Лекція 29

Нерівність Пуанкаре – Фрідріхса

[10, стор.62 - 63]

Розглянемо обмежену область Ω і покажемо, що для будь – якої функції $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ має місце нерівність Пуанкаре – Фрідріхса.

$$\int_\Omega u^2(x)dx \le C_\Omega^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x)dx \qquad (1.18).$$

Доведення Покажемо справедливість цієї нерівності для будь – якої функції $u(x)$ з $C_0^\infty(\Omega)$. Будемо вважати, що область Ω можна заключити у паралелепіпед $\boldsymbol{\Pi} = \{\boldsymbol{x} : 0 \le \boldsymbol{x}_i \le \boldsymbol{l}_i,\ \boldsymbol{i} = 1,\boldsymbol{n}\}$. За межами області Ω продовжимо функцію $u(x)$ нульовим значенням, тобто $u(x)\equiv 0,\ x\in \Omega'$. Припустимо, що серед усіх сторін паралелепіпеда сторона $\boldsymbol{l}_1$ є найменшою. Позначимо $x_1^{'} = (x_2,...x_n) \subset \Pi_1 = \{x_1', 0 \le x_i \le l_i, i = 2..n\}$, а x_1 - перша координата точки $\boldsymbol{x}$.

Запишемо очевидну рівність $\mathrm{u}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_1^{'}) = \int_0^{\mathrm{x}_1} \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{y}_1,\mathrm{x}_1^{'})}{\partial \mathrm{y}_1}\mathrm{dy}_1$.

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату, проінтегруємо по паралелепіпеду Π і оцінимо праву частину використовуючи нерівність Коші – Буняківського

$$\int_\Pi u^2(x)dx = \int_0^{l_1} dx_1 \int_{\Pi_1} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1,x_1^{'})}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 dx_1' \le \int_0^{l_1} dx_1 \int_{\Pi_1} \left[x_1 \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial u(y_1,x_1')}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 \right] dx_1' =$$

$$= \frac{l_1^2}{2} \int_\Pi \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx \le \frac{l_1^2}{2} \int_\Pi \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

Тобто нерівність (1.18) має місце з константою $C_\Omega = \frac{l_1}{\sqrt{2}}$.

З нерівності (1.18), отриманої для функцій $C_0^\infty(\Omega)$ шляхом використання процедури поповнення, отримаємо, що ця нерівність є справедливою для функції

$u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Зокрема, нерівність (1.18) дозволяє ввести в просторі $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ еквівалентну норму. Покажемо, що $\|u\|_2^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$ є еквівалентною нормою в просторі $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тобто, покажемо, що знайдуться такі константи $C_1 > 0, C_2 > 0$, що $C_1\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le \|u\|_2 \le C_2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$

Дійсно $\|u\|_2^2 = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) \le \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) + \int_\Omega u^2(x)dx = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$, тобто $C_2 = 1$.

Має місце нерівність

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) + \int_\Omega u^2(x)dx \le \left(1 + C_\Omega^2\right)\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) = \left(1 + C_\Omega^2\right)\|u\|_2^2.$$

З останньої нерівності випливає, що $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + C_\Omega^2\right)}}$.

Теорема Релліха. *(теорема про компактність обмеженої множини)* Будь – яка обмежена множина в просторі $W_2^1(\Omega)$ компактна в $L_2(\Omega)$.

Тобто, якщо M така нескінчена множина функцій, що для $\forall u \in M, \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C$, то з M можна виділити нескінчену підмножину, яка збігається в $L_2(\Omega)$ до деякого елементу з цього простору.

