В ряде случаев удается еще уменьшить число операций. Один из таких случаев упоминался выше: дана вещественная функция $f(t) = g(\cos t)$, известная в точках $t_l = \pi(2l-1)/(2N)$; требуется найти коэффициенты интерполяционного многочлена

$$\sum_{j=0}^{N-1} A_j \cos jt.$$

Другой случай: при четном N заданы значения функции

$$\sum_{j=1}^{N/2-1} A_j \sin 2\pi jt$$

в точках $t = l/N,\ 0 < l < N/2$; нужно определить коэффициенты A_j.

Задача 1. Найти коэффициенты c_j произведения двух многочленов

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{N-1} b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{2N-2} c_j x^j.$$

Показать, что для их нахождения достаточно $O(N \log_2 N)$ операций.

§ 5. Наилучшее равномерное приближение

Если норма в линейном нормированном пространстве определяется не через скалярное произведение, то нахождение элемента наилучшего приближения существенно усложняется. Рассмотрим типичную задачу, встречающуюся, в частности, при составлении стандартных программ вычисления функций.

Пусть R — пространство ограниченных вещественных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ вещественной оси, с нормой

$$\|f\| = \sup_{[a,b]} |f(x)|.$$

Ищется наилучшее приближение вида

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

Согласно теореме из §1 существует элемент наилучшего приближения, т. е. многочлен $Q_n^0(x)$ такой, что

$$E_n(f) = \|f - Q_n^0\| \leqslant \|f - Q_n\|$$

при любом многочлене $Q_n(x)$ степени n. Такой многочлен $Q_n^0(x)$ называют *многочленом наилучшего равномерного приближения.* Далее будут установлены необходимые и достаточные условия того, чтобы многочлен являлся многочленом наилучшего равномерного приближения для непрерывной функции.

Теорема Валле-Пуссена. *Пусть существуют $n+2$ точки $x_0 < \cdots < x_{n+1}$ отрезка $[a,\, b]$ такие, что*

$$\operatorname{sign}\bigl(f(x_i) - Q_n(x_i)\bigr)\,(-1)^i = \text{const},$$

т. е. при переходе от точки x_i к точке x_{i+1} величина $f(x) - Q_n(x)$ меняет знак. Тогда

$$E_n(f) \geqslant \mu = \min_{i=0,\ldots,\,n+1} \Bigl| f(x_i) - Q_n(x_i) \Bigr|. \tag{1}$$

Доказательство. В случае $\mu = 0$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $\mu > 0$. Предположим противное, т. е. что для многочлена наилучшего приближения $Q_n^0(x)$

$$\|Q_n^0 - f\| = E_n(f) < \mu.$$

Имеем

$$\operatorname{sign}\Bigl(Q_n(x) - Q_n^0(x)\Bigr) = \operatorname{sign}\Bigl((Q_n(x) - f(x)) - (Q_n^0(x) - f(x))\Bigr).$$

В точках x_i первое слагаемое превосходит по модулю второе, поэтому $\operatorname{sign}\Bigl(Q_n(x_i) - Q_n^0(x_i)\Bigr) = \operatorname{sign}\Bigl(Q_n(x_i) - f(x_i)\Bigr)$. Следовательно, многочлен $Q_n(x) - Q_n^0(x)$ степени n меняет знак $n+1$ раз. Получили противоречие.

Теорема Чебышева. *Чтобы многочлен $Q_n(x)$ был многочленом наилучшего равномерного приближения непрерывной функции $f(x)$, необходимо и достаточно существования на $[a,\, b]$ по крайней мере $n+2$ точек $x_0 < \cdots < x_{n+1}$ таких, что*

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha(-1)^i\, \|f - Q_n\|,$$

где $i = 0, \ldots, n+1$, $\alpha = 1$ (или $\alpha = -1$) одновременно для всех i.

Точки $x_0, \ldots, x_{n+1}$, удовлетворяющие условиям теоремы, принято называть *точками чебышевского альтернанса.*

Доказательство. Достаточность. Обозначим через L величину $\|f - Q_n\|$. Применяя (1), имеем $L = \mu \leqslant E_n(f)$, но $E_n(f) \leqslant \|f - Q_n\| = L$ вследствие определения величины $E_n(f)$. Следовательно, $E_n(f) = L$ и данный многочлен является многочленом наилучшего равномерного приближения.

