 + \ldots\right], \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\left[f^2_1 + \frac{6t-6}{3!}f^3_{\frac{3}{2}} + \frac{12t^2-36t+22}{4!}f^4_2 + \ldots\right], \\ f'''(x) &= \frac{1}{h^3}\left[f^3_{\frac{3}{2}} + \frac{24t-36}{4!}f^4_2 + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

В частности, при $x = x_0$ будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h}\left[f^1_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} f^2_1 + \frac{1}{3} f^3_{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} f^4_2 + \ldots\right], \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2}\left[f^2_1 - f^3_{\frac{3}{2}} + \frac{11}{12} f^4_2 - \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Если использовать значок Δ для разностей, то последние формулы будут иметь следующий, легко запоминающийся операторно-символический вид:

$$\left(h\frac{d}{dx}\right)^n f(x_0) = \{\ln(1+\Delta)\}^n f(x_0). \qquad (20)$$

Здесь предполагается, что формальное разложение $\ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots$, доведенное до постоянных разностей, формально возводится в степень как многочлен. Дадим операторный вывод этой формулы. Если оператор $\frac{d}{dx}$ обозначить буквой D, то формула Тейлора

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

может быть записана так:

$$f(x_0 + h) = \left(1 + hD + \frac{h^2}{2!} D^2 + \ldots\right) f(x_0)$$

или

$$(1 + \Delta) f(x_0) = e^{hD} f(x_0).$$

Отсюда

$$1 + \Delta = e^{hD}.$$

Беря логарифмы от обеих частей равенства, получим:

$$D = \frac{1}{h}\ln(1+\Delta)$$

или

$$D^n = \frac{1}{h^n}\{\ln(1+\Delta)\}^n.$$

Получили как раз то выражение, которое было дано выше.

Проверим наши формулы на примере многочлена, для которого они должны давать точные значения производных.

Пример. Найти методом численного дифференцирования производные первых трех порядков для многочлена $x^3 - 2x - 5$ в точке $x = 1$.

Составляем таблицу разностей:

x	f	f^1	f^2	f^3
1	-6			
		5		
2	-1		12	
		17		6
3	16		18	
		35		6
4	51		24	
		59		
5	110			

По нашим формулам получаем:

$$h\,\frac{df}{dx}=\Delta f-\frac{\Delta^2 f}{2}+\frac{\Delta^3 f}{3},\qquad h=1,\quad f'(1)=5-6+2=1,$$

$$h^2\frac{d^2 f}{dx^2}=\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}\right)^2 f=\Delta^2 f-\Delta^3 f,\quad f''(1)=12-6=6,$$

$$h^3\frac{d^3 f}{dx^3}=\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}\right)^3 f=\Delta^3 f,\quad f'''(1)=6.$$

Если использовать другие формулы интерполирования, то можно получить другие формулы численного дифференцирования. Возьмем, например, формулу Стирлинга

$$f(x)=f(x_0+ht)=f_0+tf_0^1+\frac{t^2}{2!}f_0^2+\\+\frac{t(t^2-1)}{3!}f_0^3+\frac{t^2(t^2-1)}{4!}f_0^4+\ \ldots \tag{21}$$

Последовательные производные будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} hf'(x)&=f_0^1+tf_0^2+\frac{3t^2-1}{3!}f_0^3+\frac{4t^3-2t}{4!}f_0^4+\ \ldots,\\ h^2f''(x)&=f_0^2+tf_0^3+\frac{12t^2-2}{4!}f_0^4+\ \ldots,\\ h^3f'''(x)&=f_0^3+tf_0^4+\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

