Лекція 30

[10, стор.107 - 112]

Згідно до ***першої теореми Фредгольма*** маємо, що з єдиності розв'язку рівняння (2.23'') випливає існування розв'язку для довільного вільного члена $F \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega$. Оскільки (2.23'') еквівалентне тотожності (2.21), то перша теорема Фредгольма гарантує існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле (2.18), (2.4') $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ для довільних $\mathrm{f} \in \mathrm{L}_2(\Omega), \boldsymbol{f} \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ при виконанні умови єдиності розв'язку.

Зауважимо також, що оскільки оператори A та B є симетричними, то симетричним також буде оператори D^{-1} та $D^{-1}B$.

Друга теорема Фредгольма стверджує, що для однорідного симетричного рівняння $u = \mu D^{-1}Bu,\ \mu = \lambda - \lambda_0$ (2.25)

нетривіальний розв'язок рівняння існує лише для зліченої множини дійсних значень параметра $\{\lambda_k\} = \{\mu_k + \lambda_0\}_{k=1,\infty}$, кожному λ_k відповідає принаймні один нетривіальний розв'язок $\mathrm{v_k}$. Ці значення $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,\infty$ називаються спектральними значеннями причому їх можна занумерувати так, що $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le .....|\lambda_n| \le ....$ Друга теорема Фредгольма стверджує також, що кожне власне (спектральне) значення має скінчену кратність, тобто для кожного значення $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,\infty$ існує лише скінчена кількість лінійно – незалежних розв'язків однорідного рівняння (2.25). Для неоднорідного рівняння (2.23'') у випадку $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,\infty$ порушується єдиність розв'язку.

Третя теорема Фредгольма для неоднорідного рівняння (2.23'') дає необхідні і достатні умови існування розв'язку для випадку, коли $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,\infty$, тобто для спектральних значень параметру λ. А саме , якщо $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,\infty$, то задача (2.23'') має розв'язок для тих і лише тих значень вільного члена $D^{-1}F$, які ортогональні до усіх розв'язків спряженого (вихідного) однорідного рівняння

(2.25), тобто $\left(D^{-1}F, v_{k+j}\right)_3 = 0,\ j = 0, q_k - 1$ (2.26),

де q_k - кратність власного числа $\lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_{q_k - 1}$.

Покажемо, що умова (2.26) еквівалентна умові

$$\int_\Omega (-fv_j + \sum_{i=1}^{n} f_i v_{j x_i}) dx = 0,\ j = k, k+1, k+2,\ k + q_k - 1 \qquad (2.27).$$

Дійсно, враховуючи симетричність рівняння (2.25), його можна для $u = v_k$, $\lambda = \lambda_k$ записати у вигляді $v_k = \mu_k B D^{-1} v_k$, $\mu_k = \lambda_k - \lambda_0$. (2.25′).

Вводячи функцію $w_k = D^{-1} v_k$, запишемо рівняння (2.25′) у вигляді

$Dw_k = \mu_k B w_k$, $\mu_k = \lambda_k - \lambda_0$, або $w_k = \mu_k D^{-1} B w_k$, $\mu_k = \lambda_k - \lambda_0$ (2.25′′)

Враховуючи, що $BD^{-1} = D^{-1}B$, то рівняння (2.25′′) співпадає з (2.25′), тобто $w_k = v_k$, таким чином має місце рівність $\left(D^{-1}F, v_{k+j}\right)_3 = \left(F, D^{-1}v_{k+j}\right)_3 = \left(F, w_{k+j}\right)_3 = \left(F, v_{k+j}\right)_3 = 0,\ j = 0, q_k - 1$.