Необходимость. Пусть данный многочлен $Q_n(x)$ является многочленом наилучшего равномерного приближения. Обозначим через y_1 нижнюю грань точек $x \in [a,\, b]$, в которых $|f(x) - Q_n(x)| = L$; из определения L следует существование такой точки. Вследствие непрерывности $f(x) - Q_n(x)$ имеем $|f(y_1) - Q_n(y_1)| = L$. Для определенности далее рассматриваем случай, когда $f(y_1) - Q_n(y_1) = +L$. Обозначим через y_2 нижнюю грань всех точек $x \in (y_1,\, b]$, в которых $f(x) - Q_n(x) = -L$, последовательно через y_{k+1} обозначим нижнюю грань точек $x \in (y_k,\, b]$, в которых $f(x)-Q_n(x)=(-1)^k L, \ldots$ Вследствие непрерывности $f(x)-Q_n(x)$ при всех k имеем $f(y_{k+1})-Q_n(y_{k+1})=(-1)^k L$. Продолжаем этот процесс до значения $y_m=b$ или y_m такого, что $|f(x)-Q_n(x)|<L$ при $y_m<x\leqslant b$. Если $m\geqslant n+2$, то утверждение теоремы выполнено.

Предположим, что оказалось $m<n+2$. Вследствие непрерывности $f(x)-Q_n(x)$, при любом k $(1<k\leqslant m)$ можно указать точку z_{k-1} такую, что $|f(x)-Q_n(x)|<L$ при $z_{k-1}\leqslant x<y_k$; положим $z_0=a$, $z_m=b$. Согласно проведенным выше построениям, на отрезках $[z_{i-1}, z_i]$, $i=1,\ldots,m$, имеются точки, в частности точки y_i, где $f(x)-Q_n(x)=(-1)^{i-1}L$, и нет точек, где $f(x)-Q_n(x)=(-1)^i L$. Положим

$$v(x)=\prod_{j=1}^{m-1}(z_j-x), \quad Q_n^d(x)=Q_n(x)+dv(x), \quad d>0$$

и рассмотрим поведение разности

$$f(x)-Q_n^d(x)=f(x)-Q_n(x)-dv(x)$$

на отрезках $[z_{j-1}, z_j]$. Для примера обратимся к отрезку $[z_0, z_1]$. На $[z_0, z_1)$ имеем $v(x)>0$, поэтому

$$f(x)-Q_n^d(x)\leqslant L-dv(x)<L.$$

Кроме того, на этом отрезке выполняется неравенство $f(x)-Q_n(x)>-L$; поэтому при достаточно малых d, например при

$$d<d_1=\frac{\min\limits_{[z_0,\, z_1]}|f(x)-Q_n(x)+L|}{\max\limits_{[z_0,\, z_1]}|v(x)|}$$

на $[z_0, z_1)$ имеем $f(x)-Q_n(x)>-L$. В то же время

$$|f(z_1)-Q_n^d(z_1)|=|f(z_1)-Q_n(z_1)|<L.$$

Таким образом, $|f(x)-Q_n^d(x)|<L$ на этом отрезке при достаточно малом d. После проведения аналогичных рассуждений относительно остальных отрезков $[z_{i-1}, z_i]$ мы сможем указать малое d_0 такое, что на всех отрезках выполняется неравенство $|f(x)-Q_n^{d_0}(x)|<L$. Мы получили противоречие с предположением, что $Q_n(x)$ — многочлен наилучшего приближения, а $m<n+2$. Теорема доказана.