В частности, при $x=x_0$

$$\left.\begin{aligned} hf'(x_0)&=f_0^1-\frac{1}{3!}f_0^3+\frac{(2!)^2}{5!}f_0^5-\ \ldots,\\ h^2f''(x_0)&=f_0^2-\frac{2}{4!}f_0^4+\ \ldots,\\ h^3f'''(x_0)&=f_0^3-\frac{3!\,(1^2+2^2)}{5!}f_0^5+\ \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если взять формулу Бесселя

$$f(x)=f_{\frac{1}{2}}+\left(t-\frac{1}{2}\right)f^1_{\frac{1}{2}}+\frac{t(t-1)}{2!}f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{t(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{3!}f^3_{\frac{1}{2}}+\\+\frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\tag{24}$$

то получится:

$$\left.\begin{aligned}hf'(x)&=f^1_{\frac{1}{2}}+\frac{2t-1}{2}f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{3!}f^3_{\frac{1}{2}}+\\&\quad+\frac{4t^3-6t^2-2t+2}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\h^2f''(x)&=f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{6t-3}{3!}f^3_{\frac{1}{2}}+\frac{12t^2-12t-2}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\h^3f'''(x)&=f^3_{\frac{1}{2}}+\frac{24t-12}{4!}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

и при $x=x_0$

$$\left.\begin{aligned}hf'(x_0)&=f^1_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f^2_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{12}f^3_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{12}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\h^2f''(x_0)&=f^2_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f^3_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{12}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots,\\h^3f'''(x_0)&=f^3_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}f^4_{\frac{1}{2}}+\ldots\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Мы уже получили выражение оператора дифференцирования D через операторы Δ, Δ^2, Δ^3, ... Найдем теперь выражение этого оператора через другие разностные операторы. Так как

$$1+\Delta=\frac{1}{1-\nabla},$$

то

$$hD=-\ln(1-\nabla)=\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\ldots$$

Далее,

$$\delta=e^{\frac{hD}{2}}-e^{-\frac{hD}{2}}=2\operatorname{sh}\left(\frac{hD}{2}\right),$$

$$\mu=\frac{e^{\frac{hD}{2}}+e^{-\frac{hD}{2}}}{2}=\operatorname{ch}\left(\frac{hD}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{d\delta}{d(hD)}=\mu=\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$hD=\int_0^\delta\left(1+\frac{z^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}dz=\delta-\frac{1}{3!}\frac{\delta^3}{2^2}-\frac{1^2-3^2}{5!}\frac{\delta^5}{2^4}-\ldots$$

Неудобство этой формулы состоит в том, что производная в точке x выражается через значения f в точках $x\pm k\frac{h}{2}$. Чтобы получить выражение производной через значения функции в точках $x\pm kh$, заметим, что $\frac{hD}{\mu}=v$ формально удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right)\frac{dv}{d\delta}+\frac{\delta}{4}v=1.$$

Так как v — нечетная функция δ, то можно пытаться искать решение этого дифференциального уравнения в виде

$$v=a_1\delta+a_3\delta^3+a_5\delta^5+\ldots$$

Подстановкой в уравнение найдем:

$$v=\delta-\frac{1}{3!}\delta^3+\frac{(2!)^2}{5!}\delta^5-\frac{(3!)^2}{7!}\delta^7+\ldots$$

Далее,

$$\frac{d\left[(hD)^2\right]}{d\delta}=2hD\frac{d(hD)}{d\delta}=2hD\mu.$$

Отсюда

$$h^2D^2=2\int_0^\delta\left[z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{(2!)^2}{5!}z^5-\ldots\right]dz=$$

$$=2\left[\frac{1}{2!}\delta^2-\frac{1}{4!}\delta^4+\frac{(2!)^2}{6!}\delta^6-\frac{(3!)^2}{8!}\delta^8+\ldots\right].$$

По индукции показывается, что

$$\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right)\frac{d\left[h^{2k+1}D^{2k+1}/\mu\right]}{d\delta}+\frac{\delta}{4}\frac{h^{2k+1}D^{2k+1}}{\mu}=(2k+1)h^{2k}D^{2k}$$

$$\frac{d\left[h^{2k}D^{2k}\right]}{d\delta}=2k\frac{h^{2k-1}D^{2k-1}}{\mu}.$$

Таким образом, можно последовательно найти h^3D^3, h^4D^4, ...