Еквівалентні нормування у просторах $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ та $W_2^1(\Omega)$

[8, стор.156 - 159]

Нехай в області Ω з границею $S \in C^1$ задана дійсна неперервна в $\overline{\Omega}$ симетрична матриця $\boldsymbol{P}(x) = \left(p_{i,j}(x)\right)_{i,j=1,n}$, функція $a(x) \in C(\Omega)$, а на границі S функція $\sigma(x) \in C(S)$. Визначимо на $W_2^1(\Omega)$ ермітову білінійну форму

$$W(f,g)=\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j} f_{x_i}\overline{g}_{x_j}+a(x)f\overline{g}\right)dx+\int_{S}\sigma(x)f\overline{g}dS \qquad (1.19).$$

Теорема 1 *(про еквівалентність норм у просторі* $W_2^1(\Omega)$*)* Якщо матриця $\boldsymbol{P}(x)$ додатньо визначена, тобто для кожного комплексного вектора $\xi=(\xi_1,...\xi_n)$ і для усіх $x\in\overline{\Omega}$ $\sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j}\xi_i\overline{\xi}_j\geq\gamma\|\xi\|^2$ з постійною $\gamma>0$, функція $a(x)\geq 0, x\in\overline{\Omega}, \sigma(x)\geq 0,\ x\in S$ та або $a(x)\not\equiv 0$, або $\sigma(x)\not\equiv 0$, то білінійна форма (1.19) визначає в $W_2^1(\Omega)$ скалярний добуток еквівалентний скалярному добутку

$$(f,g)_{W_2^1(\Omega)}=\int_{\Omega}\left[\left(\nabla f,\nabla\overline{g}\right)+f\overline{g}\right]dx \qquad (1.20).$$

Це фактично означає, що існують такі константи $C_1>0, C_2>0$, що має місце нерівність

$$C_2^2\|f\|_{W_2^1(\Omega)}^2\leq W(f,f)\leq C_1^2\|f\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \qquad (1.21).$$

Таким чином, ця теорема дозволяє ввести норму у просторі $W_2^1(\Omega)$

$$\|f\|_*^2=W(f,f) \qquad (1.22)$$

еквівалентну звичайній нормі в цьому просторі.

Доведення Для доведення теореми необхідно встановити справедливість двосторонньої нерівності (1.21). Зауважимо, що в виразі (1.19) кожне з трьох доданків для $W(f,f)$ невід’ємне. Оскільки

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j} f_{x_i}\overline{f}_{x_j}\right)dx\leq p_0\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left|f_{x_i}\right|\left|\overline{f}_{x_j}\right|dx\leq p_0 n\int_{\Omega}\left|\nabla f\right|^2 dx\leq p_0 n\|f\|_{W_2^1(\Omega)}^2,\ p_0=\max_{1\leq i,j\leq n}\left\|p_{i,j}\right\|_{C(\Omega)}$$

$$\int_{\Omega}a(x)\left|f\right|^2 dx\leq a_1\|f\|_{L_2(\Omega)}^2,\ a_1=\|a\|_{C(\Omega)}$$

$$\int_{S}\sigma(x)\left|f\right|^2 dS\leq\sigma_1\|f\|_{L_2(S)}^2\leq C^2\sigma_1\|f\|_{W_2^1(\Omega)}^2,\ \sigma_1=\|\sigma\|_{C(S)}$$

(Дивись нерівність (3.4) лекції 30). З цих нерівностей випливає, що права нерівність (1.21) має місце з постійною $C_1^2=p_0 n+a_1+\sigma_1 C^2$.

Покажемо справедливість лівої нерівності (1.21), а саме покажемо що має місце нерівність $\|f\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \frac{1}{C_2^2} W(f,f)$.

