Зміст

4 Дослідження граничних задач математичної фізики та методів побудови їх розв'язків

4.1 Поняття узагальнених функцій та дії над ними

Поняття узагальнених функцій виникло як результат природного розширення класичного поняття функції. Так, виконання деяких дій над класичними функціями виводить за межи таких. Вперше узагальнену функцію в математичні дослідження у 1947 році ввів англійський фізик Поль Дірак у своїх квантово-механічних дослідженнях. Така функція отримала назву δ-функція Дірака. Ця функція дозволяє записати просторову щільність фізичної величини (маси, величини заряду, інтенсивності джерела тепла, сили тощо) зосередженої або прикладеної в одній точці.

Розглянемо приклад, який дає уявлення про δ-функцію.

Приклад 4.1.0.1

Нехай ε-окіл точки x прямої є джерелом тепла одиничної інтенсивності. Будемо припускати також, що джерело рівномірно розподілене по довжині ε-околу. Враховуючи припущення, джерело тепла може бути описане наступною функцією

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < -\varepsilon, \\ 1/2\varepsilon, & -\varepsilon \le x < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \le x. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Зауваження 4.1.0.1 — При цьому важливо, що сумарна кількість тепла, що виділяється ε-околом дорівнює одиниці, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.2}$$

Припустимо, що фізичний розмір джерела такий малий, що його розмірами можна нехтувати, тобто будемо вважати що джерело є точковим.

В цьому випадку природно визначити функцію

$$f_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Легко бачити, що інтеграл Лебега функції $f_0(x)$ існує і дорівнює нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.1.4}$$

Тобто користуючись звичайним граничним переходом (поточковою границею) ми отримуємо функцію, яка не моделює одиничне точкове джерело тепла.

Для коректного визначення граничної функції будемо розглядати замість сильної (поточкової) границі, слабку границю.

Введемо набір пробних функцій $D(\mathbb{R}^n) = C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ — множину нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}^n$ функцій з компактним носієм.

Зауваження 4.1.0.2 — Нагадаємо, що функція має компактний носій якщо існує куля $U_A(0)$ радіусу A, за межами якої функція обертається в тотожній нуль разом з усіма своїми похідними.

Твердження 4.1.0.1

Виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \tag{4.1.5}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$.

Доведення. Справді:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0)\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)(\varphi(x)-\varphi(0))\,\mathrm{d}x\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi(x)-\varphi(0)|\,\mathrm{d}x = \tag{4.1.6}$$
$$= \frac{\eta(\varepsilon)}{2\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{d}x = \eta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Це означає, що слабка границя дорівнює $\varphi(0)$ для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$. $\square$

Зауваження 4.1.0.3 — Тут ми винесли середнє значення підінтегралньої функції $g(x) = |\varphi(x) - \varphi(0)|$ з-під інтегралу, тобто $\eta(\varepsilon) = g(\xi) = |\varphi(\xi) - \varphi(0)|$, де $\xi = \xi(\varepsilon)$ — якась середня точка, $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Далі, $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \to 0$ при $\xi \to 0$, а $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ бо $|\xi| < |\varepsilon|$.

Нарешті, $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ адже φ — неперервна, тобто $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \to 0$ при $\xi \to 0$, і знову-ж-таки $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ бо $|\xi| < |\varepsilon|$.

Таким чином δ-функцію Дірака можна визначити, як слабку границю послідовності функції f_ε на множині $D(\mathbb{R}^1)$, що збігається до числа $\varphi(0)$ при $\varepsilon \to 0$.

Можна записати

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.7}$$

Останню рівність будемо розглядати як лінійний неперервний функціонал, який будь-якій функції φ ставить у відповідність число $\varphi(0)$.

Визначення 4.1.0.1 (узагальненої функції)**.** *Узагальненою функцією f* будемо називати будь-який лінійний неперервний функціонал заданий на множині основних (пробних) функцій $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Зауваження 4.1.0.4 — Лінійність і неперервність розуміємо в традиційному сенсі:

$$\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \rangle = a_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + a_2 \langle f, \varphi_2 \rangle\,, \tag{4.1.8}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \langle f, \varphi_k \rangle = 0, \tag{4.1.9}$$

для довільної $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що $D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ для довільних $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Серед усіх узагальнених функцій виділяють клас регулярних узагальнених функцій.

Визначення 4.1.0.2 (регулярної функції)**.** *Регулярними* називаються функції, які можуть бути представлені у вигляді

$$\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.1.10}$$

з функцією $f(x) \in L^1_{\text{loc}}$ — тобто абсолютно інтегровною функцією на будь-якому компакті, що належить $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 4.1.0.5 — Кожна локально інтегрована функція визначає *єдину* регулярну узагальнену функцію і навпаки, кожна регулярна узагальнена функція визначає *єдину* локально інтегровану функцію.

Зауваження 4.1.0.6 — *Єдиність* означає, що дві локально інтегровані функції співпадають якщо вони відрізняються між собою на множині нульової міри.

Визначення 4.1.0.3 (сингулярної функції)**.** Усі інші лінійні неперервні функціонали визначають *сингулярні* узагальнені функції.

Приклад 4.1.0.2 (сингулярної функції)

δ-функція Дірака.

Зауваження 4.1.0.7 — Дуже часто узагальнені функції називають також *розподілами*.

Хоча сингулярні узагальнені функції є частинним випадком узагальнених функцій, але для їх представлення найчастіше використовується позначення скалярного добутку таке саме як і для регулярних узагальнених функцій.

Справа в тому, що

Твердження 4.1.0.2
Для будь-якої сингулярної узагальненої функції $f : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ можна побудувати послідовність регулярних узагальнених функцій, яка слабко збігається до неї, тобто $\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ така, що

$$\lim_{k \to \infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.1.11}$$

Зауваження 4.1.0.8 — Ця послідовність не єдина.

Зауваження 4.1.0.9 — δ-функцію ми побудували як границю $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon$, яку можна було назвати *δ-образною* послідовністю.

Можна навести і інші

Приклади 4.1.0.3 (δ-образних послідовностей)
δ-образними послідовностями також є:

- $f_m(x) = \dfrac{m}{\pi(1 + m^2x^2)}$;
- $f_m(x) = \dfrac{\sin mx}{\pi x}$;
- $f_m(x) = \dfrac{m}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{m^2x^2}{2}\right\}$.

Зауваження 4.1.0.10 — Константи у знаменниках тут для того, щоби

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.12}$$

4.1.1 Узагальнені функції та фізичні розподіли

Узагальнені функції (часто їх називають розподілами) можна інтерпретувати як розподіл електричних, магнітних зарядів або розподіл мас, тощо. Так наприклад функцію Дірака можна трактувати як щільність з якою розподілена маса, що дорівнює одиниці в точці $x = 0$.

Визначення 4.1.1.1 (зсунутої δ-функції)**.** Аналогічним чином можна ввести і зсунуту функцію Дірака.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a). \tag{4.1.13}$$

Зауваження 4.1.1.1 — Використовуючи цю формулу можна зобразити щільність розподілу зосереджених мас або іншої фізичної величини в точках прямої.

Приклад 4.1.1.1

Так, якщо в точках x_i розташовані зосереджені маси m_i, $i \in I$, то щільність такого розподілу мас можна зобразити у вигляді

$$\rho(x) = \sum_{i\in I} m_i \cdot \delta(x - x_i). \tag{4.1.14}$$

Зауваження 4.1.1.2 — При цьому повну масу, яка зосереджена на прямій можна порахувати за формулою

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i\in I} m_i. \tag{4.1.15}$$

Визначення 4.1.1.2 (δ-функції в $\mathbb{R}^n$)**.** Аналогічно δ-функції, введеній на прямій, можна ввести δ-функцію для n-вимірного евклідового простору:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a). \tag{4.1.16}$$

Зауваження 4.1.1.3 — Тоді щільність розподілу точкових мас у просторі можна також записати у вигляді

$$\rho(x) = \sum_{i \in I} m_i \cdot \delta_3(x - x_i). \tag{4.1.17}$$

Нагадаємо

Твердження 4.1.1.1

Точковий одиничний електричний заряд розташований в точці x_0 створює потенціал рівний

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(y-x_0)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|} = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} \tag{4.1.18}$$

в точці $x \in \mathbb{R}^3$.

Зауваження 4.1.1.4 — В цьому випадку $\delta(y-x_0)$ можна сприймати як щільність одиничного точкового заряду.

Приклад 4.1.1.2

Якщо щільність зарядів $f(y)$ представляє собою локально інтегровану функцію, то маємо для потенціалу електростатичного поля відому формулу електростатики:

$$P(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|}. \tag{4.1.19}$$

Визначення 4.1.1.3 (поверхневої функції Дірака)**.** Узагальненням точкової функції Дірака є так звана *поверхнева функція Дірака* δ_S, яку можна визначити як лінійний неперервний функціонал:

$$\varphi \mapsto \langle \delta_S, \varphi \rangle = \iint\limits_S \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.20}$$

Зауваження 4.1.1.5 — Ця узагальнена функція може бути інтерпретована як щільність розподілу зарядів на поверхні S.

Приклад 4.1.1.3

Потенціал електростатичного поля можна записати у вигляді

$$W(x) = \left\langle \mu(y)\delta_S(y), \frac{1}{4\pi|x-y|} \right\rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(y)\delta_S(y)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|} = \iint\limits_S \frac{\mu(y)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|}. \tag{4.1.21}$$

Визначення 4.1.1.4 (потенціалу простого шару)**.** Легко бачити, що $W(x)$ представляє собою потенціал електростатичного поля, утворений зарядженою поверхнею S і називається *потенціалом простого шару*.

4.1.2 Дії над узагальненими функціями

Головною перевагою узагальнених функцій є те, що будь-яка узагальнена функція має похідні будь-якого порядку.

Для визначення похідної узагальненої функції розглянемо звичайну неперервно диференційовну функцію $f(x)$ і згадаємо, що виконується наступна

Формула 4.1.2.1 (інтегрування за частинами)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha_1\ldots\alpha_n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.1.22}$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, яка є істинною для будь-якої функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Права частина цієї рівності має зміст для будь-якої локально-інтегровної функції f.

Таким чином можемо дати

Визначення 4.1.2.1 (похідної локально-інтегровної функції)**.** *Похідною* $D^{\alpha_1\dots\alpha_n}$ будь-якої локально-інтегровної функції f будемо називати лінійний неперервний функціонал

$$\langle D^{\alpha_1\dots\alpha_n} f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) D^{\alpha_1\dots\alpha_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.23}$$

Аналогічним чином вводиться похідна і для сингулярних узагальнених функцій.

Визначення 4.1.2.2 (похідної сингулярних функцій)**.** $D^{\alpha_1\dots\alpha_n} f$ визначається як лінійний неперервний функціонал

$$\langle D^{\alpha_1\dots\alpha_n} f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^{\alpha_1\dots\alpha_n}\varphi\rangle\,. \tag{4.1.24}$$

Розглянемо приклади обчислення похідних деяких узагальнених функцій:

Приклад 4.1.2.1

Знайти θ', де

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \end{cases} \tag{4.1.25}$$

— функція Хевісайда.

Розв'язок. Розглянемо наступні рівності:

$$\langle \theta', \varphi\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\ = -(\varphi(\infty) - \varphi(0)) = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0) - 0 = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle\,. \tag{4.1.26}$$

Таким чином можна записати $\theta' = \delta$.

Приклад 4.1.2.2

Знайти $\delta^{(2)}$.

Розв'язок.

$$\left\langle \delta^{(2)}, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta, \varphi^{(2)} \right\rangle = \varphi^{(2)}(0). \tag{4.1.27}$$

Приклад 4.1.2.3

f — кусково неперервно-диференційовна функція, яка має в деякій точці x_0 розрив першого роду.

Розв'язок.

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -f(x_0 - 0) + \varphi(x_0) + f(x_0 + 0)\varphi(x_0) + \\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \varphi(x_0)[f(x_0)] + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \varphi(x_0)[f(x_0)] + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)'\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big([f(x_0)] \cdot \delta(x - x_0) + \{f(x)'\} \Big) \varphi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

де $[f(x_0)] = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, $\{f'(x)\}$ — локально інтегрована функція, яка співпадає з звичайною похідною функції f в усіх точках де вона існує.

Зауваження 4.1.2.1 — Таким чином для функції, яка має скінченну кількість точок розриву першого роду має місце така формула обчислення похідної:

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_i [f(x_i)]\delta(x - x_i). \tag{4.1.29}$$

Приклад 4.1.2.4

Нехай функція $f(x)$ задана в просторі $\mathbb{R}^3$ кусково неперервно-диференційовна і має розрив першого роду на кусково–гладкій поверхні S. Будемо припускати, що поверхня розділяє простір $\mathbb{R}^3$ на два півпростори $\mathbb{R}^3_+$ та $\mathbb{R}^3_-$.

Розв'язок. Зафіксуємо на S напрям нормалі, яка направлена всередину $\mathbb{R}^3_+$.

Визначимо похідну від $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= -\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_-} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\
&= \iint\limits_{S} f(x+0)\varphi(x)\cos(n, x_i)\,\mathrm{d}S - \\
&\quad - \iint\limits_{S} f(x-0)\varphi(x)\cos(n, x_i)\,\mathrm{d}S + \\
&\quad + \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_-} \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\
&= \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S(x)\cos(n, x_i) \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

де $\{\partial f(x)/\partial x_i\}$ — класична похідна функції $f(x)$ в усіх точках, де вона існує, $[f(x)]_S = (f(x+0) - f(x-0))|_{x\in S}$ — стрибок функції $f(x)$ на поверхні S.

Таким чином можна записати, що

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S(x)\cos(n, x_i)\delta_S(x). \tag{4.1.31}$$

4.1.3 Носій та порядок узагальнених функцій

Вводячи поняття узагальнених функцій ми використовували множину основних (пробних) функцій $D(\mathbb{R}^n) = C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$. Взагалі кажучи, простір пробних функцій (а таким чином і розподілів) можна узагальнити, ввівши простір основних функцій як $D(\Omega) = C_{\infty}^{0}(\Omega)$, тобто клас пробних функцій складається з функцій, які нескінченно-диференційовні в Ω і на границі $\partial\Omega$ перетворюються в нуль разом з усіма своїми похідними.

Для побудови функцій такого класу використовуються ε-шапочки.

Визначення 4.1.3.1 (ε-шапочки)**.** ε-шапочкою називається функція

$$\omega_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} C_{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right\}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases} \tag{4.1.32}$$

Зауваження 4.1.3.1 — Сталу C_{ε} обираємо так, щоби

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.33}$$

Легко бачити, що

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon}(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x). \tag{4.1.34}$$

Це означає, що ε-шапочки слабко збігаються до $\delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$.

Введемо функцію

$$\eta(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\omega_{\varepsilon}(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.1.35}$$

де $\chi(x)$ – характеристична функція множини $\Omega_{2\varepsilon}$, тобто

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0, & x \notin \Omega_{2\varepsilon}, \end{cases} \tag{4.1.36}$$

а множина $\Omega_{2\varepsilon}$ утворилася з множини Ω шляхом відступу всередину Ω від границі на полосу ширини 2ε.

Тоді будь-яка функція $\varphi(x) = \eta(x)f(x) \in D(\Omega)$ якщо $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Таким чином можна утворити достатньо широкий клас пробних функцій.

Зауваження 4.1.3.2 — Узагальнені функції взагалі кажучи не мають значень в окремих точках.

В той же час можна говорити про обертання узагальненої функції на нуль у деякій області.

Визначення 4.1.3.2 (обертання узагальненої функції на нуль). Будемо говорити, що узагальнена функція f *обертається на нуль* у області Ω, якщо $\langle f, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

Визначення 4.1.3.3 (нульової множини узагальненої функції). *Нульовою множиною* O_f узагальненої функції f будемо називати об'єднання усіх областей у яких узагальнена функція f обертається на нуль.

Визначення 4.1.3.4 (носія узагальненої функції). *Носієм* $\operatorname{supp} f$ узагальненої функції f називають множину $\mathbb{R}^n \setminus O_f$.

Визначення 4.1.3.5 (порядку узагальненої функції). Будемо говорити, що узагальнена функція f має *порядок сингулярності* (або просто порядок) $\leq j$, якщо

$$f = \sum_{|\alpha| \leq j} D^\alpha g_\alpha, \tag{4.1.37}$$

де $g_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Якщо число j у цій формулі неможливо зменшити, то кажуть що порядок узагальненої функції f *дорівнює* j.

Нехай f — узагальнена функція порядку j, а φ — довільна пробна функція. За визначенням

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq j} \langle D^\alpha g_\alpha, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq j} (-1)^{|\alpha|} \iiint\limits_{\Omega} g_\alpha D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \tag{4.1.38}$$

Неважко бачити, що права частина цієї формули зберігає зміст не тільки для функцій з класу $D(\Omega)$, але і для функцій ширшого класу $D^j(\Omega)$.

Зауваження 4.1.3.3 — Узагальнені функції порядку j можна визначати як лінійні неперервні функціонали на класі основних функцій $D^j(\Omega)$.

4.1.4 Згортка та регуляризація узагальнених функцій

Нехай $f(x), g(x)$ — дві локально-інтегровні функції в $\mathbb{R}^n$. При цьому функція

$$h(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x-y)| \,\mathrm{d}y \tag{4.1.39}$$

теж буде локально-інтегровна в $\mathbb{R}^n$.

Визначення 4.1.4.1 (згортки). *Згорткою* $f * g$ цих функцій будемо називати функцію

$$(f*g)(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \,\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y) \,\mathrm{d}y = (g*f)(x). \tag{4.1.40}$$

Таким чином згортка є локально-інтегровною функцію і тим самим визначає регулярну узагальнену функцію, яка діє на основні функції за правилом

$$\varphi \mapsto \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(\xi)\varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi. \tag{4.1.41}$$

Розглянемо випадок згортки двох функцій f та ψ, де f — узагальнена, а ψ — основна (пробна) функція. Оскільки ψ — фінітна функція, то згортка $f * \psi$ існує, а враховуючи нескінчену гладкість пробної функції, $(f * \psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Визначення 4.1.4.2. *Регуляризацією* узагальненої функції f будемо називати функцію $f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon$.

Зрозуміло, що $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а враховуючи властивості ε-шапочки ω_ε легко бачити, що

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{w.}} f, \tag{4.1.42}$$

тобто довели

Твердження 4.1.4.1

Будь-яка узагальнена функція є слабка границя своїх регуляризацій.

Приклад 4.1.4.1

Розглянемо узагальнену функцію

$$P\frac{1}{x-a}, \tag{4.1.43}$$

яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{x-a}$ за винятком точки a і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$\begin{aligned}\left\langle P\frac{1}{x-a}, \psi\right\rangle &= \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

Розглянемо узагальнену функцію

$$P\frac{1}{(x-a)^2}, \tag{4.1.45}$$

яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{(x-a)^2}$ за винятком точки a і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$\begin{aligned}\left\langle P\frac{1}{(x-a)^2}, \psi\right\rangle &= \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

Покажемо, що

$$\left(P\frac{1}{x-a}\right)' = P\frac{1}{(x-a)^2} \tag{4.1.47}$$

з точки зору узагальнених функцій.

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned}
\left\langle\left(P\frac{1}{x-a}\right)', \psi\right\rangle &= -\left\langle P\frac{1}{x-a}, \psi'\right\rangle = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi'(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi'(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}(\psi(x)-\psi(a))}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{d}(\psi(x)-\psi(a))}{x-a}\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}\bigg|_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}\bigg|_{a+\varepsilon}^{\infty} + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x\right) - \\
&\quad - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\psi(a-\varepsilon)-\psi(a)}{-\varepsilon} - \frac{\psi(a+\varepsilon)-\psi(a)}{\varepsilon}\right) = \\
&= -\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = -\left\langle P\frac{1}{(x-a)^2}, \psi\right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.1.48}$$

□

4.2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

Нехай L — диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha. \tag{4.2.1}$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$Lu = f(x). \tag{4.2.2}$$

Визначення 4.2.0.1 (узагальненого розв'язку)**.** Узагальненим розв'язком цього рівняння будемо називати будь-яку узагальнену функцію u, яка задовольняє це рівняння в розумінні виконання рівності:

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.3}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Остання рівність рівнозначна рівності

$$\langle u, L^\star \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.4}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Тут було введено

Визначення 4.2.0.2 (спряженого оператора)**.** *Спряженим* до оператора L нзаивається оператор що визначається рівністю

$$L^\star \varphi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi). \tag{4.2.5}$$

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2) q_k(x) = -\delta(x), \tag{4.2.6}$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon(x,t) = -\delta(x,t), \tag{4.2.7}$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x,t) = -\delta(x,t) \tag{4.2.8}$$

Визначення 4.2.0.3 (фундаментального розв'язку)**.** Узагальнені функції $q_k(x)$, $\varepsilon(x,t)$, $\psi(x,t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельмгольца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють відповідні рівняння як узагальнені функції:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} q_k(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0), \tag{4.2.9}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \varepsilon(x,t) \left(a^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0), \tag{4.2.10}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x,t) \left(a^2\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = -\varphi(0,0). \tag{4.2.11}$$

Зауваження 4.2.0.1 — Тут $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, простір усіх можливих значень (x,t). Зрозуміло, що можна було також записати

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \tag{4.2.12}$$

але було вибрано перше позначення для заощадження часу, місця, а також задля одноманітності.

Зауваження 4.2.0.2 — Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв'язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв'язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв'язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв'язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур'є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів.

4.2.1 Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо двовимірний оператор Лапласа

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{4.2.13}$$

Теорема 4.2.1.1 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Лапласа)

Для двохвимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \tag{4.2.14}$$

де $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\delta(x) \tag{4.2.15}$$

Зауваження 4.2.1.1 — Тут останню рівність необхідно розуміти як

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x = -\varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2). \tag{4.2.16}$$

Доведення. Перш за все,

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \varphi(x) \, \mathrm{d}x + \iint\limits_{S_R} \ldots \mathrm{d}S + \\ &+ \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Зауваження 4.2.1.2 — Тут U_R, U_ε — околи нуля такі, що $\operatorname{supp} \varphi \subset U_R$, а U_ε — нескінченно малий окіл.

Також тут позначено $S_R = \partial U_R$, $S_\varepsilon = \partial U_\varepsilon$.

У свою чергу n — вектор нормалі до S_ε.

Твердження 4.2.1.1

Для $x \neq 0$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = 0. \tag{4.2.18}$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\frac{x_i}{|x|^2}, \tag{4.2.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}, \tag{4.2.20}$$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4} \right) = 0. \tag{4.2.21}$$

□

Таким чином, першій інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ.