Теорема единственности. *Многочлен наилучшего равномерного приближения непрерывной функции единствен.*

Доказательство. Предположим, что существуют два многочлена степени n наилучшего равномерного приближения:

$$Q_n^1(x)\neq Q_n^2(x), \quad \|f-Q_n^1\|=\|f-Q_n^2\|=E_n(f).$$

Отсюда следует, что
$$\left\| f - \frac{Q_n^1 + Q_n^2}{2} \right\| \leqslant \left\| \frac{f - Q_n^1}{2} \right\| + \left\| \frac{f - Q_n^2}{2} \right\| = E_n(f),$$
т. е. многочлен $\frac{1}{2}[Q_n^1(x) + Q_n^2(x)]$ также является многочленом наилучшего равномерного приближения. Пусть $x_0, \ldots, x_{n+1}$ — соответствующие этому многочлену точки чебышевского альтернанса; тогда
$$\left| \frac{1}{2}\left[Q_n^1(x_i) + Q_n^2(x_i)\right] - f(x_i) \right| = E_n(f), \quad i = 0, \ldots, n+1,$$
или
$$|(Q_n^1(x_i) - f(x_i)) + (Q_n^2(x_i) - f(x_i))| = 2E_n(f).$$
Так как $|Q_n^k(x_i) - f(x_i)| \leqslant E_n(f)$, $k = 1{,}2$, то последнее соотношение возможно лишь в том случае, когда
$$Q_n^1(x_i) - f(x_i) = Q_n^2(x_i) - f(x_i).$$
Мы получили, что два различных многочлена $Q_n^1(x)$ и $Q_n^2(x)$ степени n совпадают в точках $x_0, \ldots, x_{n+1}$, т. е. пришли к противоречию.

Задача 1. Функция $f(x) = \sin 100x$ приближается на отрезке $[0, \pi]$. Найти $Q_{90}(x)$.

§ 6. Примеры наилучшего равномерного приближения

1. Непрерывная на $[a, b]$ функция приближается многочленом нулевой степени. Пусть
$$\sup_{[a,b]} f(x) = f(x_1) = M, \quad \inf_{[a,b]} f(x) = f(x_2) = m.$$
Многочлен $Q_0(x) = (M+m)/2$ является многочленом наилучшего приближения, а x_1, x_2 — точками чебышевского альтернанса.

Задача 1. Доказать, что наилучшее приближение нулевой степени имеет вид $Q_0(x) = (M+m)/2$, если $f(x)$ не обязательно непрерывна.

2. Непрерывная, строго выпуклая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ приближается многочленом первой степени $Q_1(x) = a_0 + a_1 x$. Вследствие строгой выпуклости $f(x)$ разность $f(x) - (a_0 + a_1 x)$ может иметь на интервале (a, b) только одну точку экстремума, поэтому точки a, b являются точками чебышевского альтернанса. Пусть d — третья точка чебышевского альтернанса. Согласно теореме Чебышева, имеем равенства
$$f(a) - (a_0 + a_1 a) = \alpha L,$$
$$f(d) - (a_0 + a_1 d) = -\alpha L,$$
$$f(b) - (a_0 + a_1 b) = \alpha L.$$

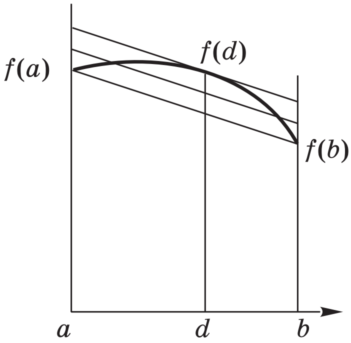

Рис. 4.6.1

Вычитая первое уравнение из третьего, получим $f(b) - f(a) = a_1(b - a)$. Отсюда находим $a_1 = (f(b) - f(a))/(b - a)$. Для определения неизвестных d, L, a_0, a_1 и $\alpha = +1$ или $\alpha = -1$ получено всего три уравнения. Однако следует вспомнить, что точка d является точкой экстремума разности $f(x) - (a_0 + a_1 x)$. Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то для определения d имеем уравнение $f'(d) - a_1 = 0$. Теперь определяем a_0, например из уравнения, получающегося сложением первого и второго уравнений.

Геометрически эта процедура выглядит следующим образом (рис. 4.6.1). Проводим секущую через точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Для нее тангенс угла наклона равен a_1. Проводим параллельную ей касательную к кривой $y = f(x)$, а потом прямую, равноудаленную от секущей и касательной.

Задача 2. Построить пример функции и соответствующего многочлена первой степени наилучшего равномерного приближения на $[a, b]$ так, чтобы среди точек чебышевского альтернанса не было точек a и b.

Задача 3. Построить пример функции (естественно, не непрерывной), для которой многочлен наилучшего равномерного приближения не удовлетворяет условиям теоремы Чебышева.