Припустимо зворотне, що відповідної константи C_2 не існує. Тоді для довільного цілого $m \ge 1$ знайдеться така функція $f_m(x) \in W_2^1(\Omega)$, що $\|f_m\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ge mW(f_m, f_m)$, або знайдеться $g_m(x) = \frac{f_m(x)}{\|f_m\|_{W_2^1(\Omega)}}$, $\|g_m\|_{W_2^1(\Omega)} = 1$ така, що $W(g_m, g_m) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j} g_{mx_i} \overline{g}_{mx_j} + a(x)|g_m|^2 \right) dx + \int\limits_{S} \sigma(x)|g_m|^2 dS \le \frac{1}{m}$. Звідси випливає, що кожне з доданків останньої нерівності не перевищує $\frac{1}{m}$ і тому мають місце нерівності: $\int\limits_{\Omega} a|g_m|^2 dx < \frac{1}{m}$; $\int\limits_{S} \sigma|g_m|^2 dS < \frac{1}{m}$; $\int\limits_{\Omega} |\nabla g_m|^2 dx < \frac{1}{m\gamma}$. (1.23).

З (1.23) випливає, що послідовність g_m, $m = 1, 2...$ обмежена в $W_2^1(\Omega)$, тому з неї можна обрати фундаментальну в $L_2(\Omega)$ послідовність нехай це є послідовність g_m, $m = 1, 2...$, тобто $\|g_m - g_p\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, $m, p \to \infty$

Розглянемо
$$\|g_m - g_p\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \|g_m - g_p\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \left|\nabla\left(g_m - g_p\right)\right| \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|g_m - g_p\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\left\||\nabla g_m|\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\left\||\nabla g_p|\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|g_m - g_p\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{p\gamma} \underset{p,m\to\infty}{\to} 0$$

Таким чином послідовність g_m, $m = 1, 2...$ фундаментальна в просторі $W_2^1(\Omega)$ і тому збігається по нормі цього простору до деякого елементу $g \in W_2^1(\Omega)$.

Переходимо до границі при $m \to \infty$, отримаємо $\|g\|_{W_2^1(\Omega)} = 1$, $\int\limits_{\Omega} |\nabla g|^2 dx = 0$, $\int\limits_{\Omega} a|g|^2 dx = 0$, $\int\limits_{S} \sigma|g|^2 dS = 0$. (1.24).

З перших двох рівностей випливає, що $g(x) = const, x \in \Omega$, звідси маємо $g(x) = 1 \big/ \sqrt{|\Omega|}, x \in \Omega$ таким чином маємо протиріччя з двома останніми рівностями (1.24) і теорема доведена.

§ 2 Узагальнені розв'язки задачі Діріхле еліптичних рівнянь в просторі $W_2^1(\Omega)$

[10, стор.91 - 103]

Будемо розглядати лінійне еліптичне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$Lu = div(p(x)gradu) + a(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \qquad (2.1).$$

Головна частина рівняння (2.1) $div(p(x)gradu)$ допускає узагальнення вигляду $\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),\ p_{i,j}(x) = p_{j,i}(x)$ (2.2).

Для рівняння (2.1) будемо припускати, що $\nu \le p(x) \le \mu, \quad \nu, \mu > 0$ (2.3),

$a_1 \le a(x) \le a_2$ (2.3').

Для головної частини (2.2) умова (2.3) трансформується в умову $\nu\xi^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} p_{i,j}\xi_i\xi_j \le \mu\xi^2,\ \xi^2 = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ (2.3'').

Для рівняння (2.1) будемо розглядати три основні граничні задачі:

з умовами Діріхле $\left.u\right|_S = \varphi(x)$ (2.4),

Неймана $\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = \varphi(x)$ (2.5),

або Ньютона $\left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u\right|_S = \varphi(x)$ (2.6).

Де $\frac{\partial u}{\partial N} = p(x)\frac{\partial u}{\partial n}$, для головної частини (2.2) $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j}(x)u_{x_j}\cos(n, x_i)$, а n - одинична зовнішня нормаль до поверхні S.

Усі перераховані задачі можуть бути зведені до задач з однорідним граничними умовами, тобто такими умовами, що $\varphi(x) \equiv 0$.

Для цього необхідно записати граничну задачу відносно нової функції

$v(x) = u(x) - \Phi(x)$, де функція $\Phi(x)$ задовольняє відповідній граничній умові та належить простору $W_2^1(\Omega)$.

