Лекція 31

§4 *Узагальнені розв'язки граничних задач для гіперболічного рівняння*

[стор. 310- 325]

Нехай Ω - деяка обмежена область у евклідовому просторі R^n, $x=(x_1,\dots x_n)$ - точка цього простору. У просторі $R^{n+1}=R^n\times\{-\infty<t<\infty\}$ розглянемо обмежений просторово – часовий циліндр $Z(\Omega,T)=\{x\in\Omega, 0<t<T\}$. Позначимо через $\Gamma(S,T)=\{x\in S, 0<t<T\}$ - бокову поверхню циліндру, а через $D_\tau=\{x\in\Omega, t=\tau\}$ - переріз циліндру $Z(\Omega,T)$ площиною $t=\tau$.

У циліндрі $Z(\Omega,T)$ при $T>0$ розглянемо гіперболічне рівняння:

$$\Theta u\equiv u_{tt}-div(p(x)gradu)+q(x)u=f(x,t) \qquad (4.1),$$

де $p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ q(x)\in C(\overline{\Omega}),\ p(x)\ge p_0=const>0, q(x)\ge 0$.

Означення 1 Функція $u(x,t)\in C^2(Z(\Omega,T))\cap C^1(\overline{Z(\Omega,T)}\cup\overline{D_0})$, яка задовольняє у $Z(\Omega,T)$ рівняння (4.1), на D_0 початковим умовам:

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (4.2)$$

$$u_t\big|_{t=0}=\psi(x) \qquad (4.3),$$

на $\Gamma(S,T)$, одній з граничних умов

$$u\big|_{\Gamma(S,T)}=\chi(x,t) \qquad (4.4),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\bigg|_{\Gamma(S,T)}=\chi(x,t) \qquad (4.5),$$

де $\sigma\in C(\Gamma(S,t))$ називається класичним розв'язком першої, при умові (4.4), або третьої при умові (4.5) граничної задачі для хвильового рівняння (4.1).

Якщо $\sigma\equiv 0,\ x\in\Gamma(S,T)$, то третя гранична задача називається другою граничною задачею.

В подальшому будемо розглядати граничні задачі для однорідних граничних умов:

$$u\big|_{\Gamma(S,T)} = 0 \qquad (4.4'),$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_{\Gamma(S,T)} = 0 \qquad (4.5')$$

Також будемо припускати, що $\sigma = \sigma(x) \geq 0,\ x \in \Gamma(S,T),\ f(x,t) \in L_2(Z(S,T))$.

Єдиність узагальненого розв'язку

Нехай $u(x,t)$ є розв'язок однієї з граничних задач (4.1)-(4.3), (4.4') або (4.1)-(4.3), (4.5'). Виберемо довільне $\delta,\ 0 < \delta < T$. Помножимо (4.1) на функцію $v(x,t) \in C^1(\overline{Z}(\Omega, T-\delta))$, яка задовольняє умові

$$v\big|_{D_{T-\delta}} = 0 \qquad (4.6)$$

і проінтегруємо отриману рівність по циліндру $Z(\Omega, T-\delta)$.

Врахуємо наступні співвідношення $u_{tt}v = (u_t v)_t - u_t v_t$,

$vdiv(p \cdot gradu) = div(p \cdot vgradu) - p\left(gradu, gradv\right)$.

Використовуючи формулу Остроградського – Гауса, з використанням умов (4.3) та (4.6), отримаємо

$$\begin{gathered}\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} fvdxdt = \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left((u_t v)_t - div(pvgrau)\right)dxdt + \\ \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt = \int\limits_{D_{T-\delta}} u_t vdxdt - \int\limits_{D_0} u_t vdx \\ - \int\limits_{\Gamma(S,T-\delta)} p\frac{\partial u}{\partial n} vdSdt + \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt = \\ -\int\limits_{D_0} \psi vdx - \int\limits_{\Gamma(S,T-\delta)} pv\frac{\partial u}{\partial n} dSdt + \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt\end{gathered} \qquad (4.7).$$

Для третьої (другої) граничної задачі з (4.7) отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered}\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt + \int\limits_{\Gamma(S,T-\delta)} p\sigma uvdSdt = \\ \int\limits_{D_0} \psi vdx + \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} fvdxdt\end{gathered} \qquad (4.8)$$

для усіх $v(x,t) \in C^1(\overline{Z}(\Omega, T-\delta))$ для яких виконане співвідношення (4.6), а таким чином для усіх $v(x,t)\in W_2^1(Z(\Omega,T-\delta))$.