3. Безразностные формулы численного дифференцирования. В некоторых случаях выгоднее выражать формулы численного дифференцирования не через разности, а непосредственно через значения функции. Для получения таких формул удобно воспользоваться вариантом формулы Лагранжа для случая равных промежутков, приведенным в предыдущей главе:

$$f(x)=\frac{(-1)^n t(t-1)\ldots(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i C_n^i y_i}{t-i}+$$
$$+h^{n+1}t(t-1)\ldots(t-n)f(x;x_0;\ldots;x_n). \qquad (27)$$

Дифференцируя один раз, получим:

$$hf'(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d}{dt}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right]+$$
$$+h^{n+1}f(x;x_0;x_1;\ldots;x_n)\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)]+$$
$$+h^{n+2}f(x;x;x_0;x_1;\ldots;x_n)t(t-1)\ldots(t-n). \qquad (28)$$

В частности, при $x=x_k$ будем иметь:

$$hf'(x_k)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d}{dt}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right]_{t=k}+$$
$$+\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)]_{t=k}. \qquad (29)$$

Для второй производной будем иметь:

$$h^2f''(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right]+$$
$$+h^{n+1}f(x;x_0;\ldots;x_n)\frac{d^2}{dt^2}[t(t-1)\ldots(t-n)]+$$
$$+2h^{n+2}f(x;x;x_0;\ldots;x_n)\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)]+$$
$$+2h^{n+3}f(x;x;x;x_0;\ldots;x_n)t(t-1)\ldots(t-n) \qquad (30)$$

и при $x=x_k$

$$h^2f''(x_k)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{C_n^i y_i}{n!}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i}\right]_{t=k}+$$
$$+h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\frac{d^2}{dt^2}[t(t-1)\ldots(t-n)]_{t=k}+$$
$$+2h^{n+2}\frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!}\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)]_{t=k}. \qquad (31)$$

Выпишем готовые выражения для производных первого и второго порядка при различных значениях n.

$n=2$ (три точки):

$$y'_0=\frac{1}{2h}[-3y_0+4y_1-y_2]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi);$$

$$y'_1=\frac{1}{2h}[y_2-y_0]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi);$$

$$y'_2=\frac{1}{2h}[y_0-4y_1+3y_2]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

$n=3$ (четыре точки):

$$y'_0=\frac{1}{6h}[-11y_0+18y_1-9y_2+2y_3]-\frac{h^3}{4}f^{(IV)}(\xi);$$

$$y'_1=\frac{1}{6h}[-2y_0-3y_1+6y_2-y_3]+\frac{h^3}{12}f^{(IV)}(\xi);$$

$$y'_2=\frac{1}{6h}[y_0-6y_1+3y_2+2y_3]-\frac{h^3}{12}f^{(IV)}(\xi);$$

$$y'_3=\frac{1}{6h}[-2y_0+9y_1-18y_2+11y_3]+\frac{h^3}{4}f^{(IV)}(\xi).$$

$n=4$ (пять точек):

$$y'_0=\frac{1}{12h}[-25y_0+48y_1-36y_2+16y_3-3y_4]+\frac{h^4}{5}f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_1=\frac{1}{12h}[-3y_0-10y_1+18y_2-6y_3+y_4]-\frac{h^4}{20}f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_2=\frac{1}{12h}[y_0-8y_1+8y_3-y_4]+\frac{h^4}{30}f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_3=\frac{1}{12h}[-y_0+6y_1-18y_2+10y_3+3y_4]+\frac{h^4}{20}f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_4=\frac{1}{12h}[3y_0-16y_1+36y_2-48y_3+25y_4]+\frac{h^4}{5}f^{(V)}(\xi).$$