Відносно f та $f_i,\ i = \overline{1,n}$ будемо рахувати, що $\|f\|_{L_2(\Omega)} < \infty \quad \|\boldsymbol{f}\|_{L_2(\Omega)} < \infty$.

Розглянемо граничну задачу для рівняння (2.1) з однорідними граничними умовами $$\mathrm{u}\big|_{\mathrm{S}} = 0 \qquad (2.4').$$

Введемо білінійну форму:

$$L(u,\eta) := \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} p(x) u_{x_i} \eta_{x_i} - a(x) u \eta \right) dx = \int\limits_{\Omega} \left(-f\eta + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f_i} \eta_{x_i} \right) dx \qquad (2.7).$$

Рівність (2.7) можна отримати з рівняння (2.1) шляхом множення його на функцію η, інтегрування добутку по області Ω, застосування формули інтегрування за частинами та використанням умови (2.4').

Означення 1 Функцію $u(x)$ з простору $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ будемо називати узагальненим розв'язком задачі Діріхле (2.1), (2.4'), якщо для кожного елементу $\eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ має місце інтегральна тотожність (2.7).

Інтегральна тотожність (2.7) має зміст для більш широкого класу функцій ніж гранична задача (2.1), (2.4'). Цілком зрозуміло, що якщо обрати функцію $\eta(x),\ u(x) \in C_\infty^0(\Omega)$, то шляхом інтегрування за частинами можемо перейти від інтегральної тотожності до диференціального рівняння (2.1).

В той же час інтегральна тотожність (2.7) має зміст для функцій $u, \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким чином з використанням інтегральної тотожності (2.7) ми розширили поняття розв'язку граничної задачі Діріхле.

Отримаємо для узагальненого розв'язку енергетичну тотожність, яка дозволить нам довести єдиність узагальненого розв'язку задачі Діріхле.

Розглянемо квадратичну форму і запишемо нерівності:

$$L(u,u)=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n p(x)u_{x_i}^2-a(x)u^2\right)dx\ge\int_\Omega\left(\nu\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2-a_2u^2\right)dx=\nu\|u_x\|^2-a_2\|u\|^2\ge$$
$$\left(\frac{\nu}{C_\Omega^2}-a_2\right)\|u\|^2=\delta_1\|u\|^2, \qquad (2.8).$$

$$\delta_1=\left(\frac{\nu}{C_\Omega^2}-a_2\right) \qquad (2.8').$$

В нерівності (2.8) використані наступні позначення $\|u_x\|^2=\int_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x)dx,\quad \|u\|^2=\int_\Omega u^2(x)dx$. Якщо $\delta_1>0$, то з (2.8) можна отримати

$$\nu\|u_x\|^2\le L(u,u)+a_2\|u\|^2\le\left(1+\frac{a_2}{\delta_1}\right)L(u,u) \qquad (2.9),$$

або з (2.9) маємо $L(u,u)\ge\delta_2\|u_x\|^2,\quad \delta_2=\dfrac{\nu\delta_1}{\delta_1+a_2}$ (2.10).

Для узагальненого розв’язку u з $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачі Діріхле, виходячи з (2.7), нерівності Буняківського та ε-нерівності, можна записати наступну нерівність:

$$L(u,u)=-(f,u)_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left(\boldsymbol{f_i},u_{x_i}\right)_{L_2(\Omega)}\le\|f\|\|u\|+\|\boldsymbol{f}\|\|u_{x_i}\|\le\varepsilon_1\|u\|^2+$$
$$\frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|^2+\varepsilon_2\|u_x\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|\boldsymbol{f}\|^2 \qquad (2.11).$$