Теорема 3 (*Про існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле з параметром)* Задача Діріхле (2.18), (2.4′) має єдиний розв'язок у просторі $W_2^1(\Omega)$ при будь яких $f, \mathbf{f} \in L_2(\Omega)$ для будь-яких дійсних значень параметру λ, окрім не більш ніж зліченої множини $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,....$, які утворюють спектр задачі Діріхле (2.18), (2.4′). Кожне значення λ_k має скінчену кратність і єдиною граничною точкою спектру є $\lambda = \infty$. Для існування розв'язку задачі Діріхле при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,....$ необхідно і достатньо що б виконувалася умова ортогональності (2.27), де v_{k+j}, $j = 0..q_k - 1$ розв'язки однорідної задачі Діріхле при $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_{k+q_k-1}$. Розв'язок у цьому випадку неєдиний і визначається з точністю до загального розв'язку однорідної задачі Діріхле $\sum_{j=0}^{q_k-1} c_j v_{k+j}$, де c_j - довільні константи.

Узагальнена задача на власні значення Розвинення функцій в ряд по власних функціях симетричного оператора

Розглянемо однорідну задачу Діріхле

$Lu = div(p(x) gradu) + a(x)u = \lambda u$ (2.18′),

$u\big|_S = 0$ (2.4′).

Узагальненими розв'язками цієї задачі з простору $W_2^1(\Omega)$ є елемент $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, який задовольняє інтегральній тотожності

$$L(u,\overline{\eta}) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} p(x) u_{x_i} \overline{\eta_{x_i}} - a(x) u \overline{\eta} \right) dx = -\lambda \int_{\Omega} u \overline{\eta} dx, \ \ \forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \qquad (2.28).$$

Для дослідження задачі Дірихле на власні значення введемо скалярний добуток $(u,v)_4 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} p(x) u_{x_i} \overline{\eta_{x_i}} + (\lambda_0 - a(x)) u \overline{\eta} \right) dx$ (2.29).

Для того щоб (2.29) представляв собою скалярний добуток, необхідно обрати $\lambda_0 > 0$ достатньо великим, наприклад таким, щоб $\lambda_0 > a_2$.

Враховуючи введений скалярного добутку, запишемо (2.28) у вигляді:

$(u,\eta)_4 = (\lambda_0 - \lambda)(u,\eta)$ (2.30).

Аналогічно (2.22) з використанням теореми Риса – Фішера введемо оператор B за правилом $-\int_{\Omega} u\eta dx = (Bu,\eta)_4$ (2.31).

Оператор B є цілком неперервним, симетричним та від'ємним.

В результаті (2.30) буде мати вигляд :

$(u,\eta)_4 = (\lambda - \lambda_0)(Bu,\eta)_4$ (2.30′).

Враховуючи, що остання рівність повинна виконуватись для усіх $\eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, з (2.30′) маємо операторну рівність $u = (\lambda - \lambda_0)Bu$, або

$Bu = \mu u, \quad \mu = (\lambda - \lambda_0)^{-1}$ (2.32).

З загальної теорії самоспряжених цілком неперервних операторі випливає, що спектр оператора B є дійсним, від'ємним і усі власні числа $\mu_k, k=1,2,...$ можна занумерувати в порядку спадання їх модулів, з урахуванням кратності. Єдиною точкою накопичення може бути $\mu=0$. Відповідні власні функції v_k, які задовольняють операторне рівняння $Bv_k=\mu_k v_k$ є дійсні і ортогональними, тобто

$$(v_k, v_l)_4 = 0,\ k \neq l \qquad (2.33).$$

При $\mu=0$ рівняння (2.32) має лише тривіальний розв'язок. Таким чином власні функції $\{v_k\}$ складають базис в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, а враховуючи, що $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ є нескінченновимірний простір, то кількість елементів базису є злічена множина.

Будь який елемент $F \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ розкладається в ряд Фур'є по елементах базису $\{v_k\}, k=\overline{1,\infty}$, тобто має місце представлення

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F, v_k)_4}{(v_k, v_k)_4} v_k(x) \qquad (2.34).$$

Ряд (2.34) збігається в нормі простору $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Нагадаємо, що збіжність ряду в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ означає збіжність в $L_2(\Omega)$ самого ряду (2.34), а також рядів отриманих шляхом однократного диференціювання по $x_i, i=1..n$.