Якщо функція $u(x,t)$ є розв’язком першої граничної задачі, то додатково будемо припускати, що має місце умова

$$v\big|_{\Gamma(S,T-\delta)}=0 \tag{4.9}$$

Тоді з умови (4.7) отримаємо для $u(x,t)$ інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)}\left(p\left(gradu,gradv\right)+quv-u_t v_t\right)dxdt=\int\limits_{D_0}\psi vdx+\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)}fvdxdt \tag{4.10}$$

для усіх $v(x,t)\in W_2^1(Z(\Omega,T-\delta))$, для яких виконані умови (4.6) та (4.9).

Використаємо інтегральні тотожності (4.8), (4.10) для визначення узагальненого розв’язку граничних задач хвильового рівняння (4.1).

Будемо припускати, що $f(x,t)\in L_2(Z(S,T)),\ \psi(x)\in L_2(\Omega)$.

Означення 2. Функцію $u\in W_2^1(Z(\Omega,T))$ будемо називати узагальненим розв’язком в $Z(\Omega,T)$ першої граничної задачі (4.1) – (4.3), (4.4’), якщо вона задовольняє початковій умові (4.2), граничній умові (4.4’) та тотожності (4.10) при $\delta=0$ для будь-якої $v\in W_2^1(Z(\Omega,T))$ для якої має місце умова (4.4’) та умова

$$v\big|_{D_T}=0 \tag{4.11}$$

Означення 3 Функцію $u\in W_2^1(Z(\Omega,T))$ будемо називати узагальненим розв’язком в $Z(\Omega,T)$ третьої (другої) граничної задачі (4.1) – (4.3), (4.5’), якщо вона задовольняє початковій умові (4.2) та тотожності (4.8) при $\delta=0$ для будь-якої $v\in W_2^1(Z(\Omega,T))$ для якої має місце умова (4.11).

Покажемо, що має місце наступна теорема.

Теорема 1 *(єдиності узагальненого розв’язку граничних задач хвильового рівняння)* Гранична задача (4.1)-(4.3), (4.4’) та (4.1)-(4.3), (4.5’) не може мати більш одного узагальненого розв’язку.

Доведення. Нехай u - узагальнений розв’язок граничної задачі (4.1)-(4.3), (4.4’) або граничної задачі (4.1)-(4.3), (4.5’) при $f=0$, $\varphi=0,\ \psi=0$. Покажемо, що

$u=0$ в $Z(\Omega,T)$. Візьмемо довільне $\tau\in(0,T)$ та введемо функцію $v(x,t)=\begin{cases}\int_t^\tau u(x,\theta)d\theta,\ 0<t<\tau\\ 0,\ \tau<t\le T\end{cases}$, легко бачити, що функція $v(x,t)$ має у $Z(\Omega,T)$ узагальнені похідні :

$$v_t=\begin{cases}-u,\ 0<t<\tau\\ 0,\ \tau<t\le T\end{cases}\qquad v_{x_i}=\begin{cases}\int_t^\tau u_{x_i}(x,\theta)d\theta,\ 0<t<\tau\\ 0,\ \tau<t\le T\end{cases}$$

, тобто $v\in W_2^1(Z(\Omega,T))$ та $v\big|_{D_T}=0$, якщо u є розв'язком першої граничної задачі, то $v\big|_{\Gamma(S,T)}=0$.

Підставимо функцію v у тотожність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\Big(p\big(\nabla u,\nabla v\big)+quv-u_tv_t\Big)dxdt=\int\limits_{D_0}\psi vdx+\int\limits_{Z(\Omega,T)}fvdxdt \qquad (4.10'),$$

якщо u є розв'язком першої граничної задачі, або у тотожність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\Big(p\big(\nabla u,\nabla v\big)+quv-u_tv_t\Big)dxdt+\int\limits_{\Gamma(S,T)}p\sigma uvdSdt= =\int\limits_{D_0}\psi vdx+\int\limits_{Z(\Omega,T)}fvdxdt \qquad (4.8'),$$

якщо u є розв'язком третьої (другої) граничної задачі при $T=\tau$.