Таким чином, маємо з (2.10) та (2.11)

$$\delta_2\|u_x\|^2\le\|f\|\|u\|+\|\boldsymbol{f}\|\|u_{x_i}\|\le\varepsilon_1\|u\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|^2+\varepsilon_2\|u_x\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|\boldsymbol{f}\|^2\le$$
$$(\varepsilon_1C_\Omega^2+\varepsilon_2)\|u_x\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|\boldsymbol{f}\|^2 \qquad (2.12).$$

Оберемо в (2.12) $\varepsilon_2=\dfrac{\delta_2}{4},\ \varepsilon_1=\dfrac{\delta_2}{4C_\Omega^2}$ Таким чином з (2.12) отримаємо

$$\frac{\delta_2}{2}\|u_x\|^2\le\frac{C_\Omega^2}{\delta_2}\|f\|^2+\frac{1}{\delta_2}\|\boldsymbol{f}\|^2 \text{ або } \qquad \|u_x\|^2\le\frac{2}{\delta_2^2}\left(C_\Omega^2\|f\|^2+\|\boldsymbol{f}\|^2\right) \qquad (2.13).$$

Враховуючи, що $\|u_x\|^2$ - еквівалентна нормі $\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$ має місце теорема

Теорема 1 (*єдиності узагальненого розв'язку задачі Діріхле)* Задача Діріхле для рівняння (2.1), з однорідними граничними умовами (2.4) $(\varphi(x)\equiv 0)$ при виконанні умови (2.3), (2.4) може мати лише єдиний розв'язок при виконанні умови $\delta_1=\left(\frac{\nu}{C_\Omega^2}-a_2\right)>0$ в класі $W_2^1(\Omega)$.

З оцінки (2.13) випливає, що однорідна гранична задача, коли $\|f\|=0,\ \|\boldsymbol{f}\|=0$, має лише тривіальний розв'язок, а це означає, що вихідна задача Діріхле дійсно може мати лише єдиний розв'язок.

Дослідження існування розв'язку граничної задачі Діріхле

В просторі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ розглянемо скалярний добуток

$$(u,v)_3=\int_\Omega p(x)\sum_{i=1}^n u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)dx \qquad (2.14).$$

Неважко перевірити з врахуванням теореми *про еквівалентність норм у просторі* $W_2^1(\Omega)$, що (2.14) задовольняє усім аксіомам скалярного добутку, який породжує ще одну норму еквівалентну стандартній нормі в просторі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$

$$\|u\|_3^2=(u,u)_3 \qquad (2.14').$$

Враховуючи введену норму, білінійну форму $L(u,\eta)$ можна записати у вигляді:

$$L(u,\eta):=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n p(x)u_{x_i}\eta_{x_i}-a(x)u\eta\right)dx=(u,\eta)_3+l_u(\eta)=-(f,\eta)+\sum_{i=1}^n(f_i,u_{x_i}) \qquad (2.15),$$

де $l_u(\eta)=\int_\Omega -a(x)u(x)\eta(x)dx$- лінійний неперервний функціонал від η, тобто $|l_u(\eta)|\le a_2\|u\|\|\eta\|\le C_\Omega^2a_2\|u_x\|\|\eta_x\|\le C_3^2C_\Omega^2a_2\|u\|_3\|\eta\|_3$, C_3 - константа еквівалентності між нормами. Вираз $l_f(\eta)=-(f,\eta)+(f_i,\eta_{x_i})=-\int_\Omega f(x)\eta(x)dx+\int_\Omega f_i(x)\eta_{x_i}(x)dx$,- лінійний неперервний функціонал, аналогічно $l_u(\eta)$ з використанням нерівності Коші –

Буняківського та нерівності еквівалентних норм можна показати обмеженість функціоналу $l_f(\eta)$.

Згідно з теоремою Ріса – Фішира можна записати представлення $l_u(\eta) = (v,\eta)_3$. Остання рівність встановлює взаємно однозначну неперервну відповідність між єдиним елементом u та v, які належать $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, тобто $l_u(\eta) = (v,\eta)_3 = (Au,\eta)_3$, де A - лінійний обмежений оператор з $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ у $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ Лінійність і обмеженість оператора випливає з лінійності і обмеженості лінійного функціоналу $l_u(\eta)$.