Зауваження 4.2.1.3 — Справді, цей інтеграл позначає потік поля $\vec{\varphi}$ через S_R, але $\operatorname{supp} \varphi \subset U_R$, тобто поза $U_{R-\varepsilon}$ для якогось (нового) малого ε поле $\vec{\varphi}$ не діє, а тому його потік дорівнє нулеві.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) \mathrm{d}S =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta)}{\partial n} \, \mathrm{d}\theta - \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) \, \mathrm{d}\theta \right). \tag{4.2.22}$$

Зауваження 4.2.1.4 — При обчисленні останнього інтегралу враховано, що

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|x|} \right|_{x \in S_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{r} \right|_{r = \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.2.23}$$

Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційовність функції φ, здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що перший інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0,0)$. □

4.2.2 Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца

Розглянемо тривимірний оператор Гельмгольца:

$$\Lambda_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \tag{4.2.24}$$

Теорема 4.2.2.1 (про фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца)

Для тривимірного оператора Гельмгольца функція

$$q_{\pm}^{k}(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{4.2.25}$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 q_{\pm}^{k}(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_{\pm}^{k}(x) = -\delta(x). \tag{4.2.26}$$

Зауваження 4.2.2.1 — Останнє рівняння треба розуміти як

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^{k}(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\varphi(0) \tag{4.2.27}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останньої рівності:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^k(x)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{U_R\setminus U_\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \qquad (4.2.28)$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Твердження 4.2.2.1

Для $x \neq 0$

$$\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right) q_{\pm}^k(x) = 0. \qquad (4.2.29)$$

Доведення. Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою

$$\frac{\partial^2 q_{\pm}^k(x)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right). \qquad (4.2.30)$$

У ній по-перше

$$\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right) = -\frac{e^{\pm ik|x|}(k^2|x|^2 \pm 2ik|x| - 2)}{4\pi|x|^3}, \qquad (4.2.31)$$

і

$$\left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{x_j^2}{|x|^2}, \qquad (4.2.32)$$

а також

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right) = \frac{e^{\pm ik|x|}(\pm ik|x| - 1)}{4\pi|x|^5}(|x|^2 - x_j^2). \qquad (4.2.33)$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right) q_{\pm}^k(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|^3}\Big(-k^2|x|^2\Big) + k^2\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} = 0. \qquad (4.2.34)$$

□

Інтеграл по сфері великого радіусу S_R дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції:

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} q_\pm^k(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$
$$\cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \sin\theta \frac{\partial \varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi, \cos\theta, \varepsilon\sin\theta)}{\partial n}\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \quad (4.2.35)$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial q_\pm^k(x)}{\partial n} \varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2} \iint\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$
$$\cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \sin\theta \cdot \varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\varphi(0). \quad (4.2.36)$$

□

Зауваження 4.2.2.2 — З формули для $q_\pm^k(x)$ легко отримати фундаментальний розв'язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція

$$\frac{1}{4\pi|x|} \quad (4.2.37)$$

задовольняє наступному рівнянню:

$$\Delta_3 \frac{1}{4\pi|x|} = -\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (4.2.38)$$

Зауваження 4.2.2.3 — Формально формулу $1/4\pi|x|$ можна отримати з $q_\pm^k(x)$ при $k = 0$.

4.2.3 Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца

Теорема 4.2.3.1 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца)

Функція
$$q^k(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|), \tag{4.2.39}$$
де $x = (x_1, x_2)$ є фундаментальним розв'язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} q^k(x) \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0). \tag{4.2.40}$$

Зауваження 4.2.3.1 — У формулі для $q^k(x)$ функція $K_\nu(x)$ — функція Бесселя другого роду уявного аргументу ν-порядку і є одним з двох лінійно-незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу:
$$x^2 Y'' + xY' - (x^2 + \nu^2) Y = 0. \tag{4.2.41}$$

Доведення. Аналогічне доведенню співвідношення для двовимірного оператора Лапласа.

Твердження 4.2.3.1

Для $x \neq 0$
$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = 0. \tag{4.2.42}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(-k^2 K_0''(-ik|x|) \frac{x_j^2}{|x|^2} - ikK_0'(-ik|x|) \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3} \right). \tag{4.2.43}$$

Таким чином
$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-k^2K_0''(-ik|x|) - ikK_0'(-ik|x|)\frac{1}{|x|} + k^2K_0(ik|x|)\right) = 0. \quad (4.2.44)$$

□

Зауваження 4.2.3.2 — Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|x|^2$ та ввести нову незалежну змінну $\xi = -ik|x|$.

Зауваження 4.2.3.3 — При доведенні необхідної рівності важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної в околі точки $x = 0$.

Відомо, що

$$K_0(ix) \sim \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}, \quad (4.2.45)$$

$$K_0'(ix) \sim -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}, \quad (4.2.46)$$

при $x \to +0$.

□

4.2.4 Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Теорема 4.2.4.1 (про фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності)

Фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \cdot \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.2.47)$$

Зауваження 4.2.4.1 — Це означає, що узагальнена функція $\varepsilon(x,t)$ задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \quad (4.2.48)$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Доведення. Очевидно, що $\varepsilon(x,t) \in C^\infty(t > 0)$.

Твердження 4.2.4.1

Ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(x,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.49}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\varepsilon, \tag{4.2.50}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2t}\varepsilon, \tag{4.2.51}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^2t^2} - \frac{1}{2a^2t}\right)\varepsilon. \tag{4.2.52}$$

Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення. □

Повертаємося до доведення інтегральної тотожності:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\ = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{\tau}^{\infty} \iiint\limits_{U_R} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\ = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int\limits_{\tau}^{\infty} \iiint\limits_{U_R} \varphi(x,t)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta\varepsilon\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \right. \\ \left. + \int\limits_{\tau}^{\infty} \iint\limits_{S_R} a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon - \frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\varphi\right) \mathrm{d}S_r\,\mathrm{d}t + \iiint\limits_{U_R} \varepsilon\,\varphi|_\tau^\infty\,\mathrm{d}x\right) = \\ = -\lim_{\tau\to 0} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,\tau)\varepsilon(x,\tau)\,\mathrm{d}x\end{gathered} \tag{4.2.53}$$

Можна показати, що

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \,\mathrm{d}x = 1, \quad t > 0. \tag{4.2.54}$$

Твердження 4.2.4.2

$$\frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n} \xrightarrow[\tau\to+0]{\text{w.}} \delta(x). \tag{4.2.55}$$

Доведення. Дійсно

$$\begin{aligned}
&\left|\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^2}(\varphi(x) - \varphi(0)) \,\mathrm{d}x\right| \leq \\
&\qquad \leq \frac{K}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\} |x| \,\mathrm{d}x = A,
\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

де $K = \max\limits_x |\varphi'(x)|$. □

Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi = r/2a\sqrt{\tau}$:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{K\sigma_n}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2\tau}\right\} r^n \,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^{R/2a\sqrt{\tau}} e^{-\xi^2}\xi^n \,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}\xi^n \,\mathrm{d}\xi = \\
&= O\left(\sqrt{\tau}\right) \xrightarrow[\tau\to+0]{} 0.
\end{aligned} \tag{4.2.57}$$

□

4.2.5 Фундаментальний розв'язок хвильового оператора

Теорема 4.2.5.1 (про фундаментальний розв'язок одновимірного хвильового оператора)
Узагальнена функція

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \tag{4.2.58}$$

є фундаментальним розв'язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \tag{4.2.59}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останнього виразу:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&\qquad = -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x|/a}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = \\
&\qquad = \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(-x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad\qquad + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = (\star)
\end{aligned} \tag{4.2.60}$$

Зауваження 4.2.5.1 — Зрозуміло, що третій інтеграл $= 0$, адже ми інтегруємо частинну похідну функції що не залежить від змінної x по змінній x, тобто підінтегральна функція дорівнює нулеві.

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x = at$, отримаємо

$$\begin{aligned}
(\star) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\varphi(-at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{\varphi(0,0)}{2} - \frac{\varphi(0,0)}{2} = -\varphi(0,0).
\end{aligned} \tag{4.2.61}$$

Зауваження 4.2.5.2 — Тут ми вкотре скористалися скінченністю носія φ (фінітністю пробної функції):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\varphi(at,t) &= \\
= \frac{\varphi(at,t)}{2}\bigg|_0^\infty &= \\
= \frac{\varphi(a\cdot\infty,\infty) - \varphi(a\cdot 0,0)}{2} &= \\
= \frac{0-\varphi(0,0)}{2} &= -\frac{\varphi(0,0)}{2}.
\end{aligned} \tag{4.2.62}$$

□

Зауваження 4.2.5.3 — Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв'язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{4.2.63}$$

$$\psi_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{4.2.64}$$

4.3 Використання фундаментальних розв'язків та функцій Гріна для знаходження розв'язків задач Коші та граничних задач

Фундаментальні розв'язки оператора теплопровідності та хвильового оператора можна ефективно використовувати для побудови розв'язків задач Коші для рівняння теплопровідності, або хвильового рівняння.

4.3.1 Задача Коші для рівняння теплопровідності

Приклад 4.3.1.1

Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -F(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Для отримання необхідної формули запишемо диференціальне рівняння для фундаментального розв'язку $\varepsilon(x-\xi, t-\tau)$ по парі аргументів ξ, τ:

$$a^2\Delta_\xi \varepsilon(x-\xi, t-\tau) + \frac{\partial \varepsilon(x-\xi, t-\tau)}{\partial \tau} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau). \tag{4.3.2}$$

Зауваження 4.3.1.1 — Оскільки диференціювання ведеться по аргументах ξ, τ то фундаментальний розв'язок задовольняє спряженому рівнянню теплопровідності.

Запишемо рівняння теплопровідності відносно незалежних змінних ξ, τ:

$$a^2\Delta u(\xi,\tau) - \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} = -F(\xi,\tau). \tag{4.3.3}$$

Останнє рівняння домножимо на $\varepsilon(x-\xi, t-\tau)$, а рівняння (4.3.2) — на $u(\xi,\tau)$, від першого відніме друге та проінтегруємо результат по змінній

$\xi \in U_R$ і по змінній $\tau \in [0, t+\alpha]$ для якогось $\alpha > 0$. Отримаємо

$$\int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} a^2(\varepsilon(x-\xi, t-\tau)\Delta u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\Delta\varepsilon(x-\xi,t-\tau))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau -$$
$$- \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} \frac{\partial(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= - \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)u(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.3.4}$$

Для обчислення першого інтегралу лівої частини застосуємо другу формулу Гріна, другий інтеграл спростимо, обчисливши інтеграл від похідної по змінній τ, другий інтеграл у правій частині рівності обчислимо з використанням властивості δ-функції Дірака. В результаті отримаємо:

$$\int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} a^2(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Delta(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\Delta\varepsilon(x-\xi,t-\tau))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= a^2 \int\limits_0^{t+\alpha} \iint\limits_{S_R} \left(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} - u(\xi,\tau)\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}\right)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau, \tag{4.3.5}$$

і

$$- \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} \frac{\partial(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= - \iiint\limits_{U_R} \varepsilon(x-\xi,-\alpha)u(\xi,t+\alpha)\,\mathrm{d}\xi + \iiint\limits_{U_R} \varepsilon(x-\xi,t)u(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.3.6}$$

Врахуємо, що $\varepsilon(x-\xi,-\alpha) = 0$ при $\alpha > 0$. Спрямуємо радіус кулі $R \to \infty$, та врахуємо поведінку фундаментального розв'язку в нескінченно віддаленій точці, отримаємо, що поверхневі інтеграли обертаються в нуль. В результаті остаточних спрощень отримаємо

Формула 4.3.1.1 (інтегрального представлення розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності)

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x-\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.3.7}$$

4.3.2 Задача Коші для рівняння коливання струни. Формула д'Аламбера

Приклад 4.3.2.1

Розглянемо задачу Коші для рівняння коливання струни

$$\begin{cases} a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -F(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^1, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0(x). \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Для знаходження формули інтегрального представлення розв'язку цієї задачі Коші запишемо рівняння, якому задовольняє фундаментальний розв'язок:

$$a^2\frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau^2} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau). \tag{4.3.9}$$

Над цими рівняннями проведемо наступні дії аналогічні попередньому випадку:

1. перше помножимо на $\psi_1(x-\xi,t-\tau)$;
2. друге помножимо на $u(\xi,\tau)$;
3. аргументи x, t першого перепозначимо через ξ, τ відповідно;
4. віднімемо від першого рівняння друге та проінтегруємо по $\tau\in(0,t)$ та по $\xi\in(-R,R)$.

Будемо мати:

$$\int_0^t \int_{-R}^{R} a^2 \left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - u(\xi,\tau)\frac{\partial^2 \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi^2}\right) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau -$$

$$- \int_0^t \int_{-R}^{R} \left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \tau^2} - u(\xi,\tau)\frac{\partial^2 \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau^2}\right) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= - \int_0^t \int_{-R}^{R} \psi_1(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_{-R}^{R} \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)u(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau \tag{4.3.10}$$

Застосуємо до першого та другого інтегралів формулу інтегрування за частинами:

$$\int_0^t a^2 \left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi} - u(\xi,\tau)\frac{\partial \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi}\right)\Bigg|_{\xi=-R}^{\xi=R} \mathrm{d}\tau -$$

$$- \int_{-R}^{R} \left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} - u(\xi,\tau)\frac{\partial \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \mathrm{d}\xi =$$

$$= - \int_0^t \int_{-R}^{R} \psi(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau + u(x,t). \tag{4.3.11}$$

Виконаємо необхідні підстановки та спрямуємо $R \to \infty$, отримаємо, що перший інтеграл в лівій частині тотожньо перетворюється в нуль за рахунок властивостей фундаментального розв'язку. В другому інтегралі у лівій частині верхня підстановка перетворюється в нуль за рахунок властивостей фундаментального розв'язку, а нижню підстановку можна перетворити з використанням початкових умов задачі Коші.

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau}\Bigg|_{\tau=0} u_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x-\xi,t)v_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Цю проміжну формулу можна конкретизувати обчисливши відповідні інтеграли, враховуючи конкретний вигляд фундаментального розв'язку

$$\psi_1(x-\xi,t-\tau)=\frac{\theta(a(t-\tau)-|x-\xi|)}{2a}. \tag{4.3.13}$$

Обчислимо перший інтеграл:

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.3.14}$$

Аналогічно попередньому можна записати третій інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x-\xi,t)v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.3.15}$$

Для обчислення другого інтегралу, обчислимо спочатку похідну від фундаментального розв'язку, яка фігурує під знаком інтегралу:

$$\left.\frac{\partial\psi_1(x-\xi,t)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left.\frac{\theta(a(t-\tau)-|x-\xi|)}{2a}\right|_{\tau=0}=-\frac{1}{2}\delta(at-|x-\xi|). \tag{4.3.16}$$

Враховуючи вигляд похідної фундаментального розв'язку, запишемо другий інтеграл у вигляді:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(at-|x-\xi|)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\delta(at+\xi-x)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\delta(at-\xi+x)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-(x-at))u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\delta(\xi-(x+at))u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\\&=\frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2}.\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Таким чином остаточно можемо записати

Формула 4.3.2.1 (д'Аламбера)

Розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни:

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.3.18}$$

4.3.3 Задача Коші для рівняння коливання мембрани та коливання необмеженого об'єму. Формули Пуассона та Кіргофа

Приклад 4.3.3.1

Будемо розглядати задачу Коші для двовимірного або тривимірного хвильового рівняння:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - u_{tt}(x,t) = -F(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad n=2,3, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = v_0. \end{cases} \tag{4.3.19}$$

Використовуючи перетворення аналогічні випадку формули д'Аламбера, можемо отримати проміжну формулу для розв'язання двовимірної або тривимірної задач Коші:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_n(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau - \\ - \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \left.\frac{\partial\psi_n(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_n(x-\xi,t)v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.3.20}$$

Використовуючи вигляд фундаментального розв'язку для двовимірного випадку:

$$\psi_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad x\in\mathbb{R}^2 \tag{4.3.21}$$

та проміжну формулу запишемо формулу Пуассона. Обчислимо першій інтеграл:

$$\int\limits_0^t \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_2(x-\xi,t)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a\pi}\int\limits_0^t \iint\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}. \tag{4.3.22}$$

Запишемо третій інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_2(x-\xi,t)v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a\pi}\iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}. \tag{4.3.23}$$

Нарешті запишемо другий інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial\psi_2(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}. \tag{4.3.24}$$

Зводячи усі три інтеграли в одну формулу отримаємо

Формула 4.3.3.1 (Пуассона)

Розв'язок задачі Коші коливання мембрани

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2a\pi}\int\limits_0^t \iint\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} &\frac{F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}+ \\ &+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}+ \\ &+\frac{1}{2a\pi}\iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}. \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Без доведення наведемо

Формула 4.3.3.2 (Кіргофа)

Для тривимірної задачі Коші хвильового рівняння:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{|x-\xi|<at} \frac{F(\xi, t-|x-\xi|/a)}{|x-\xi|}\, \mathrm{d}\xi + \\
+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint\limits_{|x-\xi|=at} v_0(\xi)\, \mathrm{d}S_\xi + \\
+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)\, \mathrm{d}S_\xi \right).
\end{aligned}
\tag{4.3.26}
$$

4.3.4 Функція Гріна граничних задач оператора Гельмгольца

При розв'язанні задач Коші для рівняння теплопровідності та хвильового рівняння ми використовували фундаментальний розв'язок відповідного оператора, який дозволяв врахувати вплив вільного члена рівняння та початкових умов. Для розв'язання граничних задач, для яких розв'язок треба шукати в деякій обмеженій області на границі якої повинні виконуватися деякі граничні умови, треба використовувати спеціальні фундаментальні розв'язки. Крім того ці спеціальні фундаментальні розв'язки повинні задовольняти однорідним граничним умовам. Такі спеціальні фундаментальні розв'язки отримали назву функцій Гріна граничної задачі певного роду для відповідного диференціального рівняння.

Приклад 4.3.4.1

Будемо розглядати граничні задачі для рівняння Гельмгольца:

$$
\begin{cases}
(\Delta + k^2) u(x) = -F(x), & x \in \Omega, \\
\ell_i u(x)|_{x\in S} = f(x), & i = 1,2,3.
\end{cases}
\tag{4.3.27}
$$

Використаємо позначення для граничних операторів:

$$
\ell_1 u(x)|_{x\in S} = u(x)|_{x\in S}\,, \tag{4.3.28}
$$

$$
\ell_2 u(x)|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{x\in S}, \tag{4.3.29}
$$

$$\ell_3 u(x)|_{x\in S} = \frac{\partial u(x)}{\partial n} + \alpha(x)u(x)\Big|_{x\in S}, \tag{4.3.30}$$

— граничні умови першого, другого або третього роду. Зауважимо, що в найпростішому випадку в кожній точці границі виконується умова першого, другого або третього роду, у зв'язку з чим і граничні задачі називають першою, другою або третьою для рівняння Гельмгольца.

Визначення 4.3.4.1 (функції Гріна)**.** Функцію $G_i^k(x,\xi)$ будемо називати *функцією Гріна* першої другої або третьої граничної задачі в області Ω з границею S оператора Гельмгольца, якщо ця функція є розв'язком граничної задачі:

$$\begin{cases} (\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\xi) = -\delta(x-\xi), \quad x,\xi\in\Omega, \\ \ell_i G_i^k(x,\xi)\Big|_{x\in S} = 0, \quad i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.31}$$

Оскільки функція Гріна задовольняє рівняння з такою ж правою частиною як і фундаментальний розв'язок (лише зі здвигом на ξ), то для визначення функції Гріна можна надати наступне еквівалентне визначення:

Визначення 4.3.4.2 (еквівалентне означення функції Гріна)**.** Функцію $G_i^k(x,\xi)$ будемо називати функцією Гріна першої другої або третьої граничної задачі в області Ω з границею S оператора Гельмгольца, якщо ця функція може бути представлена у вигляді

$$G_i^k(x,\xi) = q_\pm^k(x-\xi) + g_i^k(x,\xi), \tag{4.3.32}$$

де $q_\pm^k(x-\xi)$ є фундаментальним розв'язком оператора Гельмгольца, а функція g_i^k задовольняє граничній задачі:

$$\begin{cases} (\Delta_x + k^2)g_i^k(x,\xi) = -\delta(x-\xi), \quad x,\xi\in\Omega, \\ \ell_i g_i^k(x,\xi)\Big|_{x\in S} = -\,\ell_i q_\pm^k(x)\Big|_{x\in S}, \quad i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.33}$$

Твердження 4.3.4.1

Функція Гріна $G_i^k(x,\xi) = G_i^k(\xi,x)$, $x,\xi\in\Omega$, $i=1,2,3$, тобто є симетричною функцією своїх аргументів.

Доведення. Для цього розглянемо рівняння для функції Гріна з параметром η:

$$(\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\eta) = -\delta(x-\eta), \quad x,\eta\in\Omega \tag{4.3.34}$$

Рівняння з визначення помножимо на $G_i^k(x,\eta)$, а останнє рівняння — на $G_i^k(x,\xi)$, віднімемо від першого рівняння друге і проінтегруємо па аргументу $x \in \Omega$:

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(G_i^k(x,\eta)(\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\xi) - G_i^k(x,\xi)(\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\eta)\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} \left(-G_i^k(x,\eta)\delta(x-\xi) + G_i^k(x,\xi)\delta(x-\eta)\right) \mathrm{d}x \tag{4.3.35}$$

До лівої частини застосуємо другу формулу Гріна, а інтеграл в правій частині обчислюється безпосередньо:

$$-G_i^k(\xi,\eta) + G_i^k(\eta,\xi) = \iint\limits_{S} \left(G_i^k(x,\eta)\frac{\partial G_i^k(x,\xi)}{\partial n_x} - G_i^k(x,\xi)\frac{\partial G_i^k(x,\eta)}{\partial n_x}\right) \mathrm{d}S_x. \tag{4.3.36}$$

Поверхневий інтеграл останнього співвідношення дорівнює нулю для кожного $i = 1,2,3$. Дійсно при $i = 1$:

$$G_1^k(x,\xi)\big|_{x\in S} = G_1^k(x,\eta)\big|_{x\in S} \equiv 0, \tag{4.3.37}$$

при $i = 2$:

$$\left.\frac{\partial G_2^k(x,\xi)}{\partial n}\right|_{x\in S} = \left.\frac{\partial G_2^k(x,\eta)}{\partial n}\right|_{x\in S} \equiv 0, \tag{4.3.38}$$

при $i = 3$:

$$\left.\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n} + \alpha(x)G_3^k(x,\xi)\right|_{x\in S} = \left.\frac{\partial G_3^k(x,\eta)}{\partial n} + \alpha(x)G_3^k(x,\eta)\right|_{x\in S} \equiv 0, \tag{4.3.39}$$

що забезпечує рівність нулю поверхневого інтегралу для граничних умов будь-якого роду. □

Враховуючи симетричність функції Гріна отримаємо формули інтегрального представлення розв'язків трьох основних граничних задач рівняння Гельмгольца.

Для цього запишемо граничну задачу відносно аргументу ξ:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(\xi) = -F(\xi), \quad \xi \in \Omega, \\ \ell_i u(\xi)\big|_{\xi\in S} = f(\xi), \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.40}$$

Враховуючи симетрію функції Гріна та парність δ-функції Дірака, запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} (\Delta_\xi + k^2)G_i^k(x,\xi) = -\delta(x-\xi), \quad x,\xi \in \Omega, \\ \ell_i G_i^k(x,\xi)\big|_{x\in S} = 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.41}$$

Проведемо наступні перетворення: першу систему помножимо на $G_i^k(x,\xi)$, а другу помножимо на $u(\xi)$, віднімемо від першої рівності другу і проінтегруємо по змінній $\xi \in \Omega$:

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_\Omega \big(G_i^k(x,\xi)(\Delta + k^2)u(\xi) - u(\xi)(\Delta_\xi + k^2)G_i^k(x,\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi = \\ &\quad = \iiint\limits_\Omega \big(-G_i^k(x,\xi)F(\xi) + u(\xi)\delta(x-\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{4.3.42}$$

Застосуємо до лівої частини рівності другу формулу Гріна, а другий інтеграл в правій частині обчислимо безпосередньо враховуючи властивості δ-функції Дірака:

$$\begin{aligned} u(x) = &\iiint\limits_\Omega G_i^k(x,\xi)F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ &+ \iint\limits_S \left(G_i^k(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi)\frac{\partial G_i^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}\right)\mathrm{d}S_\xi. \end{aligned} \tag{4.3.43}$$

Проміжну формулу можна конкретизувати для кожної з трьох граничних задач:

1. Нехай $i = 1$, тоді

$$G_1^k(x,\xi)\big|_{\xi\in S} = 0, \quad u(\xi)|_{\xi\in S} = f(\xi), \tag{4.3.44}$$

   і тоді формула прийме наступний вигляд:

$$u(x) = \iiint\limits_\Omega G_1^k(x,\xi)F(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \iint\limits_S \left(\frac{\partial G_1^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}f(\xi)\right)\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.3.45}$$

2. Нехай $i = 2$, тоді

$$\left.\frac{\partial G_2^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}\right|_{\xi\in S} = 0, \quad \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\right|_{\xi\in S} = f(\xi), \tag{4.3.46}$$

і формула приймає вигляд:

$$u(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_2^k(x,\xi)F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \iint\limits_{S} \big(G_2^k(x,\xi)f(\xi)\big)\,\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.3.47}$$

3. У випадку $i = 3$

$$\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n_\xi} + \alpha(\xi)G_3^k(x,\xi)\bigg|_{\xi\in S} = 0, \quad \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} + \alpha(\xi)u(\xi)\bigg|_{\xi\in S} = f(\xi). \tag{4.3.48}$$

Розв'язок має вигляд:

$$u(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_3^k(x,\xi)F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \iint\limits_{S} \big(G_3^k(x,\xi)f(\xi)\big)\,\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.3.49}$$

Вправа 4.3.4.1. Доведіть останню формулу.