В результаті для першої граничної задачі отримаємо рівність

$$\int\limits_{Z(\Omega,\tau)}\left(p\left(\nabla u,\int_t^\tau\nabla ud\theta\right)-qv_tv+u_tu\right)dxdt=0 \qquad (4.12).$$

Для випадку третьої (другої) граничної задачі будемо мати рівність

$$\int\limits_{Z(\Omega,\tau)}\left(p\left(\nabla u,\int_t^\tau\nabla d\theta\right)-qv_tv+u_tu\right)dxdt+\int\limits_{\Gamma(S,\tau)}p\sigma u(x,t)\int_t^\tau u(x,\theta)d\theta dSdt=0\,. \qquad (4.13).$$

Використовуючи дворазове інтегрування за частинами по змінній t, можна отримати наступні рівності: $\int\limits_{Z(\Omega,\tau)}\left(p(x)\nabla u,\int_t^\tau\nabla u\right)d\theta dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}p(x)\left|\int_0^\tau\nabla u(x,t)dt\right|^2dx$

$$\int\limits_{\Gamma(S,\tau)}p\sigma u(x,t)\int_t^\tau u(x,\theta)d\theta dSdt=\frac{1}{2}\int\limits_S p\sigma\left(\int_0^\tau u(x,t)dt\right)^2dS$$

Крім того мають місце очевидні рівності:

$$\int\limits_{Z(\Omega,\tau)} qvv_t dxdt = -\frac{1}{2}\int\limits_{D_0} qv^2 dx \qquad \int\limits_{Z(\Omega,\tau)} uu_t dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2 dx.$$

Таким чином, якщо функція u розв'язок першої граничної задачі, то має місце інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} p(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x,t)dt\right|^2 dx + \int\limits_{D_0} qv^2 dx + \int\limits_{D_\tau} u^2 dx = 0 \qquad (4.12').$$

Якщо u розв'язок третьої (другої) граничної задачі, то має місце інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} p(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x,t)dt\right|^2 dx + \int\limits_{D_0} qv^2 dx + \int\limits_{D_\tau} u^2 dx + \int\limits_{S} p\sigma\left(\int\limits_0^\tau u(x,t)dt\right)^2 dS = 0 \qquad (4.13').$$

Враховуючи, що $p(x) > 0, q(x) \ge 0, x \in Z(\Omega,T), \sigma(x) \ge 0, x \in \Gamma(S,T)$ з (4.12') для першої граничної задачі та (4.13') для третьої (другої) граничної задачі будемо мати, що $\int\limits_{D_\tau} u^2 dx = 0$, а оскільки τ- довільне число з інтервалу $(0,T)$, $u(x,t) = 0,\ (x,t) \in Z(\Omega,T)$. Таким чином теорема доведена.

Оскільки будь – який класичний розв'язок є одночасно узагальненим, то має місце наслідок з теореми 1.

Наслідок 1 Гранична задача (4.1)-(4.3), (4.4') та (4.1)-(4.3), (4.5') не може мати більш одного класичного розв'язку.

Існування узагальненого розв'язку

Для встановлення факту існування узагальненого розв'язку скористаємось методом Фур'є, згідно з яким розв'язок граничної задачі для гіперболічного рівняння будемо шукати у вигляді ряду Фур'є по системі власних функцій відповідної граничної задачі для еліптичного рівняння.

Нехай $v(x)$ - узагальнена власна функція першої граничної задачі :

$$\begin{cases} div(p\nabla v) - qv = \lambda v, \; x \in \Omega \\ v\big|_S = 0 \end{cases} \qquad (4.14).$$

Або третьої (другої при $\sigma = 0$) граничної задачі.

$$\begin{cases} div(p\nabla v) - qv = \lambda v, \; x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n} + \sigma v\right|_S = 0 \end{cases} \qquad (4.15).$$

Це означає, що для першої граничної задачі $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ і задовольняє інтегральній тотожності $\int\limits_{\Omega} \left(p\nabla v \nabla \eta + qv\eta \right) dx + \lambda \int\limits_{\Omega} v\eta dx = 0, \; \forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (4.16).

У випадку третьої (другої) граничної задачі $v \in W_2^1(\Omega)$ і задовольняє інтегральні тотожності

$$\int\limits_{\Omega} \left(p\nabla v \nabla \eta + qv\eta \right) dx + \int\limits_{S} p\sigma v\eta dS + \lambda \int\limits_{\Omega} v\eta dx = 0, \; \forall \eta \in W_2^1(\Omega) \qquad (4.17).$$

При цьому число λ є відповідним власним числом задачі.

Як випливає з результатів лекції 30, система власних функцій $v_1(x), v_2(x), \ldots. v_n(x) \ldots.$ є ортонормованим базисом в просторі $L_2(\Omega)$.

Враховуючи обмеження на коефіцієнти рівняння та граничної умови $p(x) > 0, q(x) \ge 0, x \in Z(\Omega, T), \quad \sigma(x) \ge 0, \; x \in \Gamma(S, T)$, для власних чисел будемо мати $0 > \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots. \lambda_n \ge \ldots,$. При цьому кожне власне число буде повторюватись таку кількість разів, яка його кратність.

Будемо припускати, що $\varphi \in L_2(\Omega), \psi \in L_2(\Omega), \; f(x,t) \in L_2(Z(\Omega, T))$. Згідно теореми Фубіні $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ майже для усіх $t \in (0, T)$.

Функції $\varphi(x), \, \psi(x)$ та функцію $f(x,t)$ для майже усіх $t \in (0, T)$ розкладемо у ряди Фур'є по системі власних функцій $v_1(x), v_2(x), \ldots. v_n(x) \ldots.$ задачі на власні значення (4.14) для першої граничної задачі або задачі (4.15) для третьої (другої) граничної задачі.

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k v_k(x),\ \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k v_k(x),\ f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)v_k(x), \qquad (4.18),$$

де $\varphi_k=(\varphi,v_k)_{L_2(\Omega)},\ \psi_k=(\psi,v_k)_{L_2(\Omega)},\ f_k(t)=\int_\Omega f(x,t)v_k(x)dx$ (4.19).

Згідно нерівності Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\le\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)},\ \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^2\le\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}$,

$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2(t)\le\int_\Omega f^2(x,t)dx$ майже для усіх $t\in(0,T)$ (4.20).

Для початку, в якості вхідних функцій: початкових умов (4.2), (4.3) та вільного члена гіперболічного рівняння (4.1) візьмемо функції $\varphi_k v_k(x),\ \psi_k v_k(x)$ та $f_k(t)v_k(x)$ відповідно.

Розглянемо функцію $u_k(x,t)=U_k(t)v_k(x)$ (4.21),

де $U_k(t)=\varphi_k\cos\sqrt{-\lambda_k}t+\frac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}}\sin\sqrt{-\lambda_k}t+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int_0^t f_k(\tau)\sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)d\tau$ (4.22).

Шляхом безпосередньої перевірки легко встановити, що функція (4.22) задовольняє майже для усіх $t\in(0,T)$ рівняння

$U_k''-\lambda_k U_k=f_k(t),\ k=1,2,3...$ (4.23)

та початкові умови $U_k(0)=\varphi_k,\ U_k'(0)=\psi_k$.

Покажемо, що якщо $v_k(x),\ \lambda_k$ - узагальнена власна функція та власне число задачі (4.14), або (4.15), то функція $u_k(x,t)$ є узагальненим розв'язком першої або третьої граничної задачі для рівняння $u_{tt}-div(p(x)\nabla u)+q(x)u=f_k(t)v_k(x)$ з початковими умовами $u\big|_{t=0}=\varphi_k v_k(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi_k v_k(x)$ (4.24).