Аналогічно, лінійний неперервний функціонал $l_f(\eta) = -(f,\eta) + \sum_{i=1}^{n}(f_i, u_{x_i})$-, за теоремою Ріса – Фішира можна записати у вигляді $l_f(\eta) = (F,\eta)_3$. Де $F \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Таким чином інтегральну тотожність (2.15), яка визначає узагальнений розв'язок задачі Діріхле можна записати для довільного значення $\eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ у вигляді: $(u,\eta)_3 + (Au,\eta)_3 = (F,\eta)_3$ (2.16).

Рівність (2.16) в свою чергу еквівалентна операторному рівнянню в просторі

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\quad u + Au = F$ (2.17).

Дослідимо властивості оператора A і покажемо, що цей оператор є цілком неперервним в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, тобто відображає будь – яку обмежену множину елементів в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в компактну множину в цьому просторі.

Розглянемо послідовність $\{v_m\}_{m=1,\infty}$ з рівномірно обмеженими нормами, тобто $\|v_m\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C_0,\ m = 1,2...$, тоді за рахунок обмеженості оператора A послідовність $\{Av_m\}_{m=1,\infty}$ теж рівномірно обмежена, тобто $\|Av_m\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C_0 \|A\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega} = C_1\ ,m = 1,2...$

З теореми Реліха випливає, що з обмеженої в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ послідовності можна обрати збіжну в $L_2(\Omega)$ підпослідовність. Таким чином з $\{v_m\}_{m=1,\infty}$ та $\{Av_m\}_{m=1,\infty}$ можна обрати підпослідовності $\{v_{m_k}\}_{m_k=1,\infty}$ та $\{Av_{m_k}\}_{m_k=1,\infty}$, які збігаються в $L_2(\Omega)$.

Розглянемо
$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{A}(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}}-\mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}),\mathrm{A}(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}}-\mathrm{v}_{\mathrm{m_n}})\right)_3 = 1_{(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}}-\mathrm{v}_{\mathrm{m_n}})}(\mathrm{A}(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}}-\mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}))\\ &\le \max(|\mathrm{a}_1|,|\mathrm{a}_2|)\|\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}}-\mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}\|\left\|\mathrm{A}\left(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}}-\mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}\right)\right\| \xrightarrow[\mathrm{k,n}\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

Таким чином послідовність $\{Av_{m_k}\}_{m_k=1,\infty}$ є фундаментальною в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, а оскільки цей простір є повним, то послідовність $\{Av_{m_k}\}_{m_k=1,\infty}$ збігається в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким чином оператора A переводить будь – яку обмежену множину елементів в компактну множину в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, а значить є цілком неперервним.

Таким чином для операторного рівняння (2.17) можна застосувати першу теорему Фредгольма з якої випливає наступна теорема.

Теорема 2 *(Про існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле)* Якщо задача Діріхле (2.1), (2.4') може мати не більш одного узагальненого розв'язку з $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, то вона дійсне має розв'язок в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ для будь – яких f, $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega)$.

Дослідження існування розв'язку граничної задачі Діріхле з параметром

Розглянемо більш загальне рівняння з комплексним параметром λ:

$$Lu = div(p(x)gradu) + a(x)u = \lambda u + f(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \qquad (2.18).$$

Коефіцієнти рівняння (2.18) як і раніше будемо вважати дійсними, в той же час $u(x)$ вважаємо комплексно значними.