Зауважимо, що крім ортогональності по введеній нормі (2.33), власні функції $\{v_k\}, k=\overline{1,\infty}$ також є ортогональними у просторі $L_2(\Omega)$. Дійсно, з (2.30) та (2.32) випливає $\mu_k (v_k, v_l)_4 = (Bv_k, v_l)_4 = -(v_k, v_l) = 0,\ k \neq l$ (2.35).

Для власних функцій $\{v_k\}, k=\overline{1,\infty}$ можна обрати нормування так що

$$(v_k, v_l) = \delta_{k,l} = -(\lambda_k - \lambda_0)^{-1} (v_k, v_l)_4 \qquad (2.36).$$

В цьому випадку з урахуванням (2.30') ряд (2.34) можна записати у вигляді:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (F, v_k) v_k(x) \qquad (2.37).$$

Оскільки $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ складає щільну множину в $L_2(\Omega)$, то $\{v_k\}, k=\overline{1,\infty}$ будучі базисом в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ є також базисом і в просторі $L_2(\Omega)$, а розвинення в ряд (2.37) має місце не тільки для $F \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, але й для $F \in L_2(\Omega)$ при чому ряд (2.37) збігається в нормі $L_2(\Omega)$. Таким чином має місце теорема:

Теорема 4 *(Про властивості узагальненої граничної задачі на власні значення для еліптичного оператора)* Спектральна задача (2.18’), (2.4’) при виконанні обмежень (2.2), (2.3) в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ має злічену множину власних чисел λ_k та власних функцій v_k $k = 1,2....$. Усі власні числа за винятком декількох перших від’ємні і $\lambda_k \to -\infty, k \to \infty$. Власні функції v_k утворюють базис в $L_2(\Omega)$ та $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормований в $L_2(\Omega)$ і ортогональний в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ по скалярному добутку (2.29). Будь – який елемент $F \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ можна розкласти в ряд Фур’є по системі власних функцій $\{v_k\}_{k=1..\infty}$, який збігається по нормі простору $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

§3 Узагальнені розв’язки другої та третьої граничних задач

[10, стор.112 - 116]

Будемо вивчати граничну задачу:

$$Lu = div(p(x) gradu) + a(x)u = \lambda u + f(x),\ x \in \Omega \qquad (3.1),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u\right|_S = 0 \qquad (3.2).$$

З обмеженнями (2.3), (2.4) та додатковою умовою на функцію $\sigma = \sigma(x)\big|_{x\in S}$

$$|\sigma(x)| \le \mu_3 \qquad (3.3).$$

При дослідженні граничної задачі (3.1), (3.2) ми будемо користуватися деякими допоміжними результатами.

Сліди функцій класу $W_2^k(\Omega)$

Як випливає зі способу побудови простору функцій $W_2^k(\Omega)$, цей простір утворений шляхом поповнення простору $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ по нормі $\sum_{|\alpha|\le k}\int_{\Omega}(D^{\alpha}u(x))^2\,dx$. Кожна функція $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ має значення на границі самої функції та усіх своїх похідних, тобто існує неперервна на границі S функція $u_S(x)\equiv u(x)\big|_{x\in S}$ та функції $u_S^{(\alpha)}(x)=D^{\alpha}u(x)\big|_{x\in S}, |\alpha|\le k$. Оскільки $u_S(x)\in C(S)$ - неперервна функція на S, то $u_S\in L_2(S)$. Функцію $u_S\in L_2(S)$ будемо називати слідом функції $u\in C^{\infty}(\Omega)$ на поверхні S.

Наша задача розповсюдити концепцію слідів для довільних функцій з $W_2^k(\Omega)$ на поверхні S як многовид розмірності $n-1$ Оскільки $W_2^k(\Omega)\subset W_2^1(\Omega)$, достатньо визначити поняття сліду для функцій $W_2^1(\Omega)$. Розглянемо для цього допоміжну нерівність.

Нехай S - поверхня класу C^1, яка лежить в $\overline{\Omega}$, а S_1 її простий кусок який однозначно проектується на частину D площини $x_n=0$, і має рівняння $x_n=\varphi(x_1,\dots x_{n-1})\in C^1(D)$. Оскільки область Ω обмежена, то можна рахувати, що вона розташована у кубі $\{0<x_i<a,\ i=1,\dots n\}$. Розглянемо функцію $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і покладемо її рівною нулю поза межами $\overline{\Omega}$. Згідно формули Ньютона – Лейбніца маємо $u(x)\big|_{S_1}=u(x_1,\dots x_{n-1},\varphi(x_1,\dots x_{n-1}))=\int_0^{\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}\frac{\partial u(x_1,\dots,x_{n-1},\xi)}{\partial\xi}d\xi$. Використовуючи нерівність Коші–Буняківського отримаємо:

$$\left|u_{S_1}\right|^2\le\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\int_0^{\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}\left|\frac{\partial u(x_1,\dots,x_{n-1},\xi)}{\partial\xi}\right|^2d\xi\le a\int_0^a\left|\frac{\partial u(x_1,\dots,x_{n-1},\xi)}{\partial\xi}\right|^2d\xi .$$

Помноживши цю рівність на $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\dots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$ та інтегруючи по D, отримаємо нерівність $\int_{S_1}\left|u_{S_1}(x)\right|^2dS=\|u\|_{L_2(S_1)}^2\le C^2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2$ з постійною C, яка не залежить від функції u. Оскільки поверхню S можна покрити скінченим числом простих кусків, то підсумовуючи попередні нерівності по усіх кусках поверхні S

отримаємо нерівність $\|u\|_{L_2(S)} \le C\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ (3.4).

Нерівність (3.4) має місце для усіх функцій з класу $C^\infty(\overline{\Omega})$. Нехай тепер $u \in W_2^1(\Omega)$, тоді існує фундаментальна послідовність $\{u_n(x)\} \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ n = 1,\ldots\infty$,така, що збігається до функції u в нормі $W_2^1(\Omega)$. Для цієї послідовності має місце нерівність $\|u_p - u_q\|_{L_2(S)} \le C\|u_p - u_q\|_{W_2^1(\Omega)}$ (3.5).

Нерівність (3.5) означає, що послідовність слідів $u_S^{(n)}(x)$ буде фундаментальною в $L_2(S)$.

Оскільки простір $L_2(S)$ є повним, то існує функція $u_S \in L_2(S)$, до якої збігається послідовність слідів $u_S^{(n)}(x)$ по нормі $L_2(S)$. Таким чином функцію $u_S \in L_2(S)$ будемо називати слідом функції $u \in W_2^1(\Omega)$ на поверхні S.

Наші дослідження можна сформулювати у вигляді теореми

Теорема 1 *(Про існування сліду функцій з $W_2^1(\Omega)$)* Нехай Ω область з границею Ліпшица, тоді існує єдиний обмежений оператор T, який відображає простір $W_2^1(\Omega)$ у простір $L_2(S)$, тобто $Tu(x) = u_S(x)$ і при цьому має місце нерівність (3.4).

Оскільки оператор T є обмеженим, а значить неперервним, то близьким в $W_2^1(\Omega)$ функціям відповідають близькі сліди.

Теорема 2 *(Про компактність вкладення $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$).* Якщо Ω обмежена область з кусково - ліпшецевой границею S, то будь – яка обмежена в $W_2^1(\Omega)$ множина функцій є компактною в $L_2(S)$.

Компактність вкладення простору $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$означає, що з будь – якої множини $M \subset W_2^1(\Omega)$, такої, що $\forall u \in M$, $\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C$ можна вибрати збіжну в нормі $L_2(S)$ підпослідовність.

Теорема 3 (*Нерівність Фрідріхса)* Нехай Ω - область з границею Ліпшица, тоді існує така константа $C_1 > 0$, яка залежить лише від області Ω, що для кожної

$u \subset W_2^1(\Omega)$ має місце нерівність

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leq C_1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{S} u^2(x) dS \right\} \qquad (3.6).$$

Нерівність (3.6) випливає з теореми про еквівалентність норм у просторі $W_2^1(\Omega)$ лекції 29.