$n=5$ (шесть точек):

$$y'_0=\frac{1}{60h}[-137y_0+300y_1-300y_2+200y_3-75y_4+12y_5]-\frac{h^5}{6}f^{(VI)}(\xi);$$

$$y'_1=\frac{1}{60h}[-12y_0-65y_1+120y_2-60y_3+20y_4-3y_5]+\frac{h^5}{30}f^{(VI)}(\xi);$$

$$y'_2=\frac{1}{60h}[3y_0-30y_1-20y_2+60y_3-15y_4+2y_5]-\frac{h^5}{60}f^{(VI)}(\xi);$$

$$y'_3=\frac{1}{60h}[-2y_0+15y_1-60y_2+20y_3+30y_4-3y_5]+\frac{h^5}{60}f^{(VI)}(\xi);$$

$$y'_4=\frac{1}{60h}[3y_0-20y_1+60y_2-120y_3+65y_4+12y_5]-\frac{h^5}{30}f^{(VI)}(\xi);$$

$$y'_5=\frac{1}{60h}[-12y_0+75y_1-200y_2+300y_3-300y_4+137y_5]+\frac{h^5}{6}f^{(VI)}(\xi).$$

$n=6$ (семь точек):

$$y'_0=\frac{1}{60h}[-147y_0+360y_1-450y_2+ \\ +400y_3-225y_4+72y_5-10y_6]+\frac{h^6}{7}f^{(\mathrm{VII})}(\xi);$$

$$y'_1=\frac{1}{60h}[-10y_0-77y_1+150y_2-100y_3+ \\ +50y_4-15y_5+2y_6]-\frac{h^6}{42}f^{(\mathrm{VII})}(\xi);$$

$$y'_2=\frac{1}{60h}[2y_0-24y_1-35y_2+80y_3-30y_4+8y_5-y_6]+\frac{h^6}{105}f^{(\mathrm{VII})}(\xi);$$

$$y'_3=\frac{1}{60h}[-y_0+9y_1-45y_2+45y_4-9y_5+y_6]-\frac{h^6}{140}f^{(\mathrm{VII})}(\xi);$$

$$y'_4=\frac{1}{60h}[y_0-8y_1+30y_2-80y_3+ \\ +35y_4+24y_5-2y_6]+\frac{h^6}{105}f^{(\mathrm{VII})}(\xi);$$

$$y'_5=\frac{1}{60h}[-2y_0+15y_1-50y_2+ \\ +100y_3-150y_4+77y_5+10y_6]-\frac{h^6}{42}f^{(\mathrm{VII})}(\xi);$$

$$y'_6=\frac{1}{60h}[10y_0-72y_1+225y_2-400y_3+ \\ +450y_4-360y_5+147y_6]+\frac{h^6}{7}f^{(\mathrm{VII})}(\xi).$$

Сравнивая различные формулы, мы видим, что наиболее простые выражения получаются при четных n в средних точках. При этом и коэффициенты при производных в остаточных членах получаются самыми маленькими. Поэтому на практике, по возможности, следует применять эти формулы.

Приведем соответствующие выражения для вторых производных.

$n=2$ (три точки):

$$y''_0=\frac{1}{h^2}[y_0-2y_1+y_2]-hf'''(\xi_1)+\frac{h^2}{6}f^{(\mathrm{IV})}(\xi_2);$$

$$y''_1=\frac{1}{h^2}[y_0-2y_1+y_2]-\frac{h^2}{12}f^{(\mathrm{IV})}(\xi);$$

$$y''_2=\frac{1}{h^2}[y_0-2y_1+y_2]+hf'''(\xi_1)-\frac{h^2}{6}f^{(\mathrm{IV})}(\xi_2).$$