Введемо скалярні добутки

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\bar{v}(x)dx \quad (u,v)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega} = \int_\Omega\left(u(x)\bar{v}(x) + \sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\bar{v}_{x_i}\right)dx \qquad (2.19).$$

Узагальнений розв'язок задачі Діріхле (2.18), (2.4') в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ визначимо використовуючи тотожність:

$$L(u,\overline{\eta}) := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n p(x) u_{x_i} \overline{\eta_{x_i}} - a(x) u \overline{\eta} \right) dx = -\lambda \int_\Omega u \overline{\eta} dx + \int_\Omega \left(-f\eta + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{f}_i \eta_{x_i} \right) dx \qquad (2.20)$$

для $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для перетворення (2.20) до операторного рівняння введемо скалярний добуток $(u,v)_3 = \int_\Omega p(x) \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x) \overline{v}_{x_i}(x) dx$ (2.14').

Цей скалярний добуток так само , як і в дійсному випадку породжує норму еквівалентну стандартній нормі в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Використовуючи аналогічні міркування з попереднім випадком, прийдемо до наступного співвідношення

$$L(u,\overline{\eta}) = (u,\overline{\eta})_3 + (Au,\overline{\eta})_3 = \lambda (Bu,\overline{\eta})_3 + (F,\overline{\eta})_3, \forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega \qquad (2.21).$$

В цьому співвідношенні усі доданки мають зміст аналогічний попередньому, а $l_u^{(1)}(\eta) = \left(Bu, \overline{\eta} \right)_3 = -\int_\Omega u \overline{\eta} dx$ (2.22)

є лінійний неперервний функціонал, який породжує згідно до теореми Ріса – Фішера лінійний обмежений оператор B за формулою (2.22)

Аналогічно попередньому випадку можна довести, що оператори A та B є цілком неперервними операторами. Легко бачити, що в нашому випадку лінійний функціонал в правій частині (2.22) є частинним випадком лінійного неперервного функціоналу $\int_\Omega -a(x) u(x) \overline{\eta(x)} dx = l_u(\eta) = \left(Au, \overline{\eta} \right)_3$ при $a \equiv 1$.

Більш того, зауважимо, що оператори A та B є симетричними, а значить і самоспряженими, і крім того оператор B є від'ємним, тобто $(Bu,u)_3 < 0, u \neq 0$ Ці властивості операторів A та B безпосередньо випливають з симетричності лінійних функціоналів $l_u^{(1)}(\eta)$ та $l_u(\eta)$, які визначають відповідні оператори.

З рівняння (2.21) випливає, що має місце операторна рівність

$u + Au = \lambda Bu + F$ (2.23).

Запишемо (2.23) у вигляді $u + Au - \lambda_0 Bu = (\lambda - \lambda_0)Bu + F$ (2.23’).

Покажемо, що при достатньо великому дійсному λ_0 оператор

$\left(E - A - \lambda_0 B\right) \equiv D$ (2.24)

має обернений обмежений оператор. Для цього позначимо $Dv = w$. Згідно до (2.24), остання рівність еквівалентна тотожності (2.21) при $\lambda = \lambda_0$, $u = v$, $f = w,\ f_i = 0$, тобто $\left(Dv, \eta\right)_3 = \left(w, \eta\right)_3$

З цієї тотожності для $\eta = v$ отримаємо нерівність:

$$\left(v, w\right)_3 = \left(\left(E - A - \lambda_0 B\right)v, v\right)_3 = L(v, \overline{v}) + \lambda_0 \left\|v\right\|^2 \geq \nu \left\|v_x\right\|^2 + (\lambda_0 - a_2)\left\|v\right\|^2.$$

З останньої нерівності випливає, що при $\lambda_0 \geq a_2$, оператор D є додатньо визначеним, що гарантує наявність обмеженого оберненого оператора D^{-1}.

Таким чином рівність (2.23’) можна записати у вигляді:

$u = (\lambda - \lambda_0)D^{-1}Bu + D^{-1}F$ (2.23’’).

Оператор $D^{-1}B$, як добуток обмеженого на цілком неперервного операторів є оператор цілком неперервний. Завдяки цьому для операторного рівняння (2.23’’) можна застосувати три теореми Фредгольма.