Дослідження узагальнених розв'язків другої та третьої задачі

Визначення узагальненого розв'язку ведемо за допомогою інтегральної тотожності, для цього помножимо рівняння (3.1) на η, проінтегруємо по області Ω, застосуємо формулу інтегрування за частинами і граничну умову (3.2). В результаті цих перетворень отримаємо інтегральну тотожність:

$$\int_{\Omega} [p(x) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \eta_{x_i} - (a(x) - \lambda) u \eta] dx + \int_{S} \sigma(x) u \eta dS = -\int_{\Omega} f(x) \eta dx \qquad (3.7).$$

Співвідношення (3.6) має зміст для будь – яких $u, \eta \in W_2^1(\Omega)$, оскільки функції цього класу мають узагальнені похідні з $L_2(\Omega)$ та сліди з $L_2(S)$. Таким чином усі інтеграли в (3.6) існують і є обмеженими.

Для випадку, коли функція $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ та коефіцієнти рівняння достатньо гладкі, то з інтегральної тотожності (3.7), шляхом обернених перетворень можна отримати граничну задачу (3.1), (3.2). Тобто, використання інтегральної тотожності розширяє поняття розв'язку для другої та третьої граничних задач.

Означення Будь – який елемент $u \in W_2^1(\Omega)$ будемо називати узагальненим розв'язком граничної задачі (3.1), (3.2), якщо він задовольняє інтегральній тотожності (3.7) для $\forall \eta \in W_2^1(\Omega)$.

Для дослідження узагальненого розв'язку введемо скалярний добуток

$$(u, v)_5 = \int_{\Omega} [p(x) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \eta_{x_i} + u \eta] dx \qquad (3.8).$$

Скалярний добуток (3.7) породжує норму в просторі $W_2^1(\Omega)$ еквівалентну стандартній нормі.

Інтегральну тотожність (3.7) у цьому випадку можна записати у вигляді:

$$(u,\eta)_5 - \int_\Omega [(a(x)+1)u\eta]dx + \lambda\int_\Omega u\eta dx + \int_S \sigma(x)u\eta dS = -\int_\Omega f(x)\eta dx \qquad (3.9).$$

Усі інтеграли в (3.9) представляють собою лінійні неперервні функціонали від η, введемо для них відповідні позначення:

$$-\int_\Omega [(a(x)+1)u\eta]dx = l_u^1(\eta), \qquad -\int_\Omega u\eta dx = l_u^2(\eta),$$

$$\int_S \sigma(x)u\eta dS = l_u^3(\eta), \qquad \int_\Omega f(x)\eta dx = l_f^4(\eta).$$

Лінійність кожного функціоналу є очевидною і випливає з вигляду кожного функціоналу. Неперервність (обмеженість) функціоналів l_u^1, l_u^2, l_f^4 випливає безпосередньо з нерівності Коші Буняківського та вигляду норми (3.8).

Покажемо обмеженість лінійного функціоналу $l_u^3(\eta)$, дійсно:

$$\begin{aligned} \left|l_u^3(\eta)\right| = \left|\int_S \sigma(x)u\eta dS\right| &\le \mu_3 \|u\|_{L_2(S)} \|\eta\|_{L_2(S)} \le \\ \le \mu_3 C^2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|\eta\|_{W_2^1(\Omega)} &\le \mu_3 C^2 C_2^2 \|u\|_5 \|\eta\|_5 \end{aligned} \qquad (3.10).$$

Де C константа з оцінки (3.4), а C_2 - константа еквівалентності норм.

Враховуючи лінійність та неперервність функціоналів, згідно до теореми Ріса – Фішира, кожний функціонал може бути представлений у вигляді:

$$-\int_\Omega [(a(x)+1)u\eta]dx = (Au,\eta)_5 \qquad -\int_\Omega u\eta dx = (Bu,\eta)_5$$

$$\int_S \sigma(x)u\eta dS = (Cu,\eta)_5 \qquad -\int_\Omega f(x)\eta dx = (F,\eta)_5 \qquad (3.11).$$

Оператори, що фігурують у формулах (3.10) є лінійними, обмеженими та цілком неперервними. Цілковита неперервність операторів A, B тепер буде випливати з теореми Релліха.