Задача 4. Пусть $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 5]$. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения первой степени.

3. Функция $f(x)$, у которой производная f^{n+1} знакопостоянна на $[a, b]$, приближается на $[a, b]$ многочленом наилучшего равномерного приближения степени n; требуется оценить величину $E_n(f)$. В § 9 гл. 2 мы имели оценку погрешности интерполяции по узлам, являющимся нулями многочлена Чебышева:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2(n+1)}\right),$$

а именно,

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \left(\max_{[a,\,b]} |f^{(n+1)}(x)|\right) \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \tag{1}$$

Отсюда следует неравенство

$$E_n(f) \leqslant \left(\max_{[a,\,b]} |f^{(n+1)}(x)|\right) \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}.$$

Пусть $Q_n(x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения. Поскольку вследствие теоремы Чебышева разность $f(x) - Q_n(x)$ меняет знак при переходе от одной точки чебышевского альтернанса к другой, то она обращается в нуль в $(n+1)$-й точке $y_1, \ldots, y_{n+1}$. Поэтому многочлен $Q_n(x)$ можно рассматривать как интерполяционный с узлами интерполяции $y_1, \ldots, \ y_{n+1}$. Согласно (2.3.1) имеем представление для погрешности интерполирования следующего вида:

$$f(x) - Q_n(x) = f^{(n+1)}(\zeta)\,\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!},$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - y_1)\ldots(x - y_{n+1})$, $\zeta = \zeta(x) \in [a,\, b]$. Пусть

$$\max_{[a,\,b]} |\omega_{n+1}(x)| = |\omega_{n+1}(x_0)|.$$

Имеем

$$E_n(f) = \|f(x) - Q_n(x)\| \geqslant \Big| f(x_0) - Q_n(x_0) \Big| =$$

$$= \Big| f^{(n+1)}(\zeta(x_0)) \Big| \, \frac{|\omega_{n+1}(x_0)|}{(n+1)!} \geqslant \Big(\min_{[a,\,b]} |f^{(n+1)}(x)| \Big) \left(\max_{[a,\,b]} \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!} \right).$$

Согласно (2.8.6) выполняется неравенство

$$\max_{[a,\,b]} |\omega_{n+1}(x)| \geqslant (b-a)^{n+1}/2^{2n+1}.$$

Отсюда следует оценка

$$E_n(f) \geqslant \Big(\min_{[a,\,b]} |f^{(n+1)}(x)| \Big) \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \tag{2}$$

Таким образом, если $f^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак и меняется не очень сильно, то разность между погрешностью многочлена наилучшего равномерного приближения и интерполяционного многочлена по нулям многочленов Чебышева несущественна.

Задача 5. Доказать, что в случае, когда $f^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a,\, b]$, чебышевский альтернанс содержит точки a и b.

4. Рассмотрим задачу нахождения многочлена наилучшего приближения степени n в случае, когда

$$f(x) = P_{n+1}(x) = a_0 + \cdots + a_{n+1}x^{n+1}, \quad a_{n+1} \neq 0.$$

Тогда $f^{(n+1)}(x) = a_{n+1}(n+1)!$ и оценки сверху (1) и снизу (2) для $E_n(f)$ совпадают:

$$E_n(f) = |a_{n+1}|(b-a)^{n+1}2^{-2n-1}.$$

Таким образом, многочленом наилучшего приближения оказывается интерполяционный многочлен $Q_n(x)$ с узлами интерполяции

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}\right), \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

Можно получить другое представление этого многочлена наилучшего приближения, записав его в виде

$$Q_n(x) = P_{n+1}(x) - a_{n+1}T_{n+1}\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \qquad (3)$$

Действительно, выражение в правой части является многочленом степени n, поскольку коэффициент при x^{n+1} равен нулю. Точки $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi i}{n+1}$, $i = 0, \ldots, n$, образуют чебышевский альтернанс.