$n=3$ (четыре точки):

$$y''_0=\frac{1}{6h^2}[12y_0-30y_1+24y_2-6y_3]+\frac{11}{12}h^2f^{(\mathrm{IV})}(\xi_1)-\frac{h^3}{10}f^{(\mathrm{V})}(\xi_2);$$

$$y''_1=\frac{1}{6h^2}[6y_0-12y_1+6y_2]-\frac{1}{12}h^2f^{(\mathrm{IV})}(\xi_1)-\frac{h^3}{30}f^{(\mathrm{V})}(\xi_2);$$

$$y''_2=\frac{1}{6h^2}[6y_1-12y_2+6y_3]-\frac{1}{12}h^2f^{(\mathrm{IV})}(\xi_1)-\frac{h^3}{30}f^{(\mathrm{V})}(\xi_2);$$

$$y''_3=\frac{1}{6h^2}[-6y_0+24y_1-30y_2+12y_3]+\frac{11}{12}h^2f^{(\mathrm{IV})}(\xi_1)-\frac{h^3}{10}f^{(\mathrm{V})}(\xi_2).$$

$n=4$ (пять точек):

$$y_0''=\frac{1}{24h^2}[70y_0-208y_1+228y_2-112y_3+22y_4]-\\ -\frac{5}{6}h^3f^{(V)}(\xi_1)+\frac{h^4}{15}f^{(VI)}(\xi_2);$$

$$y_1''=\frac{1}{24h^2}[22y_0-40y_1+12y_2+8y_3-2y_4]+\\ +\frac{1}{12}h^3f^{(V)}(\xi_1)-\frac{h^4}{60}f^{(VI)}(\xi_2);$$

$$y_2''=\frac{1}{24h^2}[-2y_0+32y_1-60y_2+32y_3-2y_4]+\frac{h^4}{90}f^{(VI)}(\xi_1);$$

$$y_3''=\frac{1}{24h^2}[-2y_0+8y_1+12y_2-40y_3+22y_4]-\\ -\frac{1}{12}h^3f^{(V)}(\xi_1)+\frac{h^4}{60}f^{(VI)}(\xi_2);$$

$$y_4''=\frac{1}{24h^2}[22y_0-112y_1+228y_2-208y_3+70y_4]+\\ +\frac{5}{6}h^3f^{(V)}(\xi_1)-\frac{h^4}{15}f^{(VI)}(\xi_2).$$

И в этом случае наиболее выгодные формулы получаются для четных n и для средних точек.

4. Метод неопределенных коэффициентов. Можно получить аналогичные формулы и для произвольного расположения узлов. При этом, чтобы не вычислять громоздкие выражения многочлена Лагранжа, удобнее использовать *метод неопределенных коэффициентов*. Для этого записываем искомую формулу в виде

$$y^{(k)}(x_i)=\sum_{i=0}^{n} c_i y_i+R(f)$$

и подбираем коэффициенты c_i из условия $R(f)=0$, когда $f=1, x, x^2, \ldots, x^n$. Получится следующая система для определения коэффициентов c_i:

$$\begin{gathered}
c_0+c_1+\ldots+c_n=0,\\
c_0x_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_0x_0^{k-1}+c_1x_1^{k-1}+\ldots+c_nx_n^{k-1}=0,\\
c_0x_0^{k}+c_1x_1^{k}+\ldots+c_nx_n^{k}=k!,\\
c_0x_0^{k+1}+c_1x_1^{k+1}+\ldots+c_nx_n^{k+1}=(k+1)!\,x_i,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_0x_0^{n}+c_1x_1^{n}+\ldots+c_nx_n^{n}=n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x_i^{n-k}.
\end{gathered}$$

5. Выражение разностей через производные. Иногда возникает необходимость получить выражения разностей через производные. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) - \lambda \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где λ — некоторая постоянная. Очевидно,

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0.$$

При $m \leqslant n$ по формуле Маклорена будем иметь:

$$\varphi^{(m)}(x) = \frac{x^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \varphi^{(n+1)}(\xi).$$

С другой стороны, из определения $\varphi(x)$ следует:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \lambda.$$