Покажемо цілковиту неперервність оператора C.

Нехай $\{w_m\}$ - деяка нескінчена множина елементів , яка обмежена в $W_2^1(\Omega)$, тобто $\|w_k\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_3, \forall w_k$, оскільки C - обмежений оператор, то обмеженою в $W_2^1(\Omega)$ буде також і множина елементів $\{Cw_m\}$, тобто $\|Cw_k\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_3\|C\| \ \forall w_k$. З компактності вкладення простору $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$ випливає, що з будь – яких обмежених в $W_2^1(\Omega)$ послідовностей $\{w_m\}$ та $\{Cw_m\}$ можна виділити підпослідовності, сліди яких збігаються в $L_2(S)$ (позначимо їх тими же символами).

Покажемо фундаментальність послідовності $\{Cw_m\}$.

Дійсно:
$$\left(Cw_m - Cw_k, Cw_m - Cw_k\right)_5 = \int_S \sigma(x)(w_m - w_k)C(w_m - w_k)dS \le$$
$$\mu_3\|w_m - w_k\|_{L_2(S)}\|C(w_m - w_k)\|_{L_2(S)} \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0$$

Права частина нерівності прямує до нуля в силу повноти простору $L_2(S)$.

Враховуючи усе викладене, рівність (3.8) можна записати у вигляді:

$$(u,\eta)_5 + (Au,\eta)_5 - \lambda(Bu,\eta)_5 + (Cu,\eta)_5 = (f,\eta)_5 \qquad (3.12).$$

Або враховуючи, що (3.11) повинна виконуватись для будь – якого елементу $\eta \in W_2^1(\Omega)$, можна записати операторне рівняння

$$u + Au - \lambda Bu + Cu = F \qquad (3.13).$$

Перепишемо рівняння (3.13) у вигляді :

$$(E + A + C - \lambda_0 B)u = (\lambda - \lambda_0)Bu + F \qquad (3.14)$$

Позначимо $E + A + C - \lambda_0 B = D$. Враховуючи, що оператор B симетричний від'ємнозначений оператор, то обираючи λ_0 достатньо великим додатнім числом можна показати, що оператор D має обмежений обернений оператор D^{-1}. Таким чином можемо записати рівняння (3.14) у вигляді:

$$u = (\lambda - \lambda_0)D^{-1}Bu + D^{-1}F \qquad (3.14').$$

Оператор $D^{-1}B$ як добуток цілком неперервного і обмеженого оператора є оператором цілком неперервним і симетричним. Таким чином для операторного рівняння (3.14’) можна застосувати три теореми Фредгольма, які визначають умови існування і єдиність розв’язку. Міркування по застосуванню теорем Фредгольма повністю повторюють ті міркування, що наведені для задачі Діріхле, таким чином має місце теорема.

Теорема 4 *(Про існування узагальненого розв’язку другої та третьої граничної задачі)* Друга і третя граничні задачі (3.1), (3.2) мають єдиний розв’язок в $W_2^1(\Omega)$ для будь – якого вільного члена $f \in L_2(\Omega)$ та для усіх дійсних значень параметру λ окрім не більш ніж зліченої множини дійсних значень $\lambda = \lambda_k,\ k = \overline{1,\infty}$, які називаються спектром граничної задачі (3.1), (3.2). Кожне спектральне значення має скінчену кратність, усі власні числа від’ємні за винятком декількох перших і єдиною точкою накопичення власних чисел є $-\infty$. При умові, коли параметр $\lambda = \lambda_k$ розв’язок граничної задачі існує тоді і лише тоді, коли вільний член f ортогональний усім розв’язкам однорідної задачі (3.1’), (3.2’) при $\lambda = \lambda_k$, тобто $\int\limits_\Omega f(x) v_{k+j}(x)dx = 0,\ j = \overline{0, r_k - 1}$, де r_k - кратність власного числа λ_k. В цьому випадку розв’язок неєдиний і визначається з точність до лінійної оболонки $\sum\limits_{j=0}^{r_k-1} c_j v_{k+j}$.