5. Пусть $[a, b] = [-1, 1]$ и $f(x)$ — непрерывная функция, нечетная относительно точки $x = 0$. Покажем, что здесь многочлен наилучшего приближения любой степени нечетен, т. е. записывается в виде суммы нечетных степеней x. Действительно, пусть $Q_n(x)$ — многочлен наилучшего приближения для $f(x)$. Имеем $|f(x) - Q_n(\tilde{x})| \leqslant E_n(f)$. После замены x на $-x$ и умножения выражения под знаком модуля на -1 получим

$$|-f(-x) - (-Q_n(-x))| \leqslant E_n(f),$$

иначе

$$|f(x) - (-Q_n(-x))| \leqslant E_n(f).$$

Следовательно, многочлен $-Q_n(-x)$ также является многочленом наилучшего равномерного приближения. По теореме единственности имеем $Q_n(x) = -Q_n(-x)$, что и требовалось доказать.

6. Пусть требуется приблизить функцию $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1, 1]$ многочленом наилучшего приближения первой степени. Предшествующим результатом можно воспользоваться двояко. Один путь: поскольку искомый многочлен наилучшего приближения будет нечетным, то его достаточно отыскивать среди многочленов вида $Q_1(x) = \alpha_1 x$. Второй путь: поскольку многочлен наилучшего приближения второй степени для данной задачи оказывается многочленом первой степени, то исходная задача эквивалентна задаче построения многочлена наилучшего приближения второй степени. Последняя задача наилучшего приближения многочлена многочленом степени, на единицу меньшей, уже нами рассматривалась.

Задача 6. Пусть $f(x)$ — четная функция относительно середины отрезка приближения $[-1, 1]:\ f(x) = f(-x)$. Доказать, что многочлен наилучшего приближения $Q_n(x)$ четен.

Задача 7. Функцию $f(x) = \exp\{x^2\}$ приблизить на отрезке $[-1, 1]$ многочленом наилучшего приближения третьей степени.

Примечание. Из решения предыдущей задачи следует, что этот многочлен имеет вид $a_0 + a_2x^2$. Задача эквивалентна задаче наилучшего приближения функции $f_1(y) = e^y$ на отрезке $[0, 1]$ многочленом вида $a_0 + a_2 y$.

7. Очень часто бывает, что многочлен наилучшего равномерного приближения точно найти не удается. В этих случаях ищется многочлен, близкий к многочлену наилучшего приближения. Рассмотрим примеры такого рода. Для простоты рассматриваем случай приближения на отрезке $[-1,\,1]$.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд по ортогональной системе многочленов Чебышева:

$$f(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} d_j T_j(x).$$

Отрезок этого ряда

$$\sum_{j=0}^{n} d_j T_j(x)$$

невысокой степени часто обеспечивает неплохое равномерное приближение. Иногда бывает затруднительно вычислить явно коэффициенты d_j, но зато известно разложение Тейлора

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j,$$

сходящееся при $|x| \leqslant 1$. Тогда применяют следующий метод (называемый иногда *телескопическим*). Выбирают некоторое n такое, что погрешность формулы

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

является достаточно малой. Затем приближают многочлен $P_n(x)$ многочленом наилучшего равномерного приближения $P_{n-1}(x)$. Согласно формуле (3) имеем

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n T_n(x) 2^{1-n}.$$

Поскольку $|T_n(x)| \leqslant 1$ на отрезке $[-1,\,1]$, то

$$|P_{n-1}(x) - P_n(x)| \leqslant |a_n| 2^{1-n}.$$

Далее приближают многочлен $P_{n-1}(x)$ многочленом наилучшего равномерного приближения $P_{n-2}(x)$ и т. д. Понижение продолжается до тех пор, пока погрешность от таких последовательных аппроксимаций остается малой.

Рассматриваемый прием можно описать еще и следующим образом. Разложим многочлен $P_n(x)$ по многочленам Чебышева:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j T_j(x).$$

Введем обозначения $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j T_j(x)$ при $m \leqslant n$.

Всякий многочлен $Q_m(x)$ является многочленом наилучшего равномерного приближения степени m для многочлена $Q_{m+1}(x)$, при этом

$$E_m(Q_{m+1}) = \|Q_{m+1} - Q_m\| = |d_{m+1}|. \tag{4}$$

Это следует, например, из формулы (3) или непосредственно из теоремы Чебышева. Отсюда вытекает, что $Q_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$, $Q_{n-2}(x) = P_{n-2}(x)$ и т. д.