4.3.5 Функція Гріна граничних задач оператора теплопровідності

Будемо розглядати граничні задачі для рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -F(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \ell_i u(x,t)\big|_{x\in S} = f(x,t), \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.50}$$

Тут

$$\ell_1 u(x,t)\big|_{x\in S} = u(x,t)\big|_{x\in S}, \tag{4.3.51}$$

$$\ell_2 u(x,t)\big|_{x\in S} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x\in S}, \tag{4.3.52}$$

$$\ell_3 u(x,t)\big|_{x\in S} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + \alpha(x,t)\cdot u(x,t)\bigg|_{x\in S} \tag{4.3.53}$$

— оператори граничних умов першого, другого, або третього роду.

Визначення 4.3.5.1 (функції Гріна рівняння теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x, \xi, t - \tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з границею S для $t > 0$, якщо вона є розв'язком настуної граничної задачі:

$$\begin{cases} a^2 \Delta_x E_i(x, \xi, t - \tau) - \dfrac{\partial E_i(x, \xi, t - \tau)}{\partial t} = -\delta(x - \xi, t - \tau), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ E_i(x, \xi, t - \tau)|_{t - \tau \leq 0} = 0, \\ \ell_i E_i(x, \xi, t - \tau)|_{x \in S} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.54}$$

Еквівалентне визначення можна надати у вигляді

Визначення 4.3.5.2 (функції Гріна рівняння теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x, \xi, t - \tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з границею S для $t > 0$, якщо вона може бути представлена у вигляді

$$E_i(x, \xi, t - \tau) = \varepsilon(x - \xi, t - \tau) + \omega_i(x, \xi, t - \tau), \tag{4.3.55}$$

де перший доданок є фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності, а другий є розв'язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} a^2 \Delta_x \omega_i(x, \xi, t - \tau) - \dfrac{\partial \omega_i(x, \xi, t - \tau)}{\partial t} = -\delta(x - \xi, t - \tau), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \omega_i(x, \xi, t - \tau)|_{t - \tau \leq 0} = 0, \\ \ell_i \omega_i(x, \xi, t - \tau)|_{x \in S} = -\ \ell_i \varepsilon_i(x - \xi, t - \tau)|_{x \in S} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.56}$$

Вивчимо

Властивості 4.3.5.1 (функції Гріна оператора теплопровідності)
Легко бачити, що

1. Функція Гріна граничних задач рівняння теплопровідності з аргументами $E_i(x, \xi, -t)$ задовольняє спряженому диференціальному рівнянню

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \xi, -t) + \frac{\partial E_i(x, \xi, -t)}{\partial t} = -\delta(x - \xi)\delta(t - \tau), \quad (4.3.57)$$

   де $x, \xi \in \Omega, \quad t > 0.$

2. Функція Гріна є також симетричною функцією своїх перших двох аргументів.

Доведення. Доведемо другу властивість. Запишемо співвідношення, яким задовольняє функція Гріна:

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \xi, t - \tau_1) - \frac{\partial E_i(x, \xi, t - \tau_1)}{\partial t} = -\delta(x - \xi)\delta(t - \tau_1), \quad x, \xi \in \Omega, \quad (4.3.58)$$

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \eta, \tau_2 - t) + \frac{\partial E_i(x, \eta, \tau_2 - t)}{\partial t} = -\delta(x - \eta)\delta(t - \tau_2), \quad x, \eta \in \Omega. \quad (4.3.59)$$

Перше рівняння помножимо на $E_i(x, \xi, \tau_2 - t)$, друге рівняння помножимо на $E_i(x, \xi, t - \tau_1)$, віднімемо від першого друге і проінтегруємо по $x \in \Omega$ і по $-\infty < t < \tau$:

$$\begin{aligned} a^2 \iiint\limits_{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \Big(E_i(x, \eta, \tau_2 - t)\Delta_x E_i(x, \xi, t - \tau_1) - \\ - E_i(x, \xi, t - \tau_1)\Delta_x E_i(x, \eta, \tau_2 - t) \Big) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x - \\ - \iiint\limits_{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(E_i(x, \xi, t - \tau_1) E_i(x, \eta, \tau_2 - t) \right) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \\ = -E_i(\xi, \eta, \tau_2 - \tau_1) + E_i(\eta, \xi, \tau_2 - \tau_1). \end{aligned} \quad (4.3.60)$$

В результаті застосування другої формули Гріна до першого інтегралу в лівій частині рівності і обчислення другого інтегралу лівої частини, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&E_i(\xi,\eta,\tau_2-\tau_1) - E_i(\eta,\xi,\tau_2-\tau_1) = \\
&\quad = -\iiint\limits_{\Omega} \Big(E_i(x,\xi,\tau-\tau_1) E_i(x,\eta,\tau_2-\tau) - \\
&\qquad - E_i(x,\xi,-\infty) E_i(x,\eta,-\infty) \Big)\, \mathrm{d}\Omega + \\
&\quad + a^2 \iint\limits_{S} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau_1)}{\partial n} E_i(x,\eta,\tau_2-t) - \right. \\
&\qquad \left. - E_i(x,\xi,t-\tau_1) \frac{\partial E_i(x,\eta,\tau_2-t)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{4.3.61}
$$

Обираючи $\tau > \tau_2 > \tau_1$, отримаємо з урахування граничних і початкових умов для функції Гріна, що інтеграли в правій частині останньої рівності дорівнюють нулю. □

Для отримання інтегрального представлення розв'язків граничних задач, запишемо граничну задачу теплопровідності у змінних ξ, τ :

$$
\begin{cases}
a^2 \Delta u(\xi,\tau) - \dfrac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} = -F(\xi,\tau), \quad \xi \in \Omega, \quad \tau > 0, \\
u(\xi,0) = u_0(\xi), \\
\ell_i u(\xi,\tau)\big|_{\xi \in S} = f(\xi,\tau), \quad i = 1,2,3.
\end{cases}
\tag{4.3.62}
$$

та рівняння для функції Гріна по змінних ξ, τ:

$$
a^2 \Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau) + \frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial \tau} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \tag{4.3.63}
$$

де $x, \xi \in \Omega$, $t > \tau > 0$.

Перше рівняння помножимо на $E_i(x,\xi,t-\tau)$, а друге — на $u(\xi,\tau)$, віднімемо від першого друге, і проінтегруємо по $0 < \tau < t+\varepsilon$ та по $\xi \in \Omega$.

Отриаємо співвідношення:

$$
\begin{aligned}
a^2 \int\limits_0^{t+\varepsilon} \iiint\limits_{\Omega} \Big(& E_i(x,\xi,t-\tau)\Delta u(\xi,\tau) - \\
& - u(\xi,\tau)\Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau)\Big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
& + \int\limits_0^{t+\varepsilon} \iiint\limits_{\Omega} E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau - \\
& - \iiint\limits_{\Omega} \int\limits_0^{t+\varepsilon} \frac{\partial(E_i(x,\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi = \\
= & \int\limits_0^{t+\varepsilon} \iiint\limits_{\Omega} \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.64}
$$

Після застосування другої формули Гріна до першого інтегралу, обчислення третього інтегралу при $\varepsilon \to 0$ отримаємо наступну проміжну формулу:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \int\limits_0^{t} \iiint\limits_{\Omega} E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
& + \iiint\limits_{\Omega} E_i(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\
& + a^2 \int\limits_0^{t} \iint\limits_{S} \Big(E_i(x,\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} \\
& \quad - u(\xi,\tau)\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}\Big)\,\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.65}
$$

Враховуючи відповідні граничні умови, яким задовольняє розв'язок на границі поверхні S отримаємо для першої граничної задачі:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{\Omega} & E_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
& + \iiint\limits_{\Omega} E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \\
& - a^2 \int\limits_0^t \iint\limits_S \left(\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} f(\xi,\tau) \right) \mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{4.3.66}
$$

Для другої та третьої граничних задач отримаємо

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{\Omega} & E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
& + \iiint\limits_{\Omega} E_i(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\
& + a^2 \int\limits_0^t \iint\limits_S E_i(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau, \quad i = 2,3.
\end{aligned} \tag{4.3.67}
$$

4.3.6 Функція Гріна граничних задач хвильового оператора

Будемо розглядати граничні задачі для хвильового рівняння:

$$
\begin{cases}
a^2 \Delta u(x,t) - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -F(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \\
\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0(x), \\
\ell_i u(x,t)\big|_{x \in S} = f(x,t), \quad i = 1,2,3.
\end{cases} \tag{4.3.68}
$$

Визначення 4.3.6.1 (функції Гріна хвильового рівняння)**.** Функцію $\Theta_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі хвильового рівняння в області Ω з границею S і $t > 0$, якщо вона є розв'язком наступної граничної задачі:

$$\begin{cases} a^2\Delta_x\Theta_i(x,\xi,t-\tau) - \dfrac{\partial^2\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \\ \Theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\right|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \ell_i\Theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{x\in S} = 0, \quad i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.69}$$

Еквівалентне визначення можна надати у вигляді:

Визначення 4.3.6.2 (функції Гріна хвильового рівняння)**.** Функцію $\Theta_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі хвильового рівняння в області Ω з границею S і $t>0$, якщо вона може бути представлена у вигляді

$$\Theta_i(x,\xi,t-\tau) = \psi(x-\xi,t-\tau) + \theta_i(x,\xi,t-\tau), \tag{4.3.70}$$

де перший доданок є фундаментальним розв'язком хвильового оператора, а другий є розв'язком наступної граничної задачі:

$$\begin{cases} a^2\Delta_x\theta_i(x,\xi,t-\tau) - \dfrac{\partial^2\theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2} = 0, \\ \theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial\theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\right|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \ell_i\theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{x\in S} = -\left.\ell_i\psi_i(x,\xi,t-\tau)\right|_{x\in S}, \quad i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.71}$$

Використовуючи попередні викладки для рівняння теплопровідності, легко встановити, що функція Гріна хвильового рівняння є симетричною функцією перших двох аргументів і по сукупності аргументів ξ, τ задовольняє рівняння:

$$a^2\Delta_\xi\Theta_i(x,\xi,t-\tau) - \frac{\partial^2\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau). \tag{4.3.72}$$

Для розв'язку граничних задач хвильового рівняння можна отримати формули інтегрального представлення аналогічні відповідним формулам для рівняння теплопровідності:

Формула 4.3.6.1

Розв'язком першої граничної задачі для хвильового рівняння є

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega \Theta_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+ \\
+ \iiint\limits_\Omega \Theta_1(x,\xi,t)v_0(\xi),\mathrm{d}\xi- \\
- \iiint\limits_\Omega \left.\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi- \\
- a^2\int\limits_0^t \iint\limits_S \left(\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}f(\xi,\tau)\right)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.73}
$$

Вправа 4.3.6.1. Отримайте наведену формулу.

Формула 4.3.6.2

Розв'язком другої і третьої граничних задач для хвильового рівняння є

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega \Theta_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+ \\
+ \iiint\limits_\Omega \Theta_i(x,\xi,t)v_0(\xi),\mathrm{d}\xi- \\
- \iiint\limits_\Omega \left.\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi- \\
- a^2\int\limits_0^t \iint\limits_S \Big(\Theta_i(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\Big)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.74}
$$

Вправа 4.3.6.2. Отримайте наведену формулу.

4.4 Методи побудови функції Гріна для канонічних областей

Знаходження розв'язку граничної задачі за допомогою функції Гріна для відповідного оператора, заданої області та типу граничних умов фактично зводиться до необхідності розв'язання граничної задачі еквівалентної вихідній з спеціальними граничними умовами. Побудова функції Гріна для довільних областей є задачею такого ж рівня складності як і безпосереднє знаходження розв'язку, в той же час існують так звані канонічні області для яких можна в явному вигляді записати функцію Гріна, а значить побудувати розв'язок граничної задачі.

До канонічних областей будемо відносити паралелепіпед в прямокутній системі координат, а також області які в ортогональних криволінійних координатах є паралелепіпедами. Зокрема, півпростір, четверта частина простору, двогранний кут величини π/n, шар, що міститься між двома паралельними площинами, куля та її канонічні частини, циліндр прямокутного та кругового перерізу, паралелепіпед та інші.

4.4.1 Побудова функції Гріна методом відображення зарядів для граничних задач оператора Лапласа

Для побудови функції Гріна оператора Лапласа використовується фізична інтерпретація фундаментального розв'язку тривимірного та двовимірного евклідового простору. Нагадаємо, що фундаментальний розв'язок оператора Лапласа має вигляд:

$$q_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|x|}, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Для тривимірного простору фізичний зміст фундаментально розв'язку нам відомий і представляє потенціал електростатичного поля в точці x одиничного точкового заряду, який розташований в початку координат. Для двовимірного випадку ми визначимо фізичний зміст фундаментального розв'язку трохи нижче.

Таким чином функцію Гріна для деякої просторової області можна шукати у вигляді потенціалу електростатичного поля сукупності точкових або розподілених зарядів, один з яких є одиничним позитивним і знаходиться в довільній внутрішній точці області Ω, а усі інші лежать поза областюю Ω, місце розташування і величина зарядів підбираються таким чином, щоби задовільними однорідним граничним умовам на поверхні області.

Тобто функція Гріна для канонічних областей дуже часто може бути знайдена у вигляді:

$$G_i(p, P_0) = \frac{1}{4\pi|P - P_0|} + \sum_j \frac{\gamma_j}{4\pi|P - P_j|}. \tag{4.4.2}$$

У цій формулі перший доданок є фундаментальним розв'язком і одночасно моделює потенціал в точці P одиничного точкового заряду розташованого в точці $P_0 \in \Omega$. Сума — другий регулярний доданок, який фігурує в означенні 2 функції Гріна представляє функцію $g_i^k(x, \xi)$, γ_k — константи, які моделюють величину точкового заряду, $P_j \notin \Omega$ — точки розташування зарядів, які лежать поза областю Ω.

Оскільки має місце рівність

$$\Delta_P \frac{1}{4\pi|P - P_j|} = 0, \tag{4.4.3}$$

для $P \neq P_j$, то сума

$$\sum_j \frac{\gamma_j}{4\pi|P - P_j|} \tag{4.4.4}$$

в рівності вище дійсно задовольняє рівняння Лапласа коли $P \in \Omega$, $P_j \notin \Omega$.

4.4.2 Задача Діріхле для півпростору

Розглянемо граничну задачу:

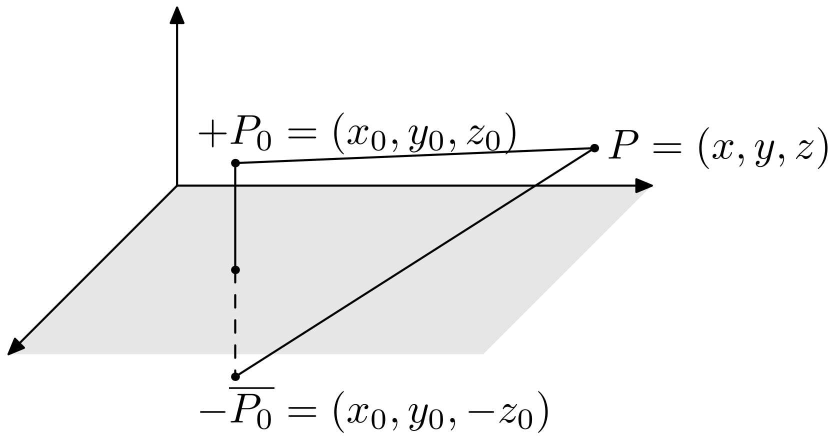
$$\begin{cases} \Delta U(P) = -F(P), & P \in \Omega = \{(x, y, z) : z > 0, x, y \in \mathbb{R}\}, \\ U(P)|_{P \in S} = f(P), & S = \{(x, y, z) : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\}. \end{cases} \tag{4.4.5}$$

Для знаходження розв'язку цієї задачі побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа у півпросторі $z > 0$.

В довільній точці P_0 верхнього півпростору розташуємо одиничний точковий заряд, потенціал якого обчислюється

$$\frac{1}{4\pi|P - P_0|}, \tag{4.4.6}$$

в нижньому півпросторі $z < 0$, розташуємо компенсуючи заряди, так що би в кожній точці поверхні (площини $z = 0$) сумарний потенціал електростатичного поля дорівнював нулю:



Користуючись принципом суперпозиції електростатичних полів, легко зрозуміти, що компенсація потенціалу заряду в точці P_0 відбудеться у випадку, коли компенсуючий заряд розташувати дзеркально існуючому відносно площини $z = 0$, а величину заряду обрати одиничну зі знаком мінус.

В результаті отримаємо сумарний потенціал електростатичного поля:

$$\begin{aligned}\Pi(P) &= \frac{1}{4\pi|P-P_0|} - \frac{1}{4\pi|P-\overline{P_0}|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Легко перевірити, що

$$\Pi(P)|_{P\in S} = 0. \tag{4.4.8}$$

Таким чином побудована функція представляє собою функцію Гріна першої граничної задачі (Діріхле) оператора Лапласа для півпростору:

$$\begin{aligned}G_1(P, P_0) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Для знаходження розв'язку задачі Діріхле скористаємося формулою інтегрального представлення:

$$U(P_0) = \iiint\limits_{\Omega} G_1(P, P_0) F(P) \, \mathrm{d}P - \iint\limits_{S} \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial n_P} f(P) \, \mathrm{d}S_P. \tag{4.4.10}$$

Обчислимо

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial n_P} \right|_{P \in S} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right) = \\
&= - \left(\frac{z - z_0}{4\pi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}} - \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{z - z_0}{4\pi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2)^{3/2}} \right) \right|_{z=0} = \\
&= \frac{-z_0}{2\pi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2))^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Таким чином, використовуючи формулу (4.3.45) (з попередньої лекції) інтегрального представлення розв'язку першої граничної задачі, можемо записати розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned}
U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\infty} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} & \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right) F(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \\
& + \frac{z_0}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

4.4.3 Задача Неймана для півпростору

Будемо розглядати граничну задачу:

$$\begin{cases}
\Delta U(P) = -F(P), \quad P \in \Omega = \{(x, y, z) : z > 0, x, y \in \mathbb{R}\}, \\
- \left. \dfrac{\partial U(P)}{\partial z} \right|_{P \in S} = f(P), \quad S = \{(x, y, z) : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\}.
\end{cases} \tag{4.4.13}$$

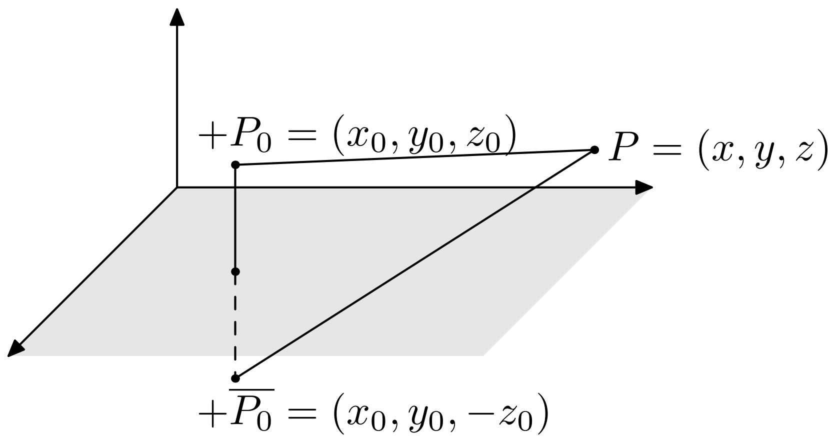
Для знаходження розв'язку цієї задачі побудуємо функцію Гріна другої граничної задачі оператора Лапласа для півпростору.

Для випадку умови другого роду тобто коли на площині $z = 0$ виконується умова

$$\left.\frac{\partial G_2(P, P_0)}{\partial n_P}\right|_{P \in S} = 0, \tag{4.4.14}$$

її можна інтерпретувати як рівність нулю потоку електростатичного поля крізь площину $z = 0$.

Це означає, що поле внутрішнього одиничного заряду треба компенсувати полем зовнішніх зарядів. Це можна зробити, якщо дзеркально одиничному позитивному заряду в точці P_0 розташувати заряд додатного знаку в симетричній точці $\overline{P_0}$:



Таким чином сумарний потенціал двох зарядів, а значить і функцію Гріна можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \Pi(P) &= \frac{1}{4\pi|P - P_0|} + \frac{1}{4\pi|P - \overline{P_0}|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}} = G_2(P, P_0). \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

Перевіримо, що побудована функція Гріна задовольняє граничній умові:

$$\frac{\partial G_2(P,P_0)}{\partial n_P}\bigg|_{P\in S} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)\bigg|_{z=0} =$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z-z_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{z+z_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2)^{3/2}}\right)\bigg|_{z=0} = 0. \tag{4.4.16}$$

Враховуючи формулу (4.3.47) (з попередньої лекції) інтегрального представлення розв'язку другої граничної задачі, отримаємо формулу для розв'язку задачі Неймана рівняння Пуассона в півпросторі:

$$U(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{3/2}}. \tag{4.4.17}$$

4.4.4 Функція Гріна задачі Діріхле для кулі

Будемо розглядати граничну задачу

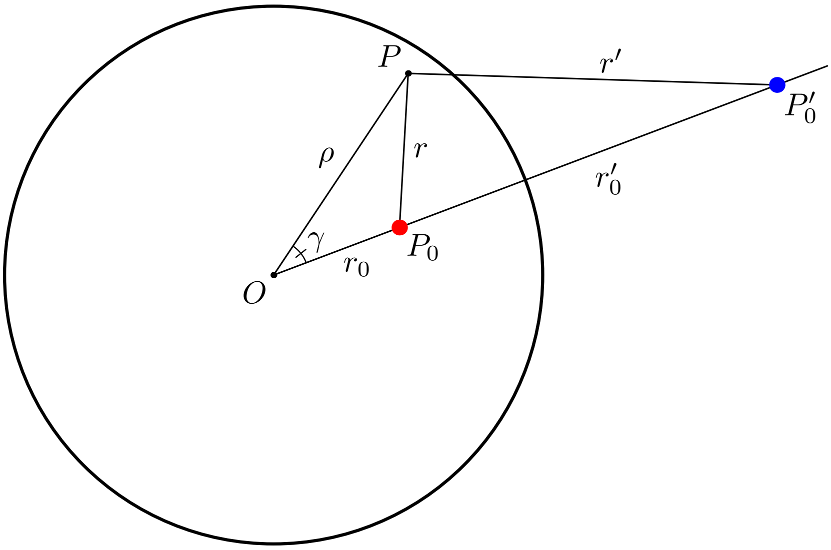
$$\begin{cases}\Delta U(P) = 0, \quad |P|<R,\\ \quad U(P)\big|_{|P|=R} = f(P).\end{cases} \tag{4.4.18}$$

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі.

Введемо позначення:

$$|OP_0| = r_0, \quad |OP_0'| = r_0', \quad r = |P-P_0|, \quad r' = |P-P_0'|. \tag{4.4.19}$$

На довільному промені, який проходить через центр кулі точку O розмістимо всередині кулі у точці P_0 одиничний точковий додатний заряд. Розглянемо точку P_0' *симетричну* точці P_0 відносно сфери.