Дійсно, функція $u_k(x,t)\in W_2^1(Z(\Omega,T))$, задовольняє початковим умовам (4.24) та у випадку першої граничної задачі має задовольняти інтегральній тотожності

$$\int_{Z(\Omega,T)}\left(p\left(\nabla u_k,\nabla v\right)+qu_k v-u_{kt}v_t\right)dxdt=\psi_k\int_{D_0}v_k(x)vdx+\int_{Z(\Omega,T)}f_k(t)v_k(x)vdxdt \qquad (4.10')$$

для усіх $v\in W_2^1(Z(\Omega,T))$, які задовольняють умовам (4.4'), та (4.6) при $\delta=0$. Для третьої (другої) граничної задачі $u_k(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, має задовольняти інтегральній тотожності

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_{kt} v_t \right) dxdt + \int\limits_{\Gamma(S,T)} p\sigma u_k v dSdt = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt \qquad (4.8')$$

для усіх $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, які задовольняють умові (4.6) при $\delta = 0$.

Покажемо справедливість тотожності (4.10')

Враховуючи справедливість (4.21), (4.22), обчислимо

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(u_{kt} v_t \right) dxdt = \int\limits_{\Omega} v_k(x) \left[\int\limits_0^T U_k^{'}(t) v_t dt \right] dx = \int\limits_{\Omega} v_k(x) \left[-\psi_k v(x,0) - \int\limits_0^T U_k^{''}(t) v dt \right] dx =$$
$$= -\psi_k \int\limits_{\Omega} v_k(x) v(x,0) dx - \lambda_k \int\limits_{Z(\Omega,T)} u_k v dxdt - \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt$$

Обчислимо ліву частину (4.10') та врахуємо останню рівність:

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_{kt} v_t \right) dxdt = \int\limits_0^T U_k(t) dt \int\limits_{\Omega} \left(p(x) \nabla v_k \nabla v + q(x) v_k v + \lambda_k v_k v \right) dx +$$
$$+ \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt$$

Аналогічним чином, у випадку другої та третьої граничних задач обчислимо ліву частину (4.8'), будемо мати:

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_{kt} v_t \right) dxdt = \int\limits_0^T U_k(t) dt \left(\int\limits_{\Omega} \left(p(x) \nabla v_k \nabla v + q(x) v_k v + \lambda_k v_k v \right) dx + \right.$$
$$\left. \int\limits_S p\sigma v_k v\, dS \right) = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt$$

Якщо в якості початкових функцій в умовах (4.2) та (4.3) та вільного члена рівняння (4.1) узяти часткові суми рядів Фур'є $\sum\limits_{k=1}^N \varphi_k v_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^N \psi_k v_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^N f_k(t) v_k(x)$, то узагальненим розв'язком відповідної граничної задачі буде функція $S_N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N u_k(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N U_k(t) v_k(x)$, яка задовольняє інтегральній тотожності (4.10') для першої граничної задачі, або (4.8') для третьої (другої) граничної задачі.

При певних припущеннях можна очікувати, що розв’язок граничних задач (4.1)-(4.3), (4.4’) та (4.1)-(4.3), (4.5’) можна представити у вигляді ряду Фур’є

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(t)v_k(x) \qquad (4.24).$$

Теорема 2 *(про існування розв’язку змішаної граничної задачі для хвильового рівняння)* Нехай $f\in L_2\left(Z(\Omega,T)\right)$, $\psi\in L_2(\Omega)$, а функція $\varphi\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ у випадку першої граничної задачі (4.1) - (4.3), (4.4’) або $\varphi\in W_2^1(\Omega)$ у випадку третьої (другої) граничної задачі (4.1)-(4.3), (4.5’). Тоді узагальнений розв’язок $u(x,t)$ відповідної граничної задачі існує і зображується збіжним у просторі $W_2^1(\Omega)$ рядом (4.24). При цьому має місце нерівність $\|u\|_{W_2^1(Z(\Omega,T))}\le C\left(\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}+\|\psi\|_{L_2(\Omega)}+\|f\|_{L_2(Z(\Omega,T))}\right)$(4.25), в якому додатна константа C не залежить від $\varphi,\psi,\ f$.

Доведення З рівності (4.22) випливає, що для $t\in[0,T]$ має місце нерівність

$$\left|U_k(t)\right|\le\left|\varphi_k\right|+\left|\psi_k\right|\left|\lambda_k\right|^{-0.5}+\left|\lambda_k\right|^{-0.5}\int_0^T\left|f_k(t)\right|dt,\ k\ge1.$$

Після піднесення до квадрату, застосування нерівності між середнім геометричним та середнім квадратичним та нерівності Коші - Буняківського отримаємо:

$$\begin{aligned}&U_k^2(t)\le3\varphi_k^2+3\psi_k^2\left|\lambda_k\right|^{-1}+3\left|\lambda_k\right|^{-1}\left(\int_0^T\left|f_k\right|dt\right)^2\le\\&\le C(T)\left(\varphi_k^2+\psi_k^2\left|\lambda_k\right|^{-1}+\left|\lambda_k\right|^{-1}\int_0^T f_k^2dt\right),\ k\ge1\end{aligned} \qquad (4.26).$$

З (4.22) для похідної $U_k'(t)$ отримаємо наступні нерівності:

$$\left|U_k'(t)\right|^2\le C(T)\left(\varphi_k^2\left|\lambda_k\right|+\psi_k^2+\int_0^T f_k^2(t)dt\right) \qquad (4.27).$$

Враховуючи, що $\varphi\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ для першої граничної задачі та $\varphi\in W_2^1(\Omega)$ для третьої (другої) граничної задачі, то з теореми про розвинення функцій у ряд Фур'є за системою власних функцій граничної задачі еліптичного оператора з використанням нерівності Бесселя можемо отримати

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\left|\lambda_k\right|\le C_1\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^1(\Omega)} \qquad (4.28).$$

Враховуючи, що функція $U_k(t)$ неперервно-диференційована на $[0,T]$, частинна сума ряду (4.24) $S_N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}U_k(t)v_k(x)$ належить простору $\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)$ для першої граничної задачі, або простору $W_2^1(D_t)$ для третьої (другої) граничної задачі.

При дослідженні граничної задачі (4.1) - (4.3), (4.4') у просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)$ будемо користуватися скалярним добутком $\int\limits_{D_t}\left(p\nabla u\nabla v+quv\right)dx$, а при дослідженні граничної задачі (4.1) - (4.3), (4.5') скалярним добутком $\int\limits_{D_t}\left(p\nabla u\nabla v+quv\right)dx+\int\limits_{\Gamma_t}p\sigma uvdS$.

Враховуючи, що система власних функцій першої та третьої (другої) граничних задач $\left\{\frac{v_k(x)}{\sqrt{-\lambda_k}}\right\}_{k=1,\infty}$ є ортонормованими в обраних скалярних добутках, та використовуючи нерівності (4.26), (4.27), оцінимо

$$\left\|S_N(x,t)-S_M(x,t)\right\|^2_{W_2^1(D_t)}=\left\|\sum_{k=M+1}^{N}U_k(t)v_k(x)\right\|^2_{W_2^1(D_t)}=\sum_{k=M+1}^{N}U_k^2(t)\left|\lambda_k\right|\le$$
$$\le C_2\sum_{k=M+1}^{N}\left(\varphi_k^2\left|\lambda_k\right|+\psi_k^2+\int_0^T f_k^2dt\right) \qquad (4.29).$$

$$\left\|S'_N(x,t)-S'_M(x,t)\right\|^2_{L_2(D_t)}=\left\|\sum_{k=M+1}^{N}U'_k(t)v_k(x)\right\|^2_{L_2(D_t)}=\sum_{k=M+1}^{N}U'^2_k(t)\le$$
$$\le C_3\sum_{k=M+1}^{N}\left(\varphi_k^2\left|\lambda_k\right|+\psi_k^2+\int_0^T f_k^2dt\right) \qquad (4.29').$$

Додаючи (4.29) та (4.29’) та інтегруючи по $t \in [0, T]$ отримаємо нерівність

$$\left\| S_N(x,t) - S_M(x,t) \right\|^2_{W_2^1(Z(\Omega,T))} \le C_4 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 |\lambda_k| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2 dt \right) \qquad (4.30).$$

Згідно нерівностей (4.20) та (4.28) наступні ряди збігаються $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \varphi_k^2, \ \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2, \ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t) dt$. Враховуючи (4.30) отримаємо збіжність ряду (4.24) в нормі простору $W_2^1(Z(\Omega,T))$.