Итак,

$$\varphi^{(m)}(x) = \frac{x^{n-m+1}}{(n-m+1)!} [f^{(n+1)}(\xi) - \lambda].$$

Рассмотрим разделенную разность $\varphi(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_m)$ (рассмотренный уже случай $x_0 = x_1 = \ldots = x_m = 0$ исключается). Тогда

$$\varphi(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_m) = f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_m) - \\ - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^k}{\omega'_m(x_l)} \right] - \frac{\lambda}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^{n+1}}{\omega'_m(x_l)}.$$

В силу свойств разделенных разностей

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^{n+1}}{\omega'_m(x_l)} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} [x^{n+1}] \Bigg|_{x=\xi} = C_{n+1}^m \xi^{n-m+1},$$

где ξ находится между наибольшим и наименьшим из чисел x_i. Если все x_i положительны или отрицательны, то $\xi \neq 0$ и можно так подобрать λ, что $\varphi(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) = 0$. Отсюда находим $\lambda = f^{(n+1)}(\eta)$. Следовательно,

$$f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_m) = \sum_{k=m}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^k}{\omega'_m(x_l)} \right] + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{m} \frac{x_l^{n+1}}{\omega'_m(x_l)}. \qquad (32)$$

Положив $x_0 = a,\ x_i = x_{i-1} + h$, получим:

$$\Delta^m f(a) = \sum_{k=m}^{n} f^{(k)}(0) \frac{\Delta^m a^k}{k!} + f^{(n+1)}(\xi) \frac{\Delta^{m+1} a^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (33)$$

Полагая $a=0$, $\psi(x)=f(0+x)$, получим *формулу Маркова:*

$$\Delta^m\psi(x)=\sum_{k=m}^{n}\psi^{(k)}(x)\frac{\Delta^m 0^k}{k!}+\psi^{n+1}(\xi)\frac{\Delta^{m+1}0^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{34}$$

Здесь $\Delta^m 0^k$ — так называемые *разности нуля*. Они являются конечными разностями x^k при $x=0$. Приведем таблицу значений этих разностей:

k	$\Delta 0^k$	$\Delta^2 0^k$	$\Delta^3 0^k$	$\Delta^4 0^k$	$\Delta^5 0^k$	$\Delta^6 0^k$	$\Delta^7 0^k$	$\Delta^8 0^k$
1	1							
2	1	2						
3	1	6	6					
4	1	14	36	24				
5	1	30	150	240	120			
6	1	62	540	1 560	1 800	720		
7	1	126	1 806	8 400	16 800	15 120	15 040	
8	1	254	5 796	40 824	126 000	191 520	141 120	40 320

В инженерной практике иногда прибегают к графическому дифференцированию. Этот способ вряд ли может быть рекомендован,

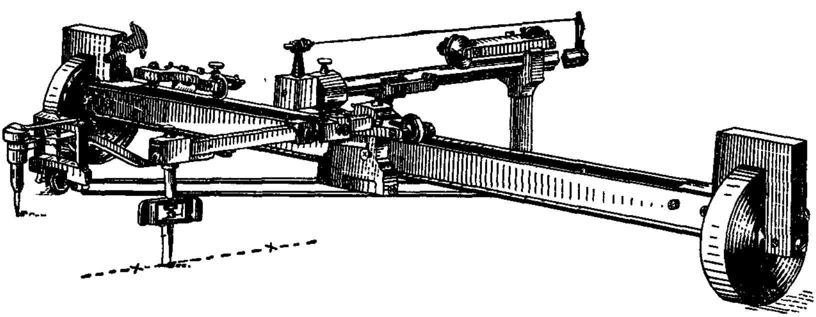

Рис. 24. Интеграф Коради.

так как точность при этом получается незначительная, а объем работы не меньше, чем по приведенным нами формулам. Используются также различные моделирующие приборы. Наиболее точными из них являются интеграфы. На рис. 24 приведен интеграф Коради, использующийся в Советском Союзе.