Зауваження 4.4.4.1 — Це означає, що обидві точки лежать на одному промені, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню

$$r_0 \cdot r_0' = R^2. \tag{4.4.20}$$

В точці P_0' розмістимо від'ємний заряд величини e, яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів:

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{e}{4\pi r}. \tag{4.4.21}$$

Обчислимо величину e використовуючи теорему косинусів:

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0\cos\gamma}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\rho\cdot\frac{R^2}{r_0}\cdot\cos\gamma}}\right)\Bigg|_{\rho=R} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma}} - \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2R\cdot\frac{R^2}{r_0}\cdot\cos\gamma}}\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1 - e\cdot\frac{r_0}{R}}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma}} = 0. \tag{4.4.22}$$

Остання рівність буде вірною, якщо $e = R/r_0$.

Таким чином функцію Гріна задачі Діріхле для кулі можна записати у наступному вигляді при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

$$G_1(P, P_0) = \frac{1}{4\pi}\left(1/\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0\cos\gamma} - 1/\sqrt{R^2 + \frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} - 2\rho r_0\cos\gamma}\right). \tag{4.4.23}$$

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо:

$$\frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial n_P}\bigg|_{P\in S} = \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\rho - r_0\cos\gamma}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0\cos\gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{\rho r_0^2}{R^2} - r_0\cos\gamma}{\left(\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{\rho=R} =$$
$$= -\frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma)^{3/2}}. \tag{4.4.24}$$

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути:

$$\cos\gamma = \frac{\measuredangle(OP, OP_0)}{\rho r_0} = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0). \tag{4.4.25}$$

Тут ρ, φ, θ — сферичні координати точки P, а r_0, φ_0, θ_0 — сферичні координати точки P_0.

Формула 4.4.4.1 (формула Пуассона для кулі)

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв'язок задачі Діріхле:

$$U(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{R}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{(R^2 - r_0^2) \sin\theta f(\varphi, \theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\gamma)^{3/2}}. \tag{4.4.26}$$

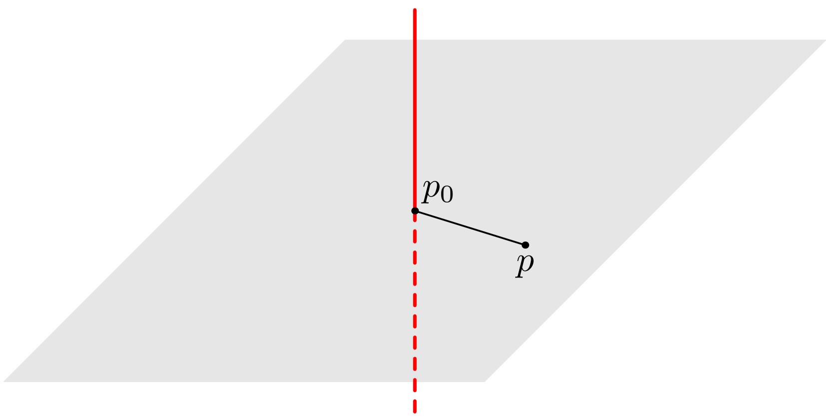
Ця формула дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа і називається *формулою Пуассона для кулі.*

4.4.5 Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв'язку для $\mathbb{R}^2$, що приводить до наступного вигляду функції Гріна:

$$G_i(p, p_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{|p - p_0|}\right) + g_i(p, p_0), \quad p, p_0 \in D \subset \mathbb{R}^2. \tag{4.4.27}$$

Фізичний зміст фундаментального розв'язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці p рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченої нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку p_0. Точки p, p_0 належать площині:



Аналогічно кулі, можна отримати функцію Гріна задачі Діріхле для кола, яка має вигляд:

$$G_1(p, p_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2+\rho^2-2\rho r_0\cos\gamma}}\right) - \right.$$
$$\left. - \ln\left(\frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r_0^2}+\rho^2-2\rho\cdot\frac{R^2}{r_0}\cdot\cos\gamma}}\right)\right). \tag{4.4.28}$$

Або через комплексні змінні $z = \rho e^{i\varphi}$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $z_0^\star = \frac{R^2}{\overline{z_0}}$:

$$G_1(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0\cdot|z-z_0^\star|}{R\cdot|z-z_0|}\right). \tag{4.4.29}$$

Таким чином розв'язок задачі Діріхле для кола може бути записаним у вигляді:

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{4.4.30}$$

Або через точки комплексної площини,

$$\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)} = \mathrm{Re}\left(\frac{z+z_0}{z-z_0}\right), \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{iz}. \tag{4.4.31}$$

Тоді попередня формула набуває вигляду

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} f(z)\cdot\frac{z+z_0}{z-z_0}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{4.4.32}$$

Нехай необхідно побудувати функцію Гріна першої граничної задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \\ u(x, y)\big|_C = f(x, y) \end{cases} \tag{4.4.33}$$

для довільної однозв'язної області D з жордановою границею C.

Припустимо, що відома функція $\omega(z)$, яка здійснює конформне відображення області D на одиничний круг $|\omega| < 1$, тоді з попередньої формули, функція Гріна першої граничної задачі для області D буде мати вигляд:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \overline{\omega(z_0)}\omega(z)}{\omega(z) - \omega(z_0)} \right|. \tag{4.4.34}$$

А розв'язок задачі Діріхле можна записати у вигляді:

$$u(\zeta_0) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(\zeta) \cdot \frac{\omega(\zeta) + \omega(\zeta_0)}{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \cdot \mathrm{d}\zeta. \tag{4.4.35}$$

4.4.6 Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої

Ми покажемо, як за допомогою функції Гріна можна знайти розвєязок першої та другої граничних задач рівняння теплопровідності для півпрямої $x > 0$.

Нехай ми розглядаємо граничні задачі:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -f(x,t), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ u(0,t) = \varphi(t), \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.4.36}$$

і

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -f(x,t), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi(t), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.4.37}$$

Для побудови функції Гріна використаємо фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності в одновимірному евклідовому просторі. Як відомо від має вигляд:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{2a^2 t} \right\}. \tag{4.4.38}$$

Оскільки при побудові функції Гріна використовується фізична інтерпретація фундаментального розв'язку, то з'ясуємо її знайшовши розв'язок наступної задачі:

Задача 4.4.1. В нескінченому стрижні з теплоізольованою боковою поверхнею і нульовою початковою температурою в початковий момент часу

$t = 0$ в точці $x = 0$ миттєво виділилося Q одиниць тепла. Необхідно визначити температуру стрижня в довільний момент часу в довільній його точці.

Розв'язок. Запишемо математичну постановку задачі.

Розповсюдження тепла у однорідному стрижні задається рівнянням теплопровідності з постійними коефіцієнтами:

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{f(x,t)}{c\rho S}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{4.4.39}$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f(x,t)$ — потужність теплових джерел. За умовою задачі теплове джерело є таким, що виділяє миттєво Q одиниць тепла в точці $x = 0$ в початковий момент часу, тому функція $f(x,t) = Q\delta(t)\delta(x)$. Тобто сумарна кількість тепла дорівнює

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q\delta(t)\delta(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = Q. \tag{4.4.40}$$

Оскільки до моменту дії теплових джерел початкова температура дорівнювала нулю, то початкова умова повинна мати вигляд: $u(x,0) = 0$.

Таким чином ми маємо задачу Коші для рівняння теплопровідності з однорідною початковою умовою.

Розв'язок такої задачі (температуру стрижня в точці x в момент часу t) можна записати за формулою:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x-\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.4.41}$$

Використовуючи її для цієї задачі будемо мати:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q}{c\rho S}\delta(\tau)\delta(\xi)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{Q}{c\rho S}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{2a^2 t}\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.42}$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності представляє собою функцію, що моделює температуру стрижня в точці

x в момент часу t за рахунок дії миттєвого точкового джерела інтенсивності $Q = c\rho S$ яке діє в початковий момент часу в точці $x = 0$.

Для побудови функції Гріна граничних задач (4.4.36), (4.4.37) на півпрямій використаємо метод відображення теплових джерел.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $c\rho S$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $-c\rho S$, то з фізичних міркувань можна очікувати, що в точці $x = 0$, яка лежить посередині між точками $x = \xi$ та $x = -\xi$, вплив теплових джерел дає нульову температуру. Дійсно, виходячи з фізичного змісту фундаментального розв'язку, отримаємо, що температура від дії двох точкових джерел дорівнює

$$\begin{aligned} E_1(x,\xi,t-\tau) = \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\} - \\ - \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.43}$$

Легко перевірити, що $E_1(0,\xi,t-\tau) = 0$, $E_1(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau<0} = 0$, а другий доданок задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності при $x > 0$, $t - \tau > 0$. Таким чином $E_1(x,\xi,t-\tau)$ є функція Гріна першої граничної задачі рівняння теплопровідності для півпрямої.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $c\rho S$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $c\rho S$, то з фізичних міркувань можна очікувати, що в точці $x = 0$, яка лежить посередині між точками $x = \xi$ та $x = -\xi$, тепловий потік буде дорівнювати нулю.

Запишемо температуру в цьому випадку

$$\begin{aligned} E_2(x,\xi,t-\tau) = \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\} + \\ \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.44}$$

Легко перевірити, що

$$\left.\frac{\partial E_2(x,\xi,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\theta(t-\tau)}{2a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}} \left(\xi \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2a^2t}\right\} - \xi \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2a^2t}\right\}\right) = 0. \tag{4.4.45}$$

Таким чином $E_2(x, \xi, t-\tau)$ є функцією Гріна другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої.

Для запису розв'язку граничних задач (4.4.36), (4.4.37) будемо використовувати формули (3.22) та (3.23), які треба записати для випадку пів прямої.

Для першої граничної задачі будемо мати:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^t \int_0^\infty E_1(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\ & + \int_0^\infty E_1(x,\xi,t) u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ & + a^2 \int_0^\infty \left. \frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.4.46}$$

Для другої граничної задачі отримаємо

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^t \int_0^\infty E_2(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\ & + \int_0^\infty E_2(x,\xi,t) u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \\ & - a^2 \int_0^\infty E_2(x,0,t-\tau) \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.4.47}$$

Продемонстрований метод це лише один з прийомів, який використовується для побудови функції Гріна.

Метод відображення дозволяє будувати функції Гріна для одновимірного хвильового рівняння.

4.5 Гармонічні функції та їх властивості

Визначення 4.5.0.1 (гармонічної у відкритій області функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій відкритій області* Ω, якщо $u \in C^{(2)}(\Omega)$ і $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$, тобто функція є двічі неперервно диференційованим розв'язком рівняння Лапласа.

Визначення 4.5.0.2 (гармонічної в точці функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій точці*, якщо ця функція гармонічна в деякому околі цієї точки.

Визначення 4.5.0.3 (гармонічної в замкненій області функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій замкненій області*, якщо вона гармонічна в деякій більш широкій відкритій області.

З гармонічними функціями у тривимірних і двовимірних областях ми вже зустрічалися:

Приклад 4.5.0.1 (гармонічної функції у $\mathbb{R}^2$)

$$\Delta \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-\xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{4.5.1}$$

Приклад 4.5.0.2 (гармонічної функції у $\mathbb{R}^3$)

$$\Delta \frac{1}{4\pi|x-\xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{4.5.2}$$

4.5.1 Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$

Для отримання інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$ будемо використовувати другу формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$\iiint\limits_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x))\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{S} \left(v(x) \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S. \tag{4.5.3}$$

В якості функції $u(\xi)$ оберемо довільну функцію $C^2(\Omega)$, а у якості v, фундаментальний розв'язок оператора Лапласа для тривимірного евклідового простору $\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$.

В результаті підстановки цих величин в останню формулу отримаємо

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi)+u(\xi)\delta(x-\xi)\right)\mathrm{d}\xi = \\ = \iint\limits_{S}\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right)\mathrm{d}S_{\xi}. \tag{4.5.4}$$

Після обчислення другого доданку в лівій частині можемо записати формулу інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$:

$$u(x) = -\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \iint\limits_{S}\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\cdot\frac{\partial n}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right)\mathrm{d}S_{\xi}. \tag{4.5.5}$$

У випадку коли функція $u(x)$ є гармонічною в області Ω то остання формула прийме вигляд:

$$u(x) = \iint\limits_{S}\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right)\mathrm{d}S_{\xi}. \tag{4.5.6}$$

З формул вище можна отримати деякі властивості гармонічних функцій:

Властивість 4.5.1.1

Гармонічна в області Ω функція $u(x)$ має в кожній внутрішній точці області Ω неперервні похідні будь-якого порядку.

Доведення. Дійсно, оскільки $x \in \Omega$, $\xi \in S$, $x \neq \xi$, то для обчислення будь-якої похідної необхідно диференціювати підінтегральну функцію, яка має похідні будь-якого порядку:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}} = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - \\ - u(\xi)\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}\cdot\frac{\partial}{\partial n_{\xi}}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right)\mathrm{d}S_{\xi}. \tag{4.5.7}$$

□

Властивість 4.5.1.2

Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в скінченій області Ω з границею S, то має місце співвідношення

$$\oiint\limits_S \frac{\partial u(x)}{\partial n}\,\mathrm{d}S = 0. \tag{4.5.8}$$

Доведення. Дійсно, у другій формулі Гріна для оператора Лапласа оберемо $v(x) \equiv 1$, тоді інтеграл в лівій частині і другий інтеграл правої частини перетворюється в нуль. В результаті чого отримаємо жадану рівність. □

Теорема 4.5.1.1 (про середнє значення гармонічної функції)

Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в кулі і неперервна в замиканні цієї кулі, то значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері, що обмежує кулю.

Доведення. Використаємо формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$u(x) = \iint\limits_S \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right)\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.9}$$

в якій в якості поверхні S візьмемо сферу радіусу R з центром у точці x_0, і обчислимо значення функції u в точці x_0:

$$u(x_0) = \iint\limits_{S(x_0,R)} \left(\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\right)\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.10}$$

Оскільки $\xi \in S(x_0, R)$, то $\dfrac{1}{4\pi|x_0-\xi|} = \dfrac{1}{4\pi R}$, а

$$\left.\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\right|_{S(x_0,R)} = \frac{1}{4\pi R^2}. \tag{4.5.11}$$

Таким чином

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{S(x_0,R)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,\mathrm{d}S_\xi + \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S(x_0,R)} u(\xi)\,\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.12}$$

Оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, то остаточно маємо

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S(x_0,R)} u(\xi)\, \mathrm{d}S_\xi. \qquad (4.5.13)$$

□

4.5.2 Принцип максимуму гармонічних функцій

Теорема 4.5.2.1 (принцип максимуму гармонічних функцій)
Якщо гармонічна в скінченній області функція досягає у внутрішній точці цієї області свого максимального або мінімального значення, то ця функція є тотожна константа.

Доведення. Нехай $u(x)$ гармонічна функція в обмеженій області Ω і досягає в точці $x_0 \in \Omega$ свого максимального значення. Розглянемо кулю $U(x_0, R_0) \subset \Omega$ максимально великого радіусу.

Оскільки $u(x_0) = \max_{x\in\Omega} u(x)$, то значення функції $u(x)$, коли $x \in S(x_0, R_0)$ задовольняє нерівності $u(x) \le u(x_0)$.

Якщо хоча б у одній точці $S(x_0, R_0)$ нерівність строга, тобто $u(x) < u(x_0)$, то за рахунок неперервності гармонічних функцій ця нерівність буде збережена і в деякому околі цієї точки, а це означатиме, що

$$u(x_0) > \frac{1}{4\pi R_0^2} \iint\limits_{S(x_0,R_0)} u(\xi)\, \mathrm{d}S_\xi. \qquad (4.5.14)$$

Тобто порушується теорема про середнє значення гармонічної функції і ми прийшли до протиріччя з припущенням, що $\exists \xi \in S(x_0, R_0) : u(\xi) < u(x_0)$. Це означає, що $u(x) = u(x_0)$, $x \in S(x_0, R_0)$.

Оскільки ця рівність має місце для кулі будь-якого радіусу $R \le R_0$, то це означає, що $u(x) \equiv u(x_0)$ коли $x \in U(x_0, R_0)$.

Покажемо тепер, що функція $u(x) \equiv u(x_0)$ коли $x \in \Omega$.

Для цього виберемо довільну точку $x^\star \in \Omega$, то з'єднаємо її з точкою x_0 ламаною. Побудуємо послідовність куль $\{U(x_i, R_i)\}_{i=0}^N$ з такими властивостями:

- центри куль x_i, $i = \overline{1..N}$ належать ламаній;
- $x_{i+1} \in U(x_i, R_i) \subset \Omega$, $i = \overline{1..N}$;

- $x^\star \in U(x_N, R_N)$.

Оскільки центр кожної наступної кулі з номером $i+1$, лежить всередині кулі з номером i, то використовуючи метод математичної індукції, ми можемо встановити властивість: якщо функція $u(x) \equiv u(x_0)$ коли $x \in U(x_i, R_i)$ то $u(x) \equiv u(x_0)$, коли $x \in U(x_{i+1}, R_{i+1})$. Це означає, що $u(x) \equiv u(x_0)$, коли $x \in U(x_N, R_N)$. Зокрема, це означає, що $u(x^\star) = u(x_0)$. □

Наслідок 4.5.2.1

Гармонічна функція відмінна від тотожної константи не досягає в скінченній області ні свого максимального ні свого мінімального значення.

Наслідок 4.5.2.2

Якщо функція гармонічна в області Ω і неперервна в $\overline{\Omega}$, то свої максимальне і мінімальне значення вона приймає на границі S області.

Наслідок 4.5.2.3

Якщо функція гармонічна в області Ω і неперервна в $\overline{\Omega}$, то $|u(x)| \leq \max_{x\in S} |u(x)|$.

Наслідок 4.5.2.4

Нехай $u(x), v(x)$ — гармонічні функції в області Ω і має місце нерівність $u(x) \leq v(x)$, $x \in S$, тоді $u(x) \leq v(x)$, $x \in \Omega$.

4.5.3 Оператор Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат

Замість прямокутних координат x, y, z введемо ортогональні криволінійні координати q_1, q_2, q_3 за допомогою співвідношень

$$q_i = f_i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.5.15}$$

які дозволяють записати обернені перетворення

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{4.5.16}$$

Загальний вигляд оператора Лапласа в криволінійних координатах має вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta(u) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right.\\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right),\end{aligned} \tag{4.5.17}$$

де

$$\begin{cases} H_1^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_4^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{cases} \tag{4.5.18}$$

- Для сферичної системи координат $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, і формули (4.5.16), (4.5.18) мають вигляд $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r\sin\theta$.

  Таким чином оператор Лапласа у сферичній системі координат матиме вигляд.

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{4.5.19}$$

- Для циліндричної системи координат $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, і формули (4.5.16), (4.5.18) мають вигляд $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$.

  Оператор Лапласа в циліндричній системі координат має вигляд:

$$\Delta_{\rho,\varphi,z} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{4.5.20}$$

- Якщо функція u не залежить від змінної z, то отримуємо полярну систему координат і вираз оператора Лапласа в полярній системі координат:

$$\Delta_{\rho,\varphi} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{4.5.21}$$

4.5.4 Перетворення Кельвіна гармонічних функцій

Визначення 4.5.4.1. Нехай функція u гармонічна за межами кулі $U(0, R)$, тоді функцію

$$v(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right) \tag{4.5.22}$$

(тут використовується перетворення аргументу обернених радіус векторів $x = R^2/|y|^2 y$ або обернене $y = R^2/|x|^2 x$) будемо називати *перетворенням Кельвіна* гармонічної функції $u(x)$ в n-вимірному евклідовому просторі.

Зауваження 4.5.4.1 — В подальшому будемо вважати, що $R = 1$, цього завжди можна досягти шляхом зміни масштабу.

Твердження 4.5.4.1

Для $n = 3$ перетворення Кельвіна $v(y)$ гармонічної функції $u(x)$ є гармонічною функцією аргументу y.

Доведення. Легко показати, що перший доданок в операторі Лапласа в сферичних координатах (4.5.19) може бути записаний у вигляді

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}. \tag{4.5.23}$$

Таким чином при $n = 3$, $R = 1$, (4.5.22) має вигляд

$$v(y) = \frac{1}{|y|} \cdot u\left(\frac{y}{|y|^2}\right). \tag{4.5.24}$$

Оскільки $y = x/|x|^2$, а $x = y/|y|^2$, то $|y| = 1/|x|$, або $v(y) = |x| \cdot u(x)$. $\square$

Твердження 4.5.4.2

Функція $v(r', \theta, \varphi) = r \cdot u(r, \theta, \varphi)$, де $r = 1/r'$, задовольняє рівнянню Лапласа, якщо $u(r, \theta, \varphi)$ — гармонічна функція.

Доведення. Дійсно,

$$
\begin{aligned}
0 = r \cdot \Delta_{r,\varphi,\theta} u &= \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) = \\
&= (r')^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left((r')^2 \frac{\partial v}{\partial r'} \right) + \\
&\quad + \frac{(r')^2}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 v}{P} \partial \varphi^2 \right) = \\
&= (r')^4 \Delta_{r',\varphi,\theta} v(r', \theta, \varphi).
\end{aligned}
\tag{4.5.25}
$$

При отриманні останньої рівності було враховано що

$$
\frac{\partial v}{\partial r} = -(r')^2 \frac{\partial v}{\partial r'}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = (r')^2 \frac{\partial}{\partial r'} \left((r')^2 \frac{\partial v}{\partial r'} \right). \tag{4.5.26}
$$

□

Зауваження 4.5.4.2 — Аналогічно тому, як було показана гармонічність

$$
v(y) = \frac{1}{|y|} u \left(\frac{y}{|y|^2} \right) \tag{4.5.27}
$$

у тривимірному евклідовому просторі, можна показати гармонічність функції

$$
v(y) = u \left(\frac{y}{|y|^2} \right) \tag{4.5.28}
$$

у двовимірному евклідовому просторі.

4.5.5 Гармонічність в нескінченно віддаленій точці та поведінка гармонічних функцій на нескінченості

Визначення 4.5.5.1. Будемо говорити, що функція $u(x)$ є *гармонічною функцією в нескінченно віддаленій точці*, якщо функція

$$
v(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|y|} u \left(\dfrac{y}{|y|^2} \right), & n = 3, \\[2ex] u \left(\dfrac{y}{|y|^2} \right), & n = 2, \end{cases} \tag{4.5.29}
$$

є гармонічною функцією в точці нуль.

Легко бачити, що

$$v(y) = \begin{cases} |x| \cdot u(x), & n = 3, \\ u(x), & n = 2. \end{cases} \tag{4.5.30}$$

Теорема 4.5.5.1 (про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці в просторі)

Якщо при $n = 3$ функція $u(x)$ гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при $|x| \to \infty$ функція прямує до нуля не повільніше $1/|x|$, а частинні похідні ведуть себе як $D^\alpha u(x) = O(1/|x|^{1+|\alpha|}$.

Теорема 4.5.5.2 (про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці на площині)

Якщо при $n = 2$ функція $u(x)$ гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при $|x| \to \infty$ функція обмежена, а частинні похідні ведуть себе як $D^\alpha u(x) = O(1/|x|^{1+|\alpha|})$.

Визначення 4.5.5.2. Гармонічні функції які мають поведінку на нескінченості визначену теоремами 4.5.5.1 та 4.5.5.2 для тривимірного і двовимірного просторів називають *регулярними на нескінченості* гармонічними функціями, а відповідні оцінки — *умовами регулярності на нескінченості.*

4.5.6 Єдиність гармонічних функцій

Нехай $U(x)$ — гармонічна функція в обмеженій області Ω з границею S, тоді має місце рівність Діріхле

$$\iiint\limits_{\Omega} |\nabla U|^2 \, \mathrm{d}x = \iint\limits_{S} U \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \, \mathrm{d}S. \tag{4.5.31}$$

Нехай $U(x)$ — гармонічна функція області $U(0, R) \setminus \Omega$ з границями S та $S(0, R)$, де R — як завгодно велике число, тоді має місце рівність Діріхле

$$\iiint\limits_{\Omega} |\nabla U|^2 \, \mathrm{d}x = \iint\limits_{S} U \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S(0,R)} U \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \, \mathrm{d}S. \tag{4.5.32}$$

Для доведення рівності Діріхле (4.5.31) достатньо записати очевидний ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint\limits_{\Omega} U(x)\Delta U(x)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Omega} U(x)\nabla\cdot(\nabla U(x))\,\mathrm{d}x = \\ &= \iint\limits_{S} U(x)\,\langle\nabla U(x),\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{\Omega} |\nabla U(x)|^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.5.33}$$

Аналогічно можна довести і рівність (4.5.32).

При формулюванні теорем єдиності гармонічних функцій ми скрізь будемо припускати існування відповідної гармонічної функції, хоча сам факт існування гармонічної функції ми доведемо пізніше.

Теорема 4.5.6.1 (Перша теорема єдиності гармонічних функцій)
Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega' = \mathbb{R}^3\setminus\Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні S задані значення, то така функція єдина.

Доведення. Припустимо, що в області Ω існує принаймні дві гармонічні функції, які приймають на поверхні S однакові значення:

$$\begin{cases} \Delta u_i(x) = 0, & x\in\Omega, \\ u_i|_{x\in S} = f, & i = 1,2. \end{cases} \tag{4.5.34}$$

Для функції $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ будемо мати задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x\in\Omega, \\ u|_{x\in S} = 0. \end{cases} \tag{4.5.35}$$

Застосуємо рівність Діріхле для функції $u(x)$. Будемо мати

$$\iiint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{S} u\cdot\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\cdot\mathrm{d}S = 0. \tag{4.5.36}$$

Звідси маємо, що $\nabla u(x)\equiv 0$, $x\in\Omega$. Остання рівність означає, що $u(x)\equiv$ const, $x\in\overline{\Omega}$ а оскільки $u(x) = 0$, $x\in S$ то $u(x)\equiv 0$, $x\in\Omega$. Тобто ми маємо, що $u_1(x)\equiv u_2(x)$.

Покажемо справедливість теореми для області $\Omega' = \mathbb{R}^3\setminus\Omega$.

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні S однакові значення

$$\begin{cases} \Delta u_i(x) = 0, & x \in \Omega', \\ u_i\big|_{x \in S} = f, & i = 1, 2. \end{cases} \tag{4.5.37}$$

отримаємо для функції $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega', \\ u\big|_{x \in S} = 0, \\ u(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.5.38}$$

Застосуємо для $u(x)$ рівність (4.5.32):

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{U(0,R)\setminus\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \iint\limits_{S} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S + \iint\limits_{S(0,R)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S = \\ = \iint\limits_{S(0,R)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{4.5.39}$$

Спрямуємо радіус кулі R до нескінченності і врахуємо умову регулярності на нескінченості:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega'} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{S(0,R)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S = \\ = \lim_{R\to\infty} O\left(\frac{1}{R^3}\right) \iint\limits_{S(0,R)} \mathrm{d}S = 0. \end{aligned} \tag{4.5.40}$$

Таким чином $u(x) \equiv \mathrm{const}$, $x \in \Omega'$ а оскільки $u(x) = 0$, $x \in S$ то $u_1(x) \equiv u_2(x)$. $\square$

Теорема 4.5.6.2 (Друга теорема єдиності гармонічних функцій)
Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні S задані значення своєї нормальної похідної $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\big|_{x \in S}$, то в області Ω вона визначається с точністю до адитивної константи, а в області Ω' вона єдина.

Доведення. Припустимо, що в області Ω існує принаймі дві гармонічні функції, які приймають на поверхні S однакові значення нормальної похідної

$$\begin{cases} \Delta u_i(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u_i}{\partial \vec{n}}\right|_{x \in S} = f, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{4.5.41}$$

Для функції $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ будемо мати задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x \in S} = 0. \end{cases} \tag{4.5.42}$$

Для функції $u(x)$ використаємо рівність Діріхле:

$$\iiint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = \iint\limits_{S} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S = 0, \tag{4.5.43}$$

тобто $\nabla u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, $u(x) \equiv \mathrm{const}$. Константа залишається невизначеною і таким чином $u_1(x) = u_2(x) + \mathrm{const}$.

Покажемо справедливість теореми для області Ω'.

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні S однакові значення нормальної похідної

$$\begin{cases} \Delta u_i(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ \left.\dfrac{\partial u_i}{\partial \vec{n}}\right|_{x \in S} = f, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{4.5.44}$$

отримаємо для функції $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x \in S} = 0. \end{cases} \tag{4.5.45}$$

Застосуємо для $u(x)$ рівність (4.5.32):

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{U(0,R)\setminus\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x &= \iint\limits_{S} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S + \iint\limits_{S(0,R)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S = \\ &= \iint\limits_{S(0,R)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{4.5.46}$$

Спрямуємо радіус кулі R до нескінченності і врахуємо умову регулярності на нескінченості:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega'} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{S(0,R)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \mathrm{d}S = \\ &= \lim_{R\to\infty} O\left(\frac{1}{R^3}\right) \iint\limits_{S(0,R)} \mathrm{d}S = 0.\end{aligned} \tag{4.5.47}$$

Таким чином $u(x) \equiv \mathrm{const}$, $x \in \Omega'$ а оскільки $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$, то $u(x) \equiv 0$, а $u_1(x) \equiv u_2(x)$. □

Теорема 4.5.6.3 (Третя теорема єдиності гармонічних функцій)
Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні S задані значення лінійної комбінації нормальної похідної та функцій $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha(x) \cdot u\big|_{x\in S}$, $\alpha \geq 0$ то в області Ω та в області Ω' вона визначається єдиним чином.

Вправа 4.5.6.1. Останню теорему довести самостійно.

4.6 Рівняння Гельмгольца, деякі властивості його розв'язків

Приклад 4.6.0.1
Розглянемо спеціальну граничну задачу для хвильового рівняння

$$\begin{cases} a^2 \Delta u(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(x,t), \quad x \in \Omega, \\ \ell_i u\big|_{x\in S} = f(x,t). \end{cases} \tag{4.6.1}$$

Зауваження 4.6.0.1 — В цій задачі відсутні початкові умови у зв'язку з тим, що розглядаються спеціальні значення функції $F(x,t)$ та $f(x,t)$. А саме ми вважаємо, що ці функції є періодичними по аргументу t з однаковим періодом.

Розв'язок. Покладемо, що

$$\begin{cases} F(x,t) = F_1(x)\cos(\omega t) - F_2(x)\sin(\omega t), \\ f(x,t) = f_1(x)\cos(\omega t) - f_2(x)\sin(\omega t). \end{cases} \tag{4.6.2}$$

Можна очікувати, що в результаті доволі тривалої дії таких збурень розв'язок задачі при будь-яких початкових умовах теж буде періодичним, тобто

$$u(x,t) = V_1(x)\cos(\omega t) - V_2(x)\sin(\omega t). \tag{4.6.3}$$

Підставляючи цей розв'язок у задачу (4.6.1), отримаємо

$$\begin{cases} \left(\Delta V_1 + \dfrac{\omega^2}{a^2}V_1\right)\cos(\omega t) - \left(\Delta V_2 + \dfrac{\omega^2}{a^2}V_2\right)\sin(\omega t) = \\ \quad = -\dfrac{F_1}{a^2}\cos(\omega t) - \dfrac{F_2}{a^2}\sin(\omega t), \\ \cos(\omega t)\ell_i V_1|_{x\in S} - \sin(\omega t)\ell_i V_2|_{x\in S} = \\ \quad = f_1\cos(\omega t) - f_2\sin(\omega t). \end{cases} \tag{4.6.4}$$

Оскільки функції $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ — лінійно незалежні, то для амплітуди $V_i(x)$, $i = 1,2$ отримаємо рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta V_j + \dfrac{\omega^2}{a^2}V_j = -\dfrac{F_j}{a^2}, \quad x \in \Omega, \quad j = 1,2, \\ \ell_i V_j|_{x\in S} = f_j. \end{cases} \tag{4.6.5}$$

Зауваження 4.6.0.2 — Аналогічний результат можна отримати, якщо ввести комплексну амплітуду $V = V_1 + iV_2$, комплексну зовнішню силу $F = F_1 + iF_2$ та комплексну амплітуду граничної умови $f = f_1 + if_2$.

Шукаючи розв'язок (4.6.1) у вигляді $U(x,t) = V(x)e^{i\omega t}$, отримаємо для комплексної амплітуди задачу

$$\begin{cases} \Delta V(x) + \dfrac{\omega^2}{a^2} = -\dfrac{F}{a^2}, \quad x \in \Omega, \\ \ell_i V|_{x\in S} = f. \end{cases} \tag{4.6.6}$$

Другим джерелом виникнення рівняння Гельмгольца є стаціонарне рівняння дифузії при наявності в середовищі процесів, що ведуть до розмноження речовини.

Приклад 4.6.0.2

Такі процеси наприклад виникають, наприклад, при дифузії нейтронів. Рівняння має вигляд:

$$\Delta V(x) + \frac{c}{D} V(x) = 0, \tag{4.6.7}$$

де D — коефіцієнт дифузії, c — швидкість розмноження нейтронів.

Зауваження 4.6.0.3 — Суттєва відмінністю граничних задач для рівняння Гельмгольца від граничних задач рівняння Лапласа полягає в можливому порушенні єдиності розв'язку як для внутрішніх так і для зовнішніх задач.

Приклад 4.6.0.3

Розглянемо таку граничну задачу для рівняння Гельмгольца:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 y = 0, \quad 0 < x, y < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0. \end{cases} \tag{4.6.8}$$

Розв'язок. При $k = 0$ ця задача має лише тривіальний розв'язок, що випливає з першої теореми єдності гармонічних функцій.

Нехай тепер k — ціле число. Неважко перевірити, що в цьому разі задача має нетривіальний розв'язок $u(x, y) = \sin(kx)\sin(ky)$, а це в свою чергу означає, що задача з неоднорідними граничними умовами та неоднорідне рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 u = -F(x, y), \quad 0 < x, y < \pi, \\ u(0, y) = \varphi_1(y), \\ u(\pi, y) = \varphi_2(y), \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \\ u(x, \pi) = \psi_2(x) \end{cases} \tag{4.6.9}$$

має неєдиний розв'язок, який визначається з точністю до розв'язку однорідного рівняння, тобто з точністю до функції $A\sin(kx)\sin(ky)$.

Приклад 4.6.0.4

Розглянемо зовнішню задачу для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta u(x) + k^2 u = 0, \quad |x| > \pi, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \\ u(x)\big|_{|x|=\pi} = 0, \\ u(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0. \end{cases} \tag{4.6.10}$$

Розв'язок. При $k = 0$ гранична задача має лише тривіальний розв'язок тотожно рівний нулю, що випливає з другої теореми єдиності гармонічних функцій.

У випадку, коли k — ціле ми маємо, що розв'язком останньої граничної задачі окрім тотожного нуля буде функція

$$u(x) = \frac{\sin(k|x|)}{4\pi|x|}. \tag{4.6.11}$$

Легко перевірити, що ця функція задовольняє як однорідному рівнянню Гельмгольца (це уявна частина фундаментального розв'язку) так і граничній умові на сфері і умові на нескінченості.

Наявність нетривіального розв'язку у однорідної задачі означає неєдиність розв'язку відповідної неоднорідної задачі.

4.6.1 Задача на власні значення для оператора Лапласа

Причини порушення єдиності розв'язку у внутрішньої граничної задачі (4.6.9) і зовнішньої граничної задачі (4.6.10) різні.

Для того щоб зрозуміти причину існування нетривіального розв'язку у задачі (4.6.9) розглянемо більш загальну однорідну задачу з параметром:

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \ell_i u\big|_S = 0 \end{cases} \tag{4.6.12}$$

Розв'язком цієї задачі будемо вважати таку множину значень параметру λ, при яких існує нетривіальний розв'язок граничної задачі (4.6.12), і самі розв'язки, що відповідають цим значенням параметру λ, які називають власними функціями. Неважко зрозуміти, що (4.6.12) є узагальнення задачі Штурма–Ліувілля для оператора Лапласа.

Застосовуючи функцію Гріна $G_i(x, y)$ для оператора Лапласа граничної задачі, яка відповідає типу граничної умови, можемо звести (4.6.12) до однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з ермітовим полярним ядром:

$$u(x) = \lambda \iiint\limits_{\Omega} G_i(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.6.13}$$

Оскільки множина характеристичних чисел ермітового ядра не порожня, то існує дійсне значення параметру $\lambda = \lambda_0$, такі що рівняння (4.6.13) при цьому значені має нетривіальний розв'язок $u(x) = u_0(x)$. Тобто $\lambda_0, u_0(x)$ — характеристичне число і власна функція рівняння (4.6.13), а значить і еквівалентної граничної задачі (4.6.12).

Таким чином, якщо для граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta u(x) + k^2 u(x) = -F(x), & x \in \Omega, \\ \ell_i u(x)|_{x\in S} = 0 \end{cases} \tag{4.6.14}$$

реалізується ситуація, що число k^2 співпадає з одним з характеристичних чисел оператора Лапласа для області з заданим типом граничних умов, то розв'язок задачі (4.6.14) для довільного вільного члена рівняння взагалі кажучи не існує.

Зрозуміло, що (4.6.14) через функцію Гріна можна звести до інтегрального рівняння

$$u(x) = k^2 \iiint\limits_{\Omega} G_i(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y + F_1(x), \tag{4.6.15}$$

де $F_1(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_i(x,y)F(y)\,\mathrm{d}y$.

Третя теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь стверджує, що інтегральне рівняння (4.6.15), у випадку коли k^2 — характеристичне число має розв'язок тоді і лише тоді, коли вільний член F_1 ортогональний усім розв'язкам однорідного рівняння (4.6.13) при $\lambda = k^2$ а сам розв'язок неєдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій, що відповідають заданому значенню характеристичного числа.

Розглянемо тепер природу неєдиності розв'язку зовнішньої задачі (4.6.10). Треба відмітити, що для зовнішніх задач рівняння Лапласа умова регулярності забезпечувала єдиність розв'язку. Для граничної задачі рівняння Гельмгольца в тривимірному просторі вимога лише затухання розв'язку на нескінченості вже не дає можливість виділити єдиний розв'язок.

При розв'язанні зовнішніх задач для рівняння Гельмгольца як правило цікавими є дві основні задачі:

- Розповсюдження хвилі від тіла в нескінченість, коли тіло є джерелом виникнення періодичних коливань.
- Розповсюдження хвилі з нескінченості і взаємодія її з тілом, в цьому випадку відбувається дифракція.

Нагадаємо, що для тривимірного простору у рівняння Гельмгольца є фундаментальні розв'язки

$$q_k^{\pm}(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{4.6.16}$$

які є комплексними амплітудами періодичних сферичних хвиль

$$u_{\pm}(r,t) = \frac{\exp\left\{i\omega\left(t \pm \frac{r}{a}\right)\right\}}{4\pi r} \tag{4.6.17}$$

та, при цьому згадаємо, що $k = \omega a$, $r = |x|$.

Легко перевірити, що сферичні хвилі $u_{\pm}(r,t)$ є розв'язками однорідного хвильового рівняння в тривимірному випадку.

Аналізуючи нахил прямих $t \pm r/a = \text{const}$, можна зрозуміти, що $u_{-}(r,t)$ відповідає сферичній хвилі, яка прямує на нескінченість зі швидкістю a, а $u_{+}(r,t)$ відповідає хвилі як прямує з нескінченості зі швидкістю $-a$.

Визначення 4.6.1.1. Для виділення єдиного розв'язку зовнішньої задачі задаються умови поведінки розв'язку задачі в нескінченно віддаленій точці. Ці умови називають *умовами випромінювання* або *умовами Зомерфельда*:

$$u(x) = O(1/|x|), \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o(1/|x|), \quad |x| \to \infty, \tag{4.6.18}$$

$$u(x) = O(1/|x|), \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \tag{4.6.19}$$

Умова (4.6.18) відповідає хвилям, що уходять на нескінченість, (4.6.19) – хвилям, що приходять з нескінченості.

Саме умови (4.6.18) і (4.6.19) забезпечують єдність розв'язку зовнішніх граничних задач для рівняння Гельмгольца.

Для доведення цього факту можна скористатися формулами інтегрального представлення розв'язку однорідного рівняння Гельмгольца ($\Delta u + k^2 u = 0$):

$$u(x) = -\iint\limits_S \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}} - u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y. \tag{4.6.20}$$

Формула (4.6.20) є аналогом формули (4.5.6) отриманої для представлення розв'язків рівняння Лапласа.

Записавши (4.6.20) для сфери $S_R(0)$ і спрямовуючи її радіус до нескінченності, а також враховуючи умови Зомерфельда (4.6.18) для знака плюс та (4.6.19) для знаку мінус ми отримаємо, що $u(x) \equiv 0$.

У випадку рівняння Гельмгольца на площині умови Зомерфельда мають вигляд:

$$u(x) = O\left(1/\sqrt{|x|}\right), \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(1/\sqrt{|x|}\right), \quad |x| \to \infty, \tag{4.6.21}$$

$$u(x) = O\left(1/\sqrt{|x|}\right), \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o\left(1/\sqrt{|x|}\right), \quad |x| \to \infty. \tag{4.6.22}$$

4.7 Функції Бесселя та їх властивості

При знаходженні розв'язків рівняння Пуассона та Гельмгольца в областях циліндричної форми, рівняння теплопровідності та хвильового рівняння в кругових та циліндричних областях з'являється необхідність записати розв'язки наступних звичайних диференціальних рівняння другого порядку з степеневими коефіцієнтами:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \tag{4.7.1}$$

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0. \tag{4.7.2}$$

В рівняннях (4.7.1), (4.7.2) ν є числовий параметр.

> **Визначення 4.7.0.1.** Рівняння (4.7.1) називають рівнянням Бесселя порядку ν, а рівняння (4.7.2) називають рівнянням Бесселя уявного аргу-

менту порядку ν.

Легко показати, що рівняння (4.7.2) можна отримати з рівняння (4.7.1) якщо в (4.7.1) ввести заміну незалежної змінної $\xi = ix$, цей факт і пояснює назву рівняння (4.7.2).

Знайти розв'язок цих рівнянь у вигляді елементарних функцій не вдається, тому враховуючи поліноміальний вигляд коефіцієнтів рівняння, можна побудувати розв'язок рівнянь у вигляді узагальненого степеневого ряду.

$$y(x) = x^\rho(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots), \tag{4.7.3}$$

де $\rho, a_0, a_1, \ldots$ — невідомі коефіцієнти.

Підставимо (4.7.3) у (4.7.1) і зберемо коефіцієнти при однакових степенях змінної x:

$$(\rho^2-\nu^2)a_0x^\rho+((\rho+1)^2-\nu^2)a_1x^{\rho+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(((\rho+k)^2-\nu^2)a_k+a_{k-2}\right)x^{\rho+k}=0. \tag{4.7.4}$$

З (4.6.4) отримаємо рівності для визначення коефіцієнтів.

$$\begin{aligned} \rho^2 - \nu^2 &= 0, \\ a_1 &= 0, \\ ((\rho+k)^2 - \nu^2)a_k + a_{k-2} &= 0. \end{aligned} \tag{4.7.5}$$

З першого рівняння (4.7.5) маємо:

$$\rho = \nu, \quad \rho = -\nu. \tag{4.7.6}$$

Оберемо перше значення, а саме $\rho = \nu$, тоді отримаємо

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)}, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{4.7.7}$$

Враховуючи (4.7.7) та друге співвідношення (4.7.5) маємо $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2k+1} = \ldots = 0$.

Для коефіцієнтів з парними індексами з формули (4.7.7) легко отримати

$$a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{a_0}{2^{2k}\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+k)\cdot k!} \tag{4.7.8}$$

Обираючи

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \tag{4.7.9}$$

і підставляючи значення коефіцієнтів в (4.7.3) отримаємо

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{4.7.10}$$

Обираючи друге значення параметру $\rho = -\nu$, отримаємо

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\nu+1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \tag{4.7.11}$$

Відмітимо, що визначення функції $J_{-\nu}(x)$ є коректним лише для не цілих значень параметру ν, оскільки визначення a_0 за формулою (4.7.9) при $\nu = -n$ не має змісту, оскільки $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \ldots = \Gamma(-n) = \infty$.

Змінюючи в формулі (4.7.11) індекс сумування $k = k' + n$, отримаємо

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x). \tag{4.7.12}$$

Остання рівність свідчить про лінійну залежність функцій $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$ і таким чином лінійна комбінація цих функцій не може складати загальний розв'язок рівняння Бесселя.

Другий лінійно незалежний розв'язок рівняння Бесселя для довільного значення параметру ν, взагалі кажучи не представляється у вигляді узагальненого степеневого ряду (4.7.3), утворимо спеціальну лінійну комбінацію для нецілих значень параметру ν:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \neq n. \tag{4.7.13}$$

Для $\nu = n$, враховуючи попередні викладки, маємо що чисельник і знаменник тотожно перетворюються в нуль, тобто маємо невизначеність типу $0/0$. Розкриємо невизначеність за допомогою правила Лопіталя:

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right) \tag{4.7.14}$$

Покажемо, що функція $N_n(x)$ задовольняє рівняння (4.7.1). Дійсно, позначимо диференціальний оператор

$$L(J_\nu) = J_\nu'' + \frac{1}{x} \cdot J_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cdot J_\nu = 0, \tag{4.7.15}$$

$$L(J_{-\nu}) = J''_{-\nu} + \frac{1}{x} \cdot J'_{-\nu} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cdot J_{-\nu} = 0. \tag{4.7.16}$$

Продиференціюємо останні рівності по ν, та отримаємо:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{x^2} \cdot J_\nu = 0, \qquad L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{x^2} \cdot J_{-\nu} = 0. \tag{4.7.17}$$

Помножимо перше рівняння на $(+1)^n$, друге рівняння на $(-1)^n$, віднімемо від першого рівняння друге, отримаємо:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - (-1))^n L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{x^2}(J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}) = 0. \tag{4.7.18}$$

Остаточний вигляд функції Бесселя другого роду

$$\begin{aligned} N_n(x) = &-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \ln\frac{x}{2} - \\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!}\left(\Psi(k+n+1) + \Psi(k+1)\right). \end{aligned} \tag{4.7.19}$$

Зауваження 4.7.0.1 — Дуже часто функцію Бесселя другого роду $N_\nu(x)$ називають *функцією Вебера*.

Важливою властивістю функцій Бесселя є асимптотичний характер поведінки цих функцій на нескінченості. Вводячи функцію $y(x) = V(x)/\sqrt{x}$, підставляючи її в рівняння Бесселя отримаємо рівняння

$$V'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 0.25}{x^2}\right) V = 0. \tag{4.7.20}$$

Розв'язки останнього рівняння можна представити для $x \to \infty$ у вигляді

$$V(x) = \gamma \cdot \sin(x + \delta) + O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{4.7.21}$$

і, відповідно,

$$y(x) = \gamma \cdot \frac{\sin(x+\delta)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{4.7.22}$$

Додаткові дослідження дозволяють отримати, наступні асимптотичні формули при $x \to \infty$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{4.7.23}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{4.7.24}$$

Останні формули свідчать про те, що функції Бесселя як першого так і другого роду мають злічену кількість нулів, тобто рівняння $J_\nu(x) = 0$, $N_\nu(x) = 0$ мають злічену кількість коренів, які для великих значень аргументу x асимптотично прямують до нулів тригонометричних функцій $\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. А самі функції Бесселя ведуть себе як $O(1/\sqrt{x})$, $x \to \infty$.

Аналіз формул (4.7.10) та (4.7.23) показує, що при $x \to 0$:

$$J_n(x) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.7.25}$$

$$N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^n \to \infty, \tag{4.7.26}$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \to \infty. \tag{4.7.27}$$

Важливою властивістю функцій Бесселя першого та другого роду є рекурентні формули, яким задовольняють функції Бесселя:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x), \tag{4.7.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}N_\nu(x) + \frac{\nu}{x}N_\nu(x) = N_{\nu-1}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}N_\nu(x) - \frac{\nu}{x}N_\nu(x) = -N_{\nu+1}(x). \tag{4.7.29}$$

Виключаючи з двох співвідношень похідну, можна зв'язати між собою функції Бесселя трьох сусідніх порядків.

Для прикладу наведемо графіки функцій Бесселя $J_3(x)$ та $N_3(x)$:

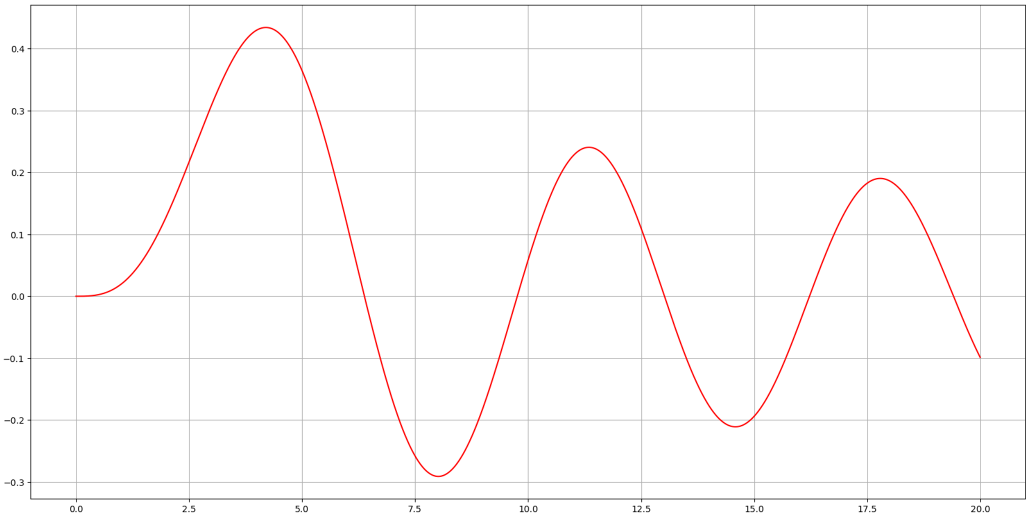


Рис. 1: $J_3(x)$

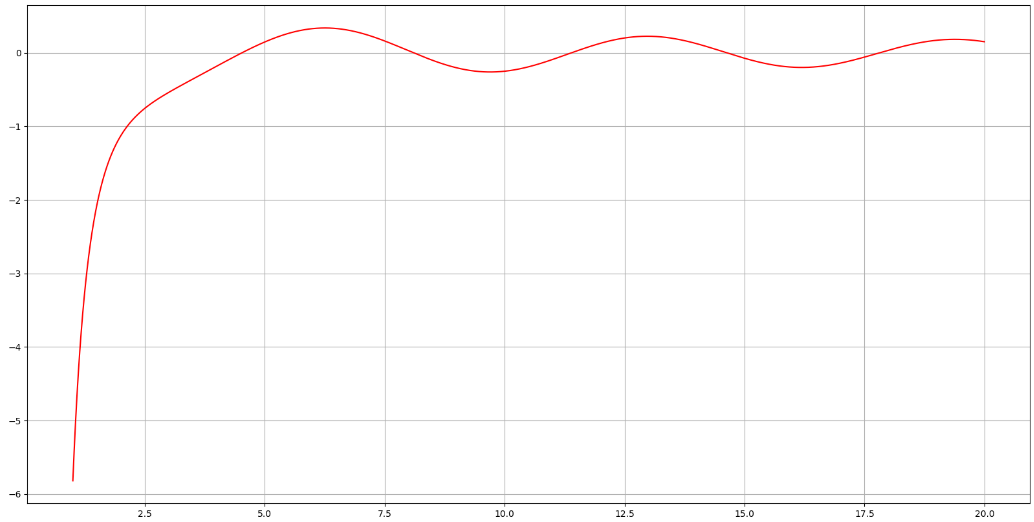


Рис. 2: $N_3(x)$

Другий клас функцій Бесселя — функції Бесселя уявного аргументу можна отримати як два лінійно–незалежних розв'язки рівняння (4.7.2), зокрема їх можна записати за формулою (4.7.10) з використанням заміни змінної $x := ix$ в результаті будемо мати функцію Бесселя першого роду уявного аргументу:

$$I_\nu(x) = \frac{J_\nu(ix)}{i^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \cdot \Gamma(k+\nu+1)}, \quad 0 < x < \infty. \tag{4.7.30}$$

Другий лінійно-незалежний розв'язок для нецілих ν можна отримати аналогічно попередньому розв'язку з формули (4.7.11):

$$I_{-\nu}(x) = i^{\nu} J_{-\nu}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-\nu}}{k! \cdot \Gamma(k-\nu+1)}, \quad 0 < x < \infty. \tag{4.7.31}$$

Легко бачити, що при $\nu = n$ функції $I_n(x) = I_{-n}(x)$, тобто є лінійно залежними між собою і не можуть бути використані для запису загального розв'язку рівняння (4.7.2).

Функцію другого роду уявного аргументу будують у вигляді лінійної комбінації

$$K_{\nu}(x) = \frac{\pi(I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x))}{2\sin(\nu\pi)}. \tag{4.7.32}$$

Враховуючи, що $I_n(x) = I_{-n}(x)$, остання формула має невизначеність типу $0/0$ при $\nu = n$. Розкриваючи її за правилом Лопіталя отримаємо

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left(\left(\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial I_{\nu}(x)}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \right). \tag{4.7.33}$$

Визначення 4.7.0.2. Функцію $K_\nu(x)$ називають функцією другого роду уявного аргументу, або функцією Макдональда вона має наступний вигляд:

$$K_n(x) = -I_n(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n-k)!} \left(\Psi(k+1) + \Psi(k+n+1)\right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k}. \tag{4.7.34}$$

Виходячи з рекурентних співвідношень (4.7.23), (4.7.24), можна отримати рекурентні співвідношення для функцій Бесселя уявного аргументу першого та другого роду:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I_\nu(x) - \frac{\nu}{x} \cdot I_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I_\nu(x) + \frac{\nu}{x} \cdot I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x), \tag{4.7.35}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} K_\nu(x) + \frac{\nu}{x} \cdot K_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} K_\nu(x) + \frac{\nu}{x} \cdot K_\nu(x) = -K_{\nu+1}(x). \tag{4.7.36}$$

Відмітимо також характер поведінки функцій Бесселя уявного аргументу при $x = 0$ та $x \to \infty$.

Виходячи з формул (4.7.30) та (4.7.34) можна зробити висновок, що

$$I_\nu(x) = O(x^\nu), \quad x \to 0, \tag{4.7.37}$$

$$K_\nu(x) = O(x^{-\nu}), \quad \nu > 0, \qquad K_0(x) = O(\ln(x)), \quad x \to 0, \tag{4.7.38}$$

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \cdot e^x, \qquad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{-x}, \quad x \to \infty. \tag{4.7.39}$$

Наведемо графіки функцій $I_3(x)$ та $K_3(x)$:

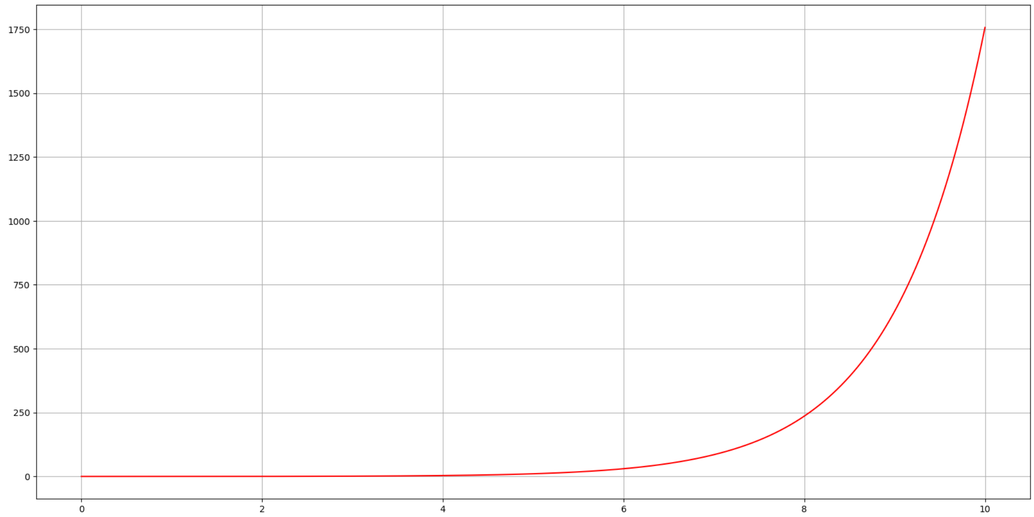


Рис. 3: $I_3(x)$

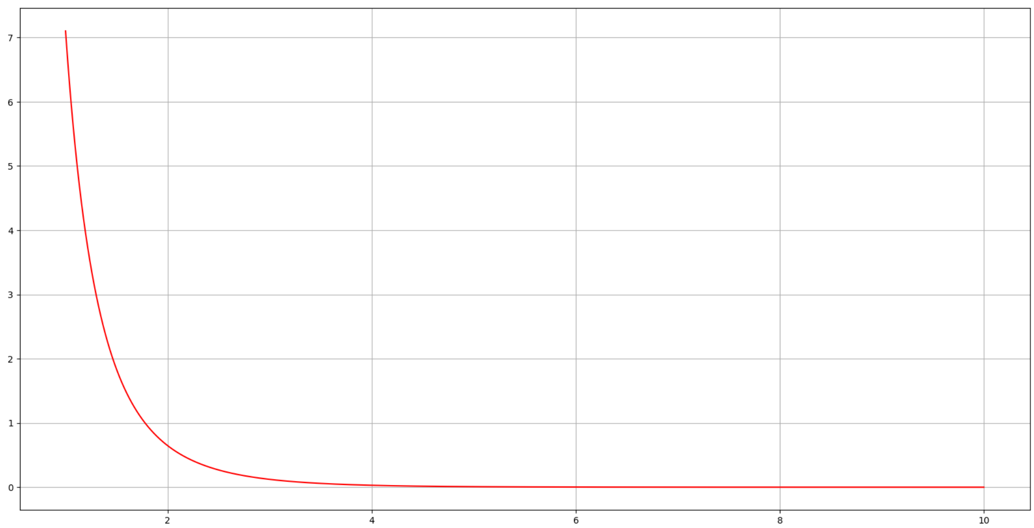


Рис. 4: $K_3(x)$

4.8 Потенціали операторів Лапласа та Гельмгольца, їх властивості

Теорія потенціалів є дуже ефективним засобом дослідження існування і єдності розв'язків граничних задач для еліптичних та параболічних рівнянь. За допомогою потенціалів граничні задачі можна звести до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з полярним ядром, а іноді до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з сингулярним або навіть гіперсингулярним ядром.

При отримані замість граничної задачі інтегрального рівняння Фредгольма дослідження існування і єдності розв'язку можна проводити використовуючи теорію Фредгольма для інтегральних рівнянь.

Крім того, використовуючи потенціали можна побудувати більш ефективні чисельні методи знаходження розв'язків граничних задач.

> **Визначення 4.8.0.1.** Чисельні методи які базуються на теорії потенціалу називають *методами граничних інтегральних рівнянь.*

Введемо потенціали для основних еліптичних операторів Лапласа і Гельмгольца для тривимірного евклідового простору:

$$U(x) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y \qquad (4.8.1) \qquad U^k(x) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\rho(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y \quad (4.8.2)$$

$$V(x) = \iint\limits_{S} \frac{\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \qquad (4.8.3) \qquad V^k(x) = \iint\limits_{S} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \quad (4.8.4)$$

$$W(x) = \iint\limits_{S} \sigma(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \qquad (4.8.5) \qquad W^k(x) = \iint\limits_{S} \sigma(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \quad (4.8.6)$$

> **Визначення 4.8.0.2.** Інтеграли (4.8.1), (4.8.2) будемо називати *потенціалом об'єму* для операторів Лапласа та Гельмгольца відповідно. Інтеграли (4.8.3), (4.8.4) будемо називати *потенціалами простого шару* (слоя) для операторів Лапласа та Гельмгольца відповідно. Інтеграли (4.8.5), (4.8.6)

будемо називати *потенціалами подвійного шару* (слоя) для операторів Лапласа та Гельмгольца відповідно.

Визначення 4.8.0.3. При цьому функції ρ, μ, σ називають *щільностями потенціалів*, які задані в області Ω або на поверхні S.

Як легко бачити, при записі усіх потенціалів використовується фундаментальний розв'язок відповідного оператора: фундаментальний розв'язок оператора Лапласа

$$\frac{1}{4\pi|x-y|} \tag{4.8.7}$$

для потенціалів об'єму, простого шару і подвійного шару для оператора Лапласа, або фундаментальний розв'язок оператора Гельмгольца

$$\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \tag{4.8.8}$$

для потенціалів об'єму, простого шару і подвійного шару.

Аналогічно потенціалам для операторів Лапласа і Гельмгольца в тривимірному просторі можна ввести потенціали і для двовимірного простору. При цьому треба використовувати фундаментальні розв'язки оператора Лапласа і Гельмгольца в двовимірному просторі.

Нагадаємо, що фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа при $n = 2$ має вигляд

$$q_0(|x-y|) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, \tag{4.8.9}$$

а фундаментальний розв'язок для оператора Гельмгольца при $n = 2$ можна записати у вигляді

$$q_k(|x-y|) = \pm\frac{i}{4}\left(J_0(k|x-y|) \pm iN(k|x-y|)\right), \tag{4.8.10}$$

де функції $J_0(x), N_0(x)$ — функції Бесселя нульового порядку першого і другого роду.

Відповідно до вигляду фундаментальних розв'язків, потенціали в двовимірному просторі матимуть вигляд:

$$U_0(x) = \iint\limits_D \rho(y) q_0(|x-y|)\,\mathrm{d}y \tag{4.8.11}$$

$$U_k(x) = \iint\limits_D \rho(y) q_k(|x-y|)\,\mathrm{d}y \tag{4.8.12}$$

$$V_0(x) = \oint\limits_C \mu(y) q_0(|x-y|)\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.13}$$

$$V_k(x) = \oint\limits_C \mu(y) q_k(|x-y|)\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.14}$$

$$W_0(x) = \oint\limits_C \sigma(y) \frac{\partial q_0(|x-y|)}{\partial \vec{n}_y}\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.15}$$

$$W_k(x) = \oint\limits_C \sigma(y) \frac{\partial q_k(|x-y|)}{\partial \vec{n}_y}\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.16}$$

Відмітимо, що властивості потенціалів залежать від декількох факторів, перелічимо їх:

- властивостей щільностей потенціалів;
- положення точки x (належить x області інтеграції або не належить);
- властивості поверхні S для потенціалів простого і подвійного шару.

4.8.1 Властивості потенціалів поза областю інтеграції

Теорема 4.8.1.1 (про властивості потенціалів поза областю інтеграції)
Якщо щільності потенціалів простого і подвійного шару інтегровані на поверхні S, ($\iint_S |\mu(y)|\,\mathrm{d}S_y < \infty$, $\iint_S |\sigma(y)|\,\mathrm{d}S_y < \infty$), а потенціал об'єму — інтегрована в області Ω,)$\iiint_\Omega |\rho(y)|\,\mathrm{d}y < \infty$), то відповідні потенціали для оператору Лапласа і Гельмгольца є функціями які мають неперервні похідні будь-якого порядку в довільній області Ω_1, яка не перетинається з областю інтегрування (Ω для потенціалу об'єму та S для потенціалів простого та подвійного шару) і в кожній точці Ω_1 ці потенціали задовольняють рівняння Лапласа або Гельмгольца відповідно.

Доведення теореми для будь-якого з потенціалів практично не відрізняється, тому продемонструємо доведення для випадку потенціалу простого шару оператора Гельмгольца.

Доведення. Оскільки щільність потенціалу простого шару μ інтегрована на S, а функція

$$\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \tag{4.8.17}$$

є неперервно-диференційованою скільки завгодно разів у випадку, коли $(x, y) \in (\Omega_1, S)$, $\Omega_1 \cap S = \emptyset$, то можна застосувати теорему про можливість диференціювання такого інтегралу, шляхом обчислення похідної від підінтегральної функції.

Тобто

$$D^\alpha V^k(x) = \iint\limits_S \mu(y) D^\alpha \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y, \quad x \in \Omega_1, \tag{4.8.18}$$

оскільки підінтегральна функція є неперервною функцією аргументу x, майже для кожного $y \in S$, то

$$\iint\limits_S \mu(y) D^\alpha \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y \in C(\Omega_1). \tag{4.8.19}$$

Оскільки потенціал має неперервні похідні будь-якого порядку, то

$$(\Delta + k^2) V^k(x) = \iint\limits_S \mu(y)(\Delta_x + k^2) \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y = 0, \quad x \in \Omega_1. \tag{4.8.20}$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки при $x \neq y$:

$$(\Delta_x + k^2) \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \equiv 0. \tag{4.8.21}$$

$\square$

Теорема 4.8.1.2 (про неперервність і неперервну диференційованість потенціалу об'єму)

Якщо щільність потенціалу об'єму інтегрована в області Ω, то потенціал об'єму для оператора Лапласа і Гельмгольца (4.8.1) та (4.8.2) є неперервними і неперервно-диференційованими функціями в усьому евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\rho_1(y) = \begin{cases} \rho(y), & y \in \Omega, \\ 0, & y \in \Omega'. \end{cases} \tag{4.8.22}$$

Функція ρ_1 залишається інтегрованою в будь-якій області $\Omega_1 \in \mathbb{R}^3$.

Нехай $x \in \mathbb{R}^3$ — довільна точка. Розглянемо будь-яку область, яка містить точку x, нехай це область Ω_1, тоді

$$U^k(x) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.8.23}$$

На останню формулу будемо дивитися як на результат відображення деякої функції $\rho_1 \in L_2(\Omega_1)$ за допомогою полярного ядра

$$K(x,y) = \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \tag{4.8.24}$$

Відомо, що результатом відображення буде функція $U_k \in C(\Omega_1)$. Таким чином неперервність потенціалу доведена.

Розглянемо тепер функцію

$$U_k^{(s)}(x) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.8.25}$$

Для неї:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} &= \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{\partial|x-y|}{\partial x_s} = \\ &= \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{x_s-y_s}{|x-y|} = \frac{A_s(x,y)}{|x-y|^2}, \end{aligned} \tag{4.8.26}$$

де A_s — неперервна функція. Таким чином

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \tag{4.8.27}$$

є полярним ядром в будь-якиі області тривимірного простору.

А це означає що

$$U_k^{(s)}(x) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.8.28}$$

як результат відображення функції $\rho_1 \in L_2(\Omega_2)$ за допомогою полярного ядра є неперервною функцією. Тобто $U_k^{(s)} \in C(\Omega_2)$.

Покажемо тепер, що

$$U_k^{(s)}(x) = \frac{\partial U_k(x)}{\partial x_s}. \tag{4.8.29}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
\int\limits_{z_0}^{z_s} U_k^{(s)}(\ldots, x_s, \ldots)\,\mathrm{d}x_s &= \int\limits_{z_0}^{z_s} \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_s = \\
&= \iiint\limits_{\Omega_1} \rho_1(y) \int\limits_{z_0}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\,\mathrm{d}x_s\,\mathrm{d}y = \\
&= \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\,\mathrm{d}y \Bigg|_{x_s = z_s} - \\
&\quad - \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\,\mathrm{d}y \Bigg|_{x_s = z_0} = \\
&= U_k(x)\big|_{x_s = z_s} - U_k(x)\big|_{x_s = z_0}.
\end{aligned} \tag{4.8.30}$$

Вважаємо точку z_s змінною, а z_0 фіксованою і обчислимо похідну від лівої і правої частини останньої рівності:

$$\frac{\partial U_k(\ldots, z_s, \ldots)}{\partial z_s} = U_k^{(s)}(\ldots, z_s, \ldots). \tag{4.8.31}$$

□

Теорема 4.8.1.3 (про другі похідні потенціалу об'єму)
Якщо цільність потенціалу об'єму $\rho \in C^{(1)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, то об'ємний потенціал (4.8.1) і (4.8.2) має в області Ω неперервні похідні другого порядку і задовольняє відповідно рівнянню Пуассона:

$$\Delta U(x) = -\rho(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.8.32}$$

або неоднорідному рівнянню Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) U_k(x) = -\rho(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.8.33}$$

Доведення проведемо для потенціалу об'єму оператора Гельмгольца в тривимірному випадку. Усі інші випадки розглядаються аналогічно.

Доведення. Оскільки щільність потенціалу є неперервною, то згідно до теореми 4.8.1.2 потенціал об'єму має неперервні перші похідні зокрема і в області Ω. Обчислимо похідну потенціалу об'єму:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_k(x)}{\partial x_j} &= \iiint\limits_{\Omega} \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y = -\iiint\limits_{\Omega} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y = \\ &= \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{S} \rho(y) \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(\vec{n}, y_j)\,\mathrm{d}S_y\end{aligned} \tag{4.8.34}$$

Тут була використана формула інтегрування за частинами. Таким чином перша частинна похідна потенціалу об'єму представлена у вигляді двох потенціалів: потенціалу об'єму з неперервною щільністю $\partial\rho/\partial y_j$ і потенціалу простого шару з щільністю $\rho(y)\cos(\vec{n}, y_j)$. З теореми 4.8.1.2 випливає що перший доданок — потенціал об'єму — є неперервно-диференційована функція, а з теореми 4.8.1.1 випливає, що другий доданок — потенціал простого шару — теж є неперервно-диференційована функція.

Таким чином можна обчислити другу похідну, шляхом диференціювання рівності (4.8.41):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial x_j^2} = &\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \\ &- \iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y = \\ = &\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \\ &- \iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y = A.\end{aligned} \tag{4.8.35}$$

Перший доданок в правій частині останньої рівності є невласним інтегралом, запишемо його у вигляді:

$$A = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)} \frac{\partial\rho(y)}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{S} \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)} \rho(y)\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \underbrace{\iint\limits_{S} \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y +}$$
$$+ \underbrace{\iint\limits_{S} \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y} - \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.36}$$

Оскільк и

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} &= \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{(y_j-x_j)}{|x-y|} = \\ &= \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(y \vec{-} x, y_j) = \\ &= -\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(\vec{n}_y, y_j).\end{aligned} \tag{4.8.37}$$

то можемо записати, що

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y = \\ &\qquad = -\iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \rho(y)\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos^2(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y = \\ &\qquad\qquad = \frac{(\pm ik\varepsilon-1)e^{\pm ik\varepsilon}}{4\pi}\iint\limits_{S(0,1)} \rho(x+\varepsilon\xi)\cos^2(n_\xi, y_j)\,\mathrm{d}S_\xi.\end{aligned} \tag{4.8.38}$$

Таким чином друга похідна має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial x_j^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(&\iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)} \rho(y)\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \\ &- \frac{(\pm ik\varepsilon-1)e^{\pm ik\varepsilon}}{4\pi}\iint\limits_{S(0,1)} \rho(x+\varepsilon\xi)\cos^2(n_\xi, x_j)\,\mathrm{d}S_\xi\Bigg).\end{aligned} \tag{4.8.39}$$

Обчислимо нарешті значення оператора Гельмгольца від потенціалу об'єму:

$$
\begin{aligned}
(\Delta + k^2)U_k(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)} \rho(y)(\Delta + k^2)\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y\right) - \\
&= -\rho(x)\iint\limits_{S(0,1)}\sum_{j=1}^{3}\cos^2(n_\xi, x_j)\,\mathrm{d}S_\xi = -\rho(x).
\end{aligned}
\tag{4.8.40}
$$

$\square$

Зауваження 4.8.1.1 — Теорема 4.8.1.3 має цілком конкретне застосування.

Приклад 4.8.1.1

Зокрема частинні розв'язки рівняння Гельмгольца $(\Delta + k^2)u(x) = -F(x)$, $x \in \Omega$ або Пуассона $\Delta u(x) = -F(x)$, $x \in \Omega$ можна знайти у вигляді потенціалів об'єму для оператора Гельмгольца або Лапласу, з щільністю потенціалу $\rho(x) = F(x)$.

4.8.2 Поверхня Ляпунова

Визначення 4.8.2.1. Поверхню $S \subset \mathbb{R}^3$ будемо називати *поверхнею Ляпунова*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

- В будь-якій точці x поверхні S існує єдина цілком визначена нормаль $\vec{n}_x$.
- Для будь-яких точок $x, y \in S$, існують такі додатні константи a, α, що кут θ між векторами нормалі $\vec{n}_x, \vec{n}_y$ задовольняє умові

$$\theta \le a|x-y|^\alpha. \tag{4.8.41}$$

Теорема 4.8.2.1 (про сферу Ляпунова)

Нехай S — замкнена поверхня Ляпунова, тоді існує така постійна $d > 0$, що якщо довільну точку $x_0 \in S$ прийняти за центр сфери радіусу d, то будь-яка пряма паралельна нормалі $\vec{n}_{x_0}$ до поверхні S перетинає поверхню S всередині сфери лише один раз.

Визначення 4.8.2.2. Цю сферу $S(x_0, d)$ будемо називати *сферою Ляпунова.*

Зауваження 4.8.2.1 — Зрозуміло, що якщо число d є радіусом сфери Ляпунова, то будь-яке число менше за d теж буде радіусом сфери Ляпунова. Звідси випливає, що число d можна обрати так, що би воно задовольняє нерівності

$$a \cdot d^\alpha < 1. \tag{4.8.42}$$

4.8.3 Місцева система координат на поверхні Ляпунова

На поверхні S виберемо довільну точку x і зробимо її початком місцевої локальної системи координат, вісь ξ_3 направимо в напрямку зовнішньої нормалі $\vec{n}_x$, а дві інші вісі ξ_1, ξ_2 розташуємо в дотичній площині до поверхні S в точці x так що би обрані вісі утворювали праву трійку. Враховуючи теорему 4.8.2.1, зрозуміло, що частину поверхні Ляпунова S, яка розташована всередині сфери $S(x, d)$ можна записати у вигляді явного рівняння

$$\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2), \quad f \in C^1. \tag{4.8.43}$$

При цьому очевидно, що

$$f(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2. \tag{4.8.44}$$

Останні рівності мають місце оскільки рівняння дотичної площини, що проходить через точку $(0, 0, 0)$ має вигляд

$$\xi_3 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_1} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_2} \cdot \xi_2, \tag{4.8.45}$$

а з іншого боку ця площина задається рівнянням $\xi_3 = 0$.
Оскільки, виконується (4.8.43), то сама функція f і її частинні похідні всередині сфери Ляпунова будуть малими. Наша задача оцінити порядок малості функції f і її частинних похідних.

Позначимо через $S_1(x) = S \cap U(x, d)$ — частину поверхні, яка лежить всередині сфери Ляпунова. Візьмемо довільну точку $y \in S_1(x)$, оцінимо $\cos(\vec{n}_y, \xi_3) = \cos(\vec{n}_y, \vec{n}_x)$:

$$\cos(\vec{n}_y, \xi_3) = \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots \geq 1 - \frac{\theta^2}{2!}, \tag{4.8.46}$$

остання нерівність виконується завдяки нерівностям (4.8.41), (4.8.42), $\theta \le a|x-y|^\alpha < ad^\alpha < 1$. Нехай $r = |x-y|$, тоді

$$\cos(\vec{n}_y, \xi_3) = \cos(\vec{n}_y, \vec{n}_x) \ge 1 - \frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha} \ge \frac{1}{2}. \tag{4.8.47}$$

Оскільки всередині сфери Ляпунова рівняння поверхні має вигляд (4.8.43), то вектор одиничної нормалі можна записати:

$$\vec{n}_y = \frac{\left(-\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}, -\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2}} = \begin{pmatrix} \cos(\vec{n}_y, \xi_1) \\ \cos(\vec{n}_y, \xi_2) \\ \cos(\vec{n}_y, \xi_3) \end{pmatrix}. \tag{4.8.48}$$

Оцінимо

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2} = \frac{1}{\cos(\vec{n}_y, \vec{n}_x)} \le$$
$$\le \frac{1}{1 - \frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}}{1 - \frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}} \le 1 + a^2 r^{2\alpha}. \tag{4.8.49}$$

Таким чином

$$\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2 \le 2a^2 r^{2\alpha} + a^4 r^{4\alpha} \le 3a^2 r^{2\alpha}, \tag{4.8.50}$$

$\left|\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_i}\right| \le \sqrt{3} a r^\alpha$, $i = 1, 2$, або

$$\cos(\vec{n}_y, \xi_i) \le \sqrt{3} a r^\alpha, \quad i = 1, 2. \tag{4.8.51}$$

Оцінимо $|\xi_3| = |f(\xi_1, \xi_2)|$ для частини поверхні $S_1(x)$. Позначимо через $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $r^2 = \rho^2 + \xi_3^2$. Враховуючи оцінку (4.8.51), можна записати оцінку для похідної вздовж будь-якого напряму в дотичній площині:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \le \sqrt{3} a r^\alpha \le \sqrt{3} a d^\alpha \le \sqrt{3}. \tag{4.8.52}$$

Таким чином

$$|\xi_3| = |f| \le \int_0^\rho \left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \le \sqrt{3}\rho, \tag{4.8.53}$$

а звідси маємо $\rho^2 \le r^2 \le 4\rho^2$, або $\rho \le r \le 2\rho$.

З (4.8.52) маємо

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \le \sqrt{3}ar^{\alpha} \le 2^{\alpha}\sqrt{3}a\rho^{\alpha}. \tag{4.8.54}$$

Таким чином з (4.8.53):

$$|\xi_3| \le \frac{2^{\alpha}a\sqrt{3}}{\alpha+1} = a_1\rho^{\alpha+1} \le a_1 r^{\alpha+1}. \tag{4.8.55}$$

Оцінимо тепер $\cos(\vec{n}_y, \vec{r})$ де $\vec{r} = y \stackrel{\rightharpoonup}{-} x$. Дійсно

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}_y, \vec{r}) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{y_k - x_k}{y - x} \cos(\vec{n}_y, x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{2} \frac{\xi_k}{r} \cos(\vec{n}_y, x_k) + \frac{\xi_3}{r} \cos(\vec{n}_y, x_3) \le \\ &\le 2\sqrt{3}r^{\alpha} + a_1 r^{\alpha} = c_1 r^{\alpha}. \end{aligned} \tag{4.8.56}$$

Остаточно маємо маємо

$$\cos(\vec{n}_y, \vec{r}) \le c_1 r^{\alpha}. \tag{4.8.57}$$

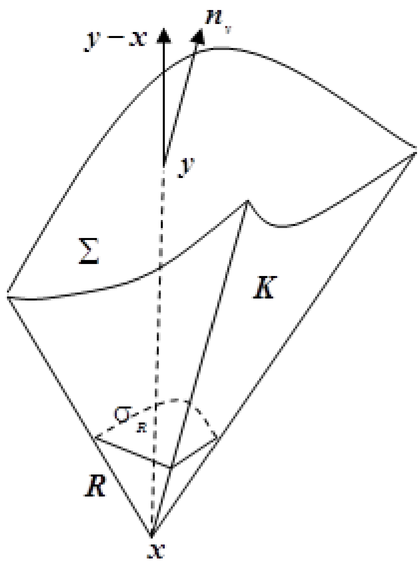
4.8.4 Тілесний кут спостереження поверхні

Розглянемо двосторонню кусково-гладку поверхню Σ, яка може бути як замкненою так і незамкненою. Зафіксуємо одну з двох сторін поверхні, обравши на ній додатній напрямок нормалі. Нехай $y \in \Sigma$ — довільна точка, $\vec{n}_y$ — зовнішня нормаль в точці y до поверхні Σ. Нехай x — довільна точка простору, зокрема може належати і поверхні Σ.

Будемо вважати, що взаємне розташування поверхні Σ і точки x є таким, що $\cos(\vec{n}_y, y - x) \ge 0$.

З'єднаємо кожну точку поверхні Σ з точкою x. Поверхня, яка утворюється в результаті з'єднання країв поверхні Σ з точкою x утворює конічну поверхню K.

Оберемо точку x за центр сфери достатньо малого радіусу R, такого, щоб сфера $S(x, R)$ не перетиналася з поверхнею Σ. Позначимо через σ_R площу поверхні тієї частини сфери, яка опинилася всередині конусу:



Визначення 4.8.4.1. *Тілесним кутом спостереження* поверхні Σ з деякої точки $x \in \mathbb{R}^3$ будемо називати величину

$$\omega(x, \Sigma) = \frac{\sigma_R}{R^2}. \tag{4.8.58}$$

Остання величина, очевидно, не залежить від радіусу сфери R і тому представляє міру тілесного кута.

У випадку, коли поверхня Σ є такою, що величина $\cos(\vec{n}_y, y - x)$ змінює свій знак в залежності від положення точки y, для визначення тілесного кута спостереження такої поверхні, вона розбивається на окремі частини $\Sigma = \bigsqcup_i \Sigma_i$, на кожній з яких $\operatorname{sign}(\cos(\vec{n}_y, y - x)) = \mathrm{const}$, $y \in \Sigma_i$.

Таким чином

$$\omega(x, \Sigma) = \sum_i \omega(x, \Sigma_i) \cdot \operatorname{sign}(\cos(\vec{n}_y, y - x))\big|_{y \in \Sigma_i}. \tag{4.8.59}$$

Лема 4.8.4.1

Для будь-якої кусково-гладкої поверхні Σ, кут спостереження цієї поверхні визначається за формулою

$$\omega(x, R) = -\iiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x - y|} \, \mathrm{d}S_y. \tag{4.8.60}$$

Теорема 4.8.4.1 (про обмеженість кута спостереження для скінченої поверхні Ляпунова)

Якщо Σ — скінченна поверхня Ляпунова, то існує така постійна C_0, що

$$\iiint\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right| \mathrm{d}S_y \leq C_0. \tag{4.8.61}$$

4.8.5 Потенціал подвійного шару та його пряме значення

Згідно до теореми 4.8.1.1 попередньої лекції, потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца (а також Лапласа)

$$W^k(x) = \iint\limits_{S} \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \tag{4.8.62}$$

для будь-якої області, яка не має перетину з поверхнею S є функцією яка має похідні будь-якого порядку.

В точках поверхні S потенціали подвійного шару є невласним інтегралом і його поведінка залежить від властивості щільності та властивості поверхні інтегрування.

Теорема 4.8.5.1 (про пряме значення потенціалу подвійного шару)

Якщо S замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma \in C(S)$, тоді потенціал подвійного шару (4.8.5), (4.8.6) має в будь-якій точці x поверхні S цілком визначене скінчене значення і це значення неперервно змінюється, коли точка x пробігає поверхню S.

Доведення. Оскільки $\sigma \in C(S)$, то σ — обмежена на поверхні S, таким чином

$$\begin{aligned} \left| \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right| &\leq M \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right| \leq \\ &\leq M\sqrt{1+k^2|x-y|^2} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \right| \leq \\ &\leq M_1 \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \right| \end{aligned} \tag{4.8.63}$$

Згідно до теореми 5 лекції 24 інтеграл

$$\iint\limits_S \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right| \mathrm{d}S_y \tag{4.8.64}$$

існує, а таким чином існує інтеграл

$$W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mathrm{d}S_y \tag{4.8.65}$$

коли $x \in S$.

Покажемо тепер, що $W^k \in C(S)$. Розглянемо

$$K(x,y) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \tag{4.8.66}$$

як ядро інтегрального оператора.

Оскільки

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_y, y-x), \tag{4.8.67}$$

де

$$A(x,y) = (\mp ik|x-y|+1)e^{\pm ik|x-y|}, \tag{4.8.68}$$

то згідно (4.8.57) $\cos(\vec{n}_y, y-x)) \le c_1|x-y|^\alpha$. Таким чином

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)\cos(\vec{n}_y, y-x)|x-y|^{-\alpha/2}}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} = \frac{A_1(x,y)}{|x-y|^{2-\alpha/2}} \tag{4.8.69}$$

є полярним ядром. А це в свою чергу забезпечує відображення неперервної на S щільності σ в неперервний на S потенціал подвійного шару W^k. □

Визначення 4.8.5.1. Значення потенціалу подвійного шару в точках поверхні будемо називати *прямим значенням потенціалу подвійного шару* і позначатимемо його $\overline{W^k(x)}$, $x \in S$.

4.8.6 Інтеграл Гауса

Визначення 4.8.6.1. *Інтегралом Гауса* будемо називати потенціал подвійного шару оператора Лапласа з щільністю $\sigma(y) = 1$, тобто

$$W_0(x) = \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y. \tag{4.8.70}$$

Лема 4.8.6.1

Якщо S — замкнена поверхня Ляпунова, що обмежує область Ω, то інтеграл Гауса визначається наступною формулою:

$$W_0(x) = \begin{cases} -1, & x \in \Omega, \\ -1/2, & x \in S, \\ 0, & x \in \Omega'. \end{cases} \tag{4.8.71}$$

Доведення. Розглянемо випадок коли $x \in \Omega'$. В цьому випадку функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ — гармонічна в області Ω по аргументу y оскільки $y \in S$ то $x \neq y$. Згідно до властивості гармонічної функції маємо

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y = 0. \tag{4.8.72}$$

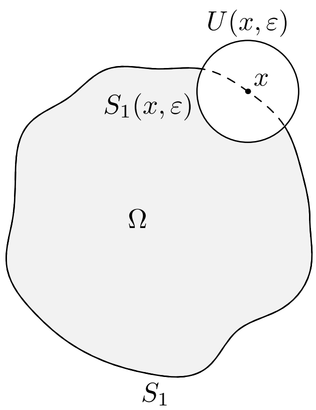
Для випадку, коли $x \in \Omega$ розглянемо область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U(x, \varepsilon)$. Функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ буде гармонічною в області Ω_ε і для неї має місце співвідношення

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y + \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y = 0. \tag{4.8.73}$$

Обчислимо значення

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\cos(\vec{n}_y, y-x)}{4\pi|x-y|^2} \, \mathrm{d}S_y = \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} (-1) \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \mathrm{d}S_y = 1. \end{aligned} \tag{4.8.74}$$

Випадок $x \in S$ можна дослідити, якщо розглянути область $\Omega_\varepsilon^1 = \Omega \setminus (\Omega \cap U(x, \varepsilon))$:



У ній функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ — гармонічна і записати інтеграл по замкненій поверхні S^1_ε яка обмежує область Ω^1_ε та спрямувати ε до нуля. $\square$

Аналізуючи інтеграл Гауса легко бачити, що навіть у найпростішому випадку постійної щільності потенціал подвійного шару при переході через поверхню S має розрив. Наступна теорема вивчає поведінку потенціалу подвійного шару при підході до поверхні S зсередини та ззовні області.

Теорема 4.8.6.1 (про граничні значення потенціалу подвійного шару)
Нехай S — замкнута поверхня Ляпунова, а σ — неперервна на S щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца та Лапласа $W^k(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C(\overline{\Omega'}) \cap C(S)$ і його граничні значення при підході до поверхні S зсередини $W^k_{\mathrm{i}}(x)$ і ззовні $W^k_{\mathrm{e}}(x)$ задовольняють співвідношенням:

$$W^k_{\mathrm{i}}(x) = \overline{W^k(x)} - \frac{\sigma(x)}{2}, \tag{4.8.75}$$

$$W^k_{\mathrm{e}}(x) = \overline{W^k(x)} + \frac{\sigma(x)}{2}. \tag{4.8.76}$$

Доведення. Розглянемо потенціал подвійного шару

$$\begin{aligned} W^k(x) &= \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y = \\ &= \iint\limits_S \sigma(y)(1 \mp ik|x-y|)e^{\pm ik|x-y|} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y. \end{aligned} \tag{4.8.77}$$

Позначимо $(1 \mp ik|x-y|)e^{\pm ik|x-y|} = \varphi(|x-y|)$.

Розглянемо довільну точку $x_0 \in S$ та запишемо потенціал подвійного шару у вигляді:

$$\begin{aligned} W^k(x) &= W^k(x) \pm \iint\limits_S \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y = \\ &= W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0)W_0(x). \end{aligned} \tag{4.8.78}$$

де

$$W_1^k(x) = \iint\limits_S \left(\sigma(y)\varphi(|x-y|) - \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.79}$$

а $W_0(x)$ — інтеграл Гауса. Покажемо, що W_1^k — неперервна функція в точці x_0. Візьмемо точку x_0 за центр сфери $U(x_0,\eta)$, яка розіб'є поверхню S на дві частини S' і S'', де $S' = S \cap U(x_0,\eta)$, а $S'' = S \setminus S'$. Враховуючи представлення поверхні $S = S' \cap S''$, запишемо

$$W_1^k(x) = W_1'^k(x) + W_1''^k(x) = \iint\limits_{S'} (\ldots)\,\mathrm{d}S'_y + \iint\limits_{S''} (\ldots)\,\mathrm{d}S''_y. \tag{4.8.80}$$

Покажемо, що $|W_1^k(x) - W_1^k(x_0)|$ можна зробити як завгодно малим за рахунок зближення точок x та x_0. Запишемо очевидну нерівність:

$$\left|W_1^k(x) - \overline{W_1^k(x_0)}\right| \le \left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| + \left|W_1'^k(x)\right| + \left|\overline{W_1'^k(x_0)}\right|. \tag{4.8.81}$$

Оцінимо праву частину нерівності. Оберемо радіус сфери η таким чином щоби

$$\left|\sigma(y)\varphi(|x-y|) - \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right| \le \frac{\varepsilon}{3C_0}, \tag{4.8.82}$$

де ε — довільне мале число, а C_0 — константа з формулювання теореми 4.8.4.1, нерівність (4.8.61). Це можливо завдяки неперервності $\sigma(y)\varphi(|x-y|)$ по аргументу y. Таким чином

$$\left|W_1'^k(x_0)\right| \le \frac{\varepsilon}{3C_0}\iint\limits_{S'}\left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\right|\mathrm{d}S'_y \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.8.83}$$

Аналогічна нерівність виконується і для $\left|\overline{W_1'^k(x_0)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$, як для частинного випадку положення точки $x = x_0$.

Зафіксуємо радіус сфери η і будемо вважати, що точка x достатньо близька до точки x_0 така, що $|x-x_0| \le \eta/2$, тоді на поверхні S'':

$$|x-y| \ge |y-x_0| - |x_0-x| \ge \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}. \tag{4.8.84}$$

Таким чином підінтегральна функція в інтегралі $W_1''^k(x)$ є неперервною і тому неперервним буде і сам інтеграл, тобто $\left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Це доводить неперервність $W_1''^k(x)$ в точці x_0.

З неперервності $W_1^k(x)$, можемо записати

$$W_{1\ ,i}^k(x_0) = W_{1\ ,e}^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)}. \tag{4.8.85}$$

Врахуємо представлення

$$W^k(x) = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x - x_0|)W_0(x). \tag{4.8.86}$$

Обчислимо граничні значення потенціалу в точці x_0 зсередини та ззовні:

$$W_i^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0,i}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} - \sigma(x_0), \tag{4.8.87}$$

$$W_e^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0,e}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)}. \tag{4.8.88}$$

Оскільки

$$\overline{W_1^k(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} - \sigma(x_0)\overline{W_0(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}, \tag{4.8.89}$$

то з трьох останніх рівностей отримаємо:

$$W_i^k(x) = \overline{W^k(x)} - \frac{\sigma(x)}{2}, \tag{4.8.90}$$

$$W_e^k(x) = \overline{W^k(x)} + \frac{\sigma(x)}{2}. \tag{4.8.91}$$

□

4.8.7 Потенціал простого шару та його властивості

Нагадаємо, що потенціали простого шару для оператора Лапласа та Гельмгольца записуються у вигляді

$$V(x) = \iint\limits_S \frac{\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \qquad V^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.92}$$

Вивчимо властивості цих потенціалів в усьому евклідовому просторі.

Теорема 4.8.7.1 (про неперервність потенціалу простого шару)

Якщо S — замкнута поверхня Ляпунова, а μ вимірювана і обмежена на S фуекція, то потенціал простого шару оператора Лапласа та Гельмгольца є функцією неперервною в усьому евклідовому просторі.

Доведення. Оскільки властивості потенціалів в будь-якій точці простору, яка не належить поверхні S досліджувались в теоремі 4.8.1.1, то встановити неперервність потенціалу простого шару необхідно лише в точках поверхні S.

Побудуємо сферу Ляпунова $S(x,d)$ і нехай $S'_d(x)$ — частина поверхні S, яка знаходиться всередині сфери Ляпунова. Тоді потенціал простого шару

$$V^k(x) = \iint\limits_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y + \iint\limits_{S\setminus S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.93}$$

У другому інтегралі підінтегральна функція є неперервна і обмежена , а значить цей інтеграл існує.

Для оцінки першого інтегралу введемо локальну систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 з центром у точці x. Нехай $G'(x)$ — проекція $S'_d(x)$ на площину $\xi_3 = 0$, дотичну до поверхні S в точці x, тоді:

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y\right| &\le \iint\limits_{G'(x)} \frac{|\mu(\xi_1,\xi_2)|\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2}{4\pi\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\cos(\vec{n}_y,\xi_3)} \le \\ &\le 2M\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{4\pi\rho} = Md.\end{aligned} \tag{4.8.94}$$

При дослідженні інтегралу були використані оцінки (4.8.47) та оцінка

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.8.95}$$

Таким чином потенціал простого шару дійсно існує в кожній точці простору $\mathbb{R}^3$.

Покажемо тепер неперервність потенціалу в точці $x \in S$.

Оберемо сферу Ляпунова $S(x,\eta)$, $\eta < d$. Тоді потенціал простого шару можна представити аналогічно (4.8.93) у вигляді:

$$V^k(x) = \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y + \iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.96}$$

Очевидно, що другий інтеграл

$$V_1^k(x) = \iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \tag{4.8.97}$$

є неперервною функцією і $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ така, що $|V_1^k(x) - V_1^k(x')| \le \varepsilon/3$ як тільки $|x-x'| < \delta(\varepsilon)$.

Покажемо, що

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \le \frac{2\varepsilon}{3} \tag{4.8.98}$$

при $|x-x'| < \delta$.

Очевидно, що

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \le$$

$$\le \left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| + \left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right|. \tag{4.8.99}$$

Розглянемо другий інтеграл і виберемо точки x, x' так, що $|x-x'| < \eta/2$.

Введемо локальну систему координат з центром в точці x. Тоді нехай точка $y = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$. Тоді

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|y-x'|} \le \frac{1}{\sqrt{(\xi_1-\xi'_1)^2 + (\xi_2-\xi'_2)^2}} \le \frac{1}{\rho} \tag{4.8.100}$$

а також

$$\rho \le |y-x'| = |y-x'+x-x| \le |x-x'| + |x-y| \le \eta + \frac{\eta}{2} = \frac{3\eta}{2}. \tag{4.8.101}$$

Таким чином можна записати оцінку інтеграла

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \leq 2M \iint\limits_{G'_\eta(x)} \frac{\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2}{4\pi\sqrt{(\xi_1-\xi'_1)^2+(\xi_2-\xi'_2)^2}} \leq \\ \leq 2M \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{3\eta/2} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{4\pi\rho} = \frac{3\eta M}{2} \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.8.102}$$

за рахунок вибору достатньо маленького значення η.

Інтеграл

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4.8.103}$$

як частинний випадок попереднього інтегралу при $x' = x$. Таким чином встановлено, що $|V^k - V^k(x')| \leq \varepsilon$, якщо $|x - x'| \leq \delta$. $\square$

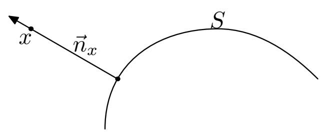
4.8.8 Нормальна похідна потенціалу простого шару

Будемо розглядати потенціал простого шару

$$V^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \tag{4.8.104}$$

для оператору Гельмгольца.

Візьмемо довільну точку $x \notin S$, і проведемо через цю точку яку-небудь нормаль $\vec{n}_x$ до поверхні S:



Для такого випадку в точці x, можна обчислити похідну по напрямку нормалі $\vec{n}_x$ від потенціалу простого шару, яку обчислюють шляхом диференціювання підінтегральної функції

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y = \iint\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.105}$$

Обчислимо вираз

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\pm ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2} \cdot e^{\pm ik|x-y|} \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} \cos(\vec{n}_x, x_j) = \\ = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_x, x-y). \tag{4.8.106}$$

Теорема 4.8.8.1 (про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару)

Якщо μ обмежена і вимірювана функція на поверхні Ляпунова S, то нормальна похідна потенціалу простого шару

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} = \iint\limits_S \mu(y) \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_x, x-y)\, \mathrm{d}S_y. \tag{4.8.107}$$

має в кожній точці поверхні S цілком визначене скінчене значення, яке неперервно змінюється коли точка x пробігає поверхню S.

Визначення 4.8.8.1. Це значення називають *прямим значенням нормальної похідної потенціалу простого шару*, позначається $\overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x}}$, $x \in S$.

Доведення. При доведенні теореми будемо розглядати нормальну похідну потенціалу, як результат відображення щільності μ за допомогою інтегрального оператора з ядром

$$K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_x, x-y). \tag{4.8.108}$$

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова, можна показати, що це ядро є полярним, оскільки для достатньо малих значень $|x-y|$ виконується $\cos(\vec{n}_x, x-y) \le a_2|x-y|^\alpha$. Це означає, що

$$K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}\cos(\vec{n}_x, x-y)|x-y|^{-\alpha/2}}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} = \\ = \frac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} \tag{4.8.109}$$

є полярним ядром. Далі використовуємо, що інтегральний оператор з полярним ядром відображає обмежену функцію у неперервну. $\square$

Теорема 4.8.8.2 (про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару)

Якщо S замкнута поверхня Ляпунова, а μ неперервна на S щільність, то потенціал простого шару має на S граничні значення правильної нормальної похідної при підході до точки $x \in S$ зсередини та ззовні, і ці граничні значення можуть бути обчислені за формулами:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_i} = \overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}}} + \frac{\mu(x)}{2}, \tag{4.8.110}$$

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_e} = \overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}}} - \frac{\mu(x)}{2}. \tag{4.8.111}$$

Визначення 4.8.8.2. Граничні значення нормальної похідної в точці $x_0 \in S$ потенціалу простого шару зсередини $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_i}$ та ззовні $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_e}$ будемо називати *правильними*, якщо вони є граничними значеннями $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}}$ коли $x \to x_0$ вздовж нормалі $\vec{n}_{x_0}$ зсередини та ззовні відповідно.

Доведення. Розглянемо вираз, який представляє собою суму потенціалу подвійного шару і нормальної похідної потенціалу простого шару з однаковою щільністю $\mu(x)$:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} + W^k(x) = \iint\limits_S \mu(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y. \tag{4.8.112}$$

Можна показати, що ця функція змінюється неперервно, коли точка x перетинає поверхню S, рухаючись по нормалі до цієї поверхні в точці x.

Враховуючи цю неперервність при переході через поверхню вздовж нормалі , можемо записати:

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} + W_i^k(x_0) = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} + W_e^k(x_0) = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \overline{W^k(x_0)}. \tag{4.8.113}$$

Звідси маємо:

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} = \overline{W^k(x_0)} - W_i^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \frac{\mu(x_0)}{2}. \tag{4.8.114}$$

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} = \overline{W^k(x_0)} - W_e^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} - \frac{\mu(x_0)}{2}. \tag{4.8.115}$$

□

4.9 Дослідження існування розв'язків основних граничних задач рівняння Лапласа та Гельмгольца

Будемо розглядати замкнену Ляпуновську поверхню, яка обмежує дві області Ω та Ω' — зовнішню по відношенню до області Ω. Будемо розглядати основні граничні задачі рівняння Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u|_{x\in S} = f(x). \end{cases} \tag{4.9.1}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ u|_{x\in S} = f(x), \\ u(x) = O(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.9.2}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in S} = f(x). \end{cases} \tag{4.9.3}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in S} = f(x), \\ u(x) = O(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.9.4}$$

> **Визначення 4.9.0.1.** Будемо називати граничні задачі (4.9.1) та (4.9.2) *внутрішньою* та *зовнішньою граничними задачами Діріхле* і позначати D_i та D_e відповідно. Граничні задачі (4.9.3) та (4.9.4) будемо називати *внутрішньою* та *зовнішньою граничними задачами Неймана* та позначати N_i та N_e відповідно.

Функцію $f(x)$ будемо вважати неперервною на поверхні Ляпунова S.

Враховуючи властивості потенціалів, будемо шукати розв'язки граничних задач Діріхле у вигляді потенціалу подвійного шару, а задач Неймана у вигляді потенціалу простого шару з невідомими щільностями:

$$u(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \qquad \text{для } D_\mathrm{i} \text{ та } D_\mathrm{e}, \tag{4.9.5}$$

$$u(x) = \iint\limits_S \mu(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \qquad \text{для } N_\mathrm{i} \text{ та } N_\mathrm{e}. \tag{4.9.6}$$

В області Ω та Ω' потенціали простого шару та подвійного шару задовольняють рівняння Лапласа.

Для знаходження розв'язків відповідних граничних задач необхідно задовільними граничним умовам на поверхні S та для зовнішніх задач умовам регулярності на нескінченості.

Запишемо інтегральні співвідношення, які дозволять задовольнити граничні умови та визначити невідомі щільності потенціалів.

Для запису інтегральних співвідношень використаємо теореми про граничні значення потенціалу подвійного шару та граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару.

$$f(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y - \frac{\sigma(x)}{2}, \quad x \in S, \quad D_{\mathrm{i}} \tag{4.9.7}$$

$$f(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y + \frac{\sigma(x)}{2}, \quad x \in S, \quad D_{\mathrm{e}} \tag{4.9.8}$$

$$f(x) = \iint\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y + \frac{\mu(x)}{2}, \quad x \in S, \quad N_{\mathrm{i}} \tag{4.9.9}$$

$$f(x) = \iint\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y - \frac{\mu(x)}{2}, \quad x \in S, \quad N_{\mathrm{e}}. \tag{4.9.10}$$

Неважко бачити, що рівняння (4.9.7)–(4.9.10) є інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду і розпадаються на дві пари союзних (спряжених): D_{i}, N_{e} та D_{e}, N_{i}. З теорем Фредгольма відомо, що існування і єдність розв'язків інтегрального рівняння і спряженого до нього виконується одночасно. Тому ми будемо досліджувати одночасно пари рівнянь D_{i}, N_{e} та D_{e}, N_{i}.

Ядро інтегрального рівняння (4.9.8) має вигляд

$$K(x,y) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} = -\frac{\cos(y-x, \vec{n}_y)}{4\pi|x-y|^2}, \tag{4.9.11}$$

відповідно спряженого до нього рівняння (4.9.10) має ядро:

$$K^{\star}(x,y) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} = -\frac{\cos(x-y, \vec{n}_x)}{4\pi|x-y|^2}, \tag{4.9.12}$$

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова і оцінки $\cos(y-x, \vec{n}_y) < a_1|x-y|^{\alpha}$, можна встановити, що ядра $K(x,y)$, $K^{\star}(x,y)$ є полярними і для таких інтегральних рівнянь можна застосовувати теореми Фредгольма.

4.9.1 Дослідження внутрішньої задачі Діріхле та зовнішньої задачі Неймана

Покажемо, що інтегральні рівняння Фредгольма (4.9.7) з полярним ядром (4.9.11) та спряжене до нього рівняння (4.9.10) мають єдиний розв'язок для будь-якого неперервного вільного члена.

Розглянемо однорідне рівняння для рівняння (4.9.10)

$$\iint\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y - \frac{\mu(x)}{2} = 0, \quad x \in S. \tag{4.9.13}$$

Нехай $\mu_0(x) \in L_2(S)$ — розв'язок однорідного рівняння (4.9.13). Зрозуміло, що в цьому випадку функція $\mu_0(x) \in C(S)$ і задовольняє рівняння

$$\iint\limits_S \mu_0(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y - \frac{\mu_0(x)}{2} = 0, \quad x \in S. \tag{4.9.14}$$

Побудуємо потенціал простого шару з щільністю μ_0 і позначимо його

$$V_0(x) = \iint\limits_S \mu_0(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.9.15}$$

Потенціал (4.9.15) має правильну нормальну похідну при підході до поверхні S ззовні, а рівняння (4.9.14) означає, що

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial \vec{n}_\mathrm{e}} \equiv 0, x \in S. \tag{4.9.16}$$

Зрозуміло, що для V_0 задовольняє граничній задачі

$$\begin{cases} \Delta V_0(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ \left.\dfrac{\partial V_0(x)}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in S} = 0, \\ V_0(x) = O(1/|x|), \quad |x| \to \infty \end{cases} \tag{4.9.17}$$

яка має лише тривіальний розв'язок, тобто $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Оскільки потенціал простого шару є неперервною функцією в усьому евклідовому просторі, то $V_0(x) \equiv 0$, $x \in S$, таким чином $V_0(x)$ задовольняє граничній задачі Діріхле

$$\begin{cases} \Delta V_0(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ V_0(x)|_{x\in S} = 0, \end{cases} \tag{4.9.18}$$

яка має лише тривіальний розв'язок $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Таким чином маємо, що $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, а це означає, враховуючи (4.9.15), що $\mu_0(x) \equiv 0$, $x \in S$. Таким чином однорідне рівняння (4.9.13) має лише тривіальний розв'язок, а відповідне неоднорідне рівняння (4.9.10) і спряжене до нього неоднорідне рівняння (4.9.7) має єдиний розв'язок для будь-якого неперервного вільного члену $f(x)$. З наведених міркувань має місце

Теорема 4.9.1.1 (про існування розв'язку внутрішньої задачі Діріхле та зовнішньої задачі Неймана)

Нехай S — замкнена поверхня Ляпунова, тоді внутрішня задача Діріхле (4.9.1) та зовнішня задача Неймана (4.9.4) мають єдині розв'язки для будь-яких неперервних функцій $f(x)$ і розв'язки цих задач можна представити у вигляді потенціалу подвійного шару (4.9.5) та простого шару (4.9.6) відповідно.

4.9.2 Дослідження зовнішньої задачі Діріхле та внутрішньої задачі Неймана

Розглянемо однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню Фредгольма (4.9.8)

$$\iint\limits_S \sigma_0(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \,\mathrm{d}S_y + \frac{\sigma_0(x)}{2} = 0, \quad x \in S, \quad D_\mathrm{e}. \tag{4.9.19}$$

Згідно до властивостей інтегралу Гауса $W_0(x)$, легко перевірити, що, рівняння (4.9.19) має нетривіальний розв'язок $\sigma_0(x) \equiv 1$, можна показати, що інших нетривіальних розв'язків не існує. Це означає, що розв'язок спряженого неоднорідного рівняння (4.9.9) існує тоді і лише тоді, коли його вільний член f ортогональний розв'язкам спряженого однорідного рівняння, тобто функції $\sigma_0(x) \equiv 1$. Умову ортогональності можна записати у вигляді

$$\iint\limits_S f(x)\,\mathrm{d}S = 0. \tag{4.9.20}$$

Таким чином має місце

Теорема 4.9.2.1 (про існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана)

Нехай S — замкнута поверхня Ляпунова, а $f \in C(S)$, тоді внутрішня задача Неймана (4.9.3) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконана умова ортогональності (4.9.20), а сам розв'язок можна представити у вигляді потенціалу простого шару (4.9.6).

Розглянемо випадок зовнішньої задачі Діріхле. Згідно до того, що однорідне рівняння (4.9.19) має один нетривіальний розв'язок, то однорідне спряжене до нього рівняння

$$\iint\limits_S \mu_1(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y + \frac{\mu_1(x)}{2}, \quad x \in S, \quad N_{\text{inner}} \tag{4.9.21}$$

теж має один нетривіальний розв'язок $\mu_1(x)$ — власну функцію характеристичного числа $\lambda = -2$. Згідно до третьої теореми Фредгольма, неоднорідне рівняння (4.9.8) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова ортогональності

$$\iint\limits_S f(x)\mu_1(x) \, \mathrm{d}S = 0 \tag{4.9.22}$$

і при цьому розв'язок інтегрального рівняння (4.9.8) неєдиний.

В той же час відомо, що зовнішня задача Діріхле має єдиний розв'язок (друга теорема єдиності гармонічних функцій). Отже маємо протиріччя, яке викликане тим, що потенціал подвійного шару

$$u(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \tag{4.9.23}$$

у вигляді якого ми шукаємо розв'язок зовнішньої задачі Діріхле не є гармонічною функцією регулярною на нескінченості. Дійсно цей потенціал веде себе як $O(1/|x|^2)$, $|x| \to \infty$, тобто прямує до нуля швидше ніж регулярна гармонічна функція.

Для виправлення цієї ситуації будемо шукати розв'язок зовнішньої задачі Діріхле D_e у вигляді:

$$u(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y + \frac{1}{|x|} \iint\limits_S \sigma(y) \, \mathrm{d}S_y, \tag{4.9.24}$$

де перший доданок як і раніше є потенціалом подвійного шару, а другий — *потенціал Робена*, який не порушуючи гармонічність цієї функції, забезпечує регулярність на нескінченості. При цьому ми вважаємо, що система координат обрана таким чином, що точка $x = 0 \in \Omega$.

Для знаходження щільності σ, запишемо інтегральне співвідношення використовуючи теорему про граничні значення потенціалу подвійного шару (потенціал Робена є неперервною функцією в $\mathbb{R}^3$):

$$f(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{|x|} \right) \mathrm{d}S_y + \frac{\sigma(x)}{2}. \tag{4.9.25}$$

Тут $K(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \dfrac{1}{4\pi|x-y|} + \dfrac{1}{|x|}$ — ядро інтегрального рівняння.

Покажемо, що (4.9.25) має єдиний розв'язок. Для цього покажемо, що однорідне рівняння

$$\iint\limits_S \sigma(y) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{|x|} \right) \mathrm{d}S_y + \frac{\sigma(x)}{2} = 0 \tag{4.9.26}$$

має лише тривіальний розв'язок. Нехай σ_0 — деякий розв'язок рівняння (4.9.26). Побудуємо потенціал з щільністю σ_0:

$$U_0(x) = \iint\limits_S \sigma_0(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \mathrm{d}S_y + \frac{1}{|x|} \iint\limits_S \sigma_0(y) \, \mathrm{d}S_y, \tag{4.9.27}$$

який задовольняє рівняння Лапласа для $x \in \Omega'$. З (4.9.26) випливає, що граничне значення потенціалу U_0 при підході до поверхні S ззовні дорівнює нулю, тобто функція U_0 є розв'язком граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta U_0(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ U_0|_{x \in S} = 0, \\ U_0(x) = O(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.9.28}$$

Ця задача має лише тривіальний розв'язок, тобто $U_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Помножимо (4.9.27) на $|x|$, та спрямуємо $x \to \infty$. В результаті отримаємо, що

$$\iint\limits_S \sigma(y) \, \mathrm{d}S = 0. \tag{4.9.29}$$

Тобто будь-який розв'язок інтегрального рівняння (4.9.26), задовольняє співвідношення (4.9.29), але тоді рівняння (4.9.26) спрощується і приймає вигляд

$$\iint\limits_s \sigma_0(y) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y + \frac{\sigma_0(x)}{2} = 0. \tag{4.9.30}$$

Відомо, що це рівняння має у якості розв'язку функцію $\sigma_0(x) \equiv \mathrm{const}$, але з (4.9.29) випливає що $\sigma_0(x) \equiv 0$. Таким чином, однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок, а відповідне неоднорідне рівняння (4.9.25) має єдиний розв'язок для будь-якого вільного члена f. Тобто нами доведена

Теорема 4.9.2.2 (про існування розв'язку зовнішньої задачі Діріхле) Нехай S — замкнена поверхня Ляпунова, $f \in C(S)$, тоді зовнішня задача Діріхле (4.9.2) має єдиний розв'язок регулярний на нескінченності для довільної неперервної функції f і цей розв'язок може бути знайдений у вигляді суми потенціалі подвійного шару і потенціалу Робена.

4.9.3 Третя гранична задача для рівняння Лапласа

Окрім основних граничних задач рівняння Лапласа, метод потенціалів може бути застосований до третьої граничної задачі (Ньютона).

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha(x) u \right) \Big|_{x \in S} = f(x). \end{cases} \tag{4.9.31}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha(x) u \right) \Big|_{x \in S} = f(x), \\ u(x) = O(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.9.32}$$

Будемо припускати, $\alpha(x) > 0$, $x \in S$. Розв'язок граничних задач (4.9.31) та (4.9.32) будемо шукати у вигляді потенціалів простого шару

$$V(x) = \iint\limits_S \mu(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} \,\mathrm{d}S_y. \tag{4.9.33}$$

Враховуючи теорему про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару запишемо інтегральні рівняння для щільності потенціалу μ по поверхні S:

$$f(x) = \iint\limits_S \mu(y) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{\alpha(x)}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y + \frac{\mu(x)}{2}, \quad x \in S, \quad H_{\mathrm{i}}, \tag{4.9.34}$$

$$f(x) = \iint\limits_S \mu(y) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{\alpha(x)}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y - \frac{\mu(x)}{2}, \quad x \in S, \quad H_{\mathrm{e}}. \tag{4.9.35}$$

Можна показати, що у випадку, коли $\alpha(x) \geq 0$, $x \in S$, інтегральні рівняння (4.9.34) та (4.9.35) мають єдині розв'язки для будь-якої неперервної функції $f(x)$, і ці розв'язки можуть бути знайдені у вигляді потенціалу простого шару.

4.9.4 Дослідження існування розв'язків граничних задач рівняння Гельмгольца

Розглянемо граничні задачі для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u|_{x\in S} = f(x). \end{cases} \tag{4.9.36}$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ u|_{x\in S} = f(x), \\ u(x) = O(1/|x|), \quad |x| \to \infty, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial |x|} \pm iku(x) = o(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.9.37}$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in S} = f(x) \end{cases} \tag{4.9.38}$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x) = 0, \quad x \in \Omega', \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in S} = f(x), \\ u(x) = O(1/|x|), \quad |x| \to \infty, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial |x|} \pm iku(x) = o(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.9.39}$$

Будемо шукати розв'язки граничних задач для рівняння Гельмгольца у вигляді потенціалу простого шару

$$V^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \tag{4.9.40}$$

для задачі Неймана (4.9.38), (4.9.39) та у вигляді потенціалу подвійного шару

$$W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \tag{4.9.41}$$

для задачі Діріхле (4.9.36), (4.9.37).

Теорема 4.9.4.1 (про існування розв'язків граничних задач для рівняння Гельмгольца)

Нехай число k^2 не є власним числом внутрішніх задач Діріхле та Неймана оператора Лапласа в області Ω, тоді граничні задачі Діріхле та Неймана, внутрішня та зовнішня (4.9.36), (4.9.38) та (4.9.37), (4.9.39) мають єдиний розв'язок для будь-якої неперервної функції $f(x)$ на поверхні S, і ці розв'язки можна представити у вигляді потенціалів подвійного шару та простого шару відповідно.

Доведення. Будемо шукати розв'язки внутрішньої та зовнішньої задачі Діріхле у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y, \tag{4.9.42}$$

а внутрішньої та зовнішньої задач Неймана у вигляді потенціалу простого шару

$$u(x) = \iint\limits_S \frac{e^{-ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y, \tag{4.9.43}$$

Враховуючи властивості потенціалів та фундаментальних розв'язків оператора Гельмгольца, легко бачити, що ці функції задовольняють однорідному рівнянню Гельмгольца та умовам регулярності на нескінченості у випадку зовнішніх задач. Для визначення невідомої щільності запишемо граничні інтегральні рівняння:

$$f(x) = -\frac{\sigma(x)}{2} + \iint\limits_S K(x,y)\sigma(y) \, \mathrm{d}S_y, \quad D_{\mathrm{i}}, \tag{4.9.44}$$

$$f(x) = \frac{\sigma(x)}{2} + \iint\limits_S K(x,y)\sigma(y) \, \mathrm{d}S_y, \quad D_{\mathrm{e}}, \tag{4.9.45}$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{2} + \iint\limits_S K^\star(x,y)\mu(y) \, \mathrm{d}S_y, \quad N_{\mathrm{i}}, \tag{4.9.46}$$

$$f(x) = -\frac{\mu(x)}{2} + \iint\limits_S K^\star(x,y)\mu(y) \, \mathrm{d}S_y, \quad N_{\mathrm{e}}. \tag{4.9.47}$$

Тут

$$K(x,y) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2} e^{ik|x-y|} \cos(y-x, \vec{n}_y) \tag{4.9.48}$$

та

$$K^\star(x,y) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{e^{-ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{-ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2} e^{-ik|x-y|} \cos(x-y, \vec{n}_x) \quad (4.9.49)$$

— ядра основного та спряженого інтегральних рівнянь.

Вивчимо випадок зовнішньої задачі Діріхле та внутрішньої задачі Неймана D_e, N_i. Розглянемо однорідне інтегральне рівняння, яке відповідає N_i:

$$0 = \frac{\mu(x)}{2} + \iint\limits_S K^\star(x,y)\mu(y)\,\mathrm{d}S_y. \quad (4.9.50)$$

Припустимо, що (4.9.50) має єдиний нетривіальний розв'язок μ_0, тоді і однорідне рівняння для D_e

$$f(x) = \frac{\sigma(x)}{2} + \iint\limits_S K(x,y)\sigma(y)\,\mathrm{d}S_y. \quad (4.9.51)$$

теж має єдиний нетривіальний розв'язок σ_0. Складемо потенціал простого шару з щільністю μ_0:

$$V_0^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{-ik|x-y|}\mu_0(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \quad (4.9.52)$$

З теореми про розрив нормальної похідної потенціалу простого шару маємо, що цей потенціал є розв'язком граничної задачі:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)V_0^k(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial V_0^k(x)}{\partial \vec{n}_\mathrm{i}}\right|_{x\in S} = 0, \end{cases} \quad (4.9.53)$$

але оскільки k^2 не є власне число внутрішньої задачі Неймана, то остання гранична задача має лише тривіальний розв'язок, тобто $V_0^k(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Враховуючи неперервність потенціалу простого шару в усьому евклідовому просторі можна записати, що $V_0^k(x) \equiv 0$, $x \in S$. Звідси випливає, що V_0^k задовольняє граничній задачі

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)V_0^k(x) = 0, & x \in \Omega', \\ V_0^k(x)\big|_{x\in S} = 0, \end{cases} \quad (4.9.54)$$

а оскільки $V_0^k(x)$ задовольняє умові Зомерфельда, то єдиним розв'язком останньої задачі Діріхле є тотожній нуль. Отже маємо, що $V_0^k(x) \equiv 0$,

$x \in \mathbb{R}^3$, а це в свою чергу означає, що $\mu_0 \equiv 0$, $x \in S$ і рівняння (4.9.50) та (4.9.51) мають лише тривіальні розв'язки. Згідно до теореми Фредгольма відповідні неоднорