Глава 4

Приближение функций и смежные вопросы

Непрерывная функция не всегда может быть хорошо приближена интерполяционным многочленом Лагранжа. В частности, последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа по равноотстоящим узлам не обязательно сходится к функции даже в том случае, если функция бесконечно дифференцируема. В тех случаях, когда сходимость имеет место, часто получение достаточно хорошего приближения требует использования полиномов высокой степени. В то же время, если для приближаемой функции удается подобрать подходящие узлы интерполяции, то степень интерполяционного многочлена, приближающего функцию с заданной точностью, может быть значительно снижена.

В ряде конкретных случаев целесообразно приближать функцию не путем интерполяции, а путем построения так называемого *наилучшего приближения*. Проблемы, связанные с построением наилучшего приближения, и будут рассмотрены в настоящей главе.

§ 1. Наилучшие приближения в линейном нормированном пространстве

Сформулируем задачу построения наилучшего приближения на абстрактном языке. Пусть имеется элемент f линейного нормированного пространства R. Требуется найти его наилучшее приближение линейной комбинацией $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j g_j$ данных линейно независимых элементов $g_1, \ldots, g_n \in R$. Это означает: найти элемент $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^0 g_j$ такой, что

$$\Big\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j^0 g_j \Big\| = \Delta = \inf_{c_1, \ldots, c_n} \Big\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j g_j \Big\|.$$

По-другому это можно обозначить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^0 g_j = \arg \inf_{c_1, \ldots, c_n} \Big\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j g_j \Big\|.$$

Если такой элемент существует, то он называется *элементом наилучшего приближения.*

Теорема. *Элемент наилучшего приближения существует.*

Доказательство. Вследствие соотношений (следствие из неравенства треугольника)

$$\left|\,\Big\|f-\sum_{j=1}^{n}c_j^1g_j\Big\|-\Big\|f-\sum_{j=1}^{n}c_j^2g_j\Big\|\,\right|\leqslant\Big\|\sum_{j=1}^{n}\left(c_j^1-c_j^2\right)g_j\Big\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|c_j^1-c_j^2\right|\,\|g_j\|$$

функция

$$F_f(c_1,\ldots,c_n)=\Big\|f-\sum_{j=1}^{n}c_jg_j\Big\|$$

является непрерывной функцией аргументов c_j при любом $f\in R$. Пусть $|\mathbf{c}|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$. Функция $F_0(c_1,\ldots,c_n)=\|c_1g_1+\dots+c_ng_n\|$ непрерывна на единичной сфере $|\mathbf{c}|=1$ и, следовательно, в некоторой ее точке $(\tilde c_1,\ldots,\tilde c_n)$ достигает своей нижней грани $\tilde F$ по сфере, причем $\tilde F\neq 0$, так как равенство $\tilde F=\|\tilde c_1g_1+\dots+\tilde c_ng_n\|=0$ противоречит линейной независимости элементов $g_1,\ldots,g_n$. Для любого $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)\neq(0,\ldots,0)$ справедлива оценка

$$\|c_1g_1+\dots+c_ng_n\|=F_0(c_1,\ldots,c_n)=|\mathbf{c}|F_0\left(\frac{c_1}{|\mathbf{c}|},\ldots,\frac{c_n}{|\mathbf{c}|}\right)\geqslant\|\mathbf{c}\|\tilde F.$$

Пусть $\gamma>2\|f\|/\tilde F$. Функция $F_f(c_1,\ldots,c_n)$ непрерывна в шаре $|\mathbf{c}|\leqslant\gamma$; следовательно, в некоторой точке шара $(c_1^0,\ldots,c_n^0)$ она достигает своей нижней грани F^0 по шару. Имеем $F^0\leqslant F_f(0,\ldots,0)=\|f\|$. Вне этого шара выполняются соотношения

$$F_f(c_1,\ldots,c_n)\geqslant\|\,c_1g_1+\dots+c_ng_n\,\|-\|f\|>$$
$$>\Big(2\|f\|\,/\,\|\tilde F\|\Big)\,\|\tilde F\|-\|f\|=\|f\|>F^0.$$

Таким образом, вне этого шара

$$F_f(c_1,\ldots,c_n)\geqslant F^0=F_f(c_1^0,\ldots,c_n^0)$$

при всех возможных $c_1,\ldots,c_n$. Теорема доказана.

Элементов наилучшего приближения, вообще говоря, может быть несколько.

Пространство R называется *строго нормированным*, если из условия

$$\|f+g\|=\|f\|+\|g\|,\quad\|f\|,\,\|g\|\neq 0$$

следует $f=\alpha g$, $\alpha>0$.

Задача 1. Доказать, что в случае строго нормированного пространства R элемент наилучшего приближения единствен.

Задача 2. Доказать, что пространство $L_p((0,1), q(x))$, $q(x) \geqslant 0$ почти всюду, с нормой

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p q(x)\,dx}$$

строго нормированное при $1 < p < \infty$.
Рассмотреть отдельно простейший случай гильбертова пространства $p = 2$.

§ 2. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве и вопросы, возникающие при его практическом построении

Для гильбертова пространства элемент наилучшего приближения единствен (см. задачу 1.2) и проблема его нахождения формально сводится к решению системы линейных уравнений.

Наиболее простой способ получения этой системы следующий. По определению коэффициенты a_j элемента наилучшего приближения реализуют минимум выражения

$$\delta^2 = \Big\|f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j\Big\|^2 = \Big(f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j,\ f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j\Big).$$

Приравнивая нулю производные по $\operatorname{Re} a_i$ и $\operatorname{Im} a_i$, получаем искомую систему уравнений для определения a_i. Вследствие существования и единственности элемента наилучшего приближения, эта система имеет единственное решение.

Построим эту систему и исследуем вопрос о единственности ее решения несколько другим способом.

Для простоты изложения ограничимся случаем вещественных f и g_j. Пусть $a_j = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, α_j, β_j — вещественные числа; имеем $f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j = \Big(f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j\Big) - \mathbf{i}\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j$. Положим

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = \Big\|f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j\Big\|^2.$$

Если f_1 и f_2 вещественны, то $\|f_1 + \mathbf{i}f_2\|^2 = (f_1 + \mathbf{i}f_2, f_1 + \mathbf{i}f_2) = (f_1, f_1) + \mathbf{i}(f_2, f_1) - \mathbf{i}(f_1, f_2) + (f_2, f_2) = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$, поэтому

$$\Big\|f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j\Big\|^2 = \Big\|f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j\Big\|^2 + \Big\|\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\Big\|^2. \tag{1}$$