Таким образом, сущность описанного метода заключается в следующем. Исходная функция приближается отрезком ее ряда Тейлора $P_n(x)$. Затем многочлен $P_n(x)$ раскладывается на многочлены Чебышева и отбрасываются несколько последних членов разложения. Так как

$$|P_n(x) - P_m(x)| \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} |d_j|,$$

то общая оценка погрешности такова:

$$\Big|f(x) - P_m(x)\Big| \leqslant \max \Big|f(x) - P_n(x)\Big| + \sum_{j=m+1}^{n} |d_j|.$$

Рассмотрим задачу приближения функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[-\operatorname{tg}(\pi/8), \operatorname{tg}(\pi/8)]$ с точностью $0{,}5\cdot 10^{-5}$. Для достижения такой точности при аппроксимации отрезком ряда Тейлора требуется положить

$$\operatorname{arctg} x \approx -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}.$$

Приблизим полученный многочлен многочленом наилучшего приближения степени, на единицу меньшей. Повторяя данную процедуру три раза, получим многочлен

$$P_5(x) = 0{,}9999374x - 0{,}3303433x^3 + 0{,}1632823x^5,$$

также обеспечивающий требуемую точность. Отметим, что здесь из-за нечетности исходного многочлена показатель степени на каждом шаге уменьшался на 2.

Задача 8. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$:

$$Q_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_0.$$

Доказать, что

$$E_n(f) \geqslant |a_{n+1}|2^{-n} - \|f - Q_{n+1}\|.$$

Задача 9. Пусть

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j T_j(x).$$

Доказать, что

$$E_n(f) \geqslant |d_{n+1}| - \sum_{j=n+2}^{\infty} |d_j|.$$

Многочлены наилучшего равномерного приближения или близкие к ним используются как важный составной элемент в стандартных программах вычисления элементарных и специальных функций. Часто возникает ситуация, когда функция задается очень сложным явным выражением (например, в виде интеграла $f(x) = \displaystyle\int_G F(x,y)\,dy$), а по ходу решения конкретной задачи ее значение приходится вычислять в очень многих точках. В этом случае часто полезно вместо непосредственного вычисления значений функции воспользоваться интерполяцией ее значений по таблице или приблизить функцию многочленом. Иногда для этой цели используют многочлены наилучшего приближения в норме L_2 или наилучшего равномерного приближения. Конечно, в каждом конкретном случае полезно посмотреть, оправдают ли себя затраты по построению приближающего многочлена.

§ 7. О форме записи многочлена

Одна из стандартных программ наилучшего равномерного приближения была отлажена в случае приближения функций многочленами невысокой степени и включена в пакет стандартных программ. Однако при практическом использовании программы для приближения функции многочленами высокой степени в ряде случаев оказывалось, что программа выдает приближение к функции, не обеспечивающее ожидаемой точности, или итерационный процесс не сходился, продолжаясь неограниченно долго, так что приходилось прекращать вычисления.

После практического и теоретического анализа возникшей ситуации удалось установить причину происходящего.

Для определенности будем говорить о приближении функции на отрезке $[-1, 1]$.

Было установлено, что в случае недостаточно гладкой функции коэффициенты многочлена, приближающего ее с высокой точностью, обязательно будут очень большими. За исключением редко встречающегося случая, когда эти коэффициенты записываются в ЭВМ без округлений, в этот многочлен вносится погрешность, и он плохо приближает рассматриваемую функцию. Если эти коэффициенты и записаны в машине без округлений, то все равно значения многочлена при $|x|$, близком к 1, будут находиться с большой вычислительной погрешностью.

Сформулируем соответствующие утверждения более строго. Предположим, что существует последовательность многочленов

$$P^m(x) = \sum_{j=0}^{n(m)} a_j^m x^j,$$

удовлетворяющих условию

$$|f(x) - P^m(x)| \leqslant 2^{-m} \quad \text{на} \quad [-1, 1] \tag{1}$$

($P^m(x)$ — не обязательно многочлены наилучшего равномерного приближения); предположим также, что коэффициенты этих многочленов растут не очень сильно:

$$l_m = \sum_{j=0}^{n(m)} |a_j^m| \leqslant M\, 2^{qm}, \quad q \geqslant 0. \tag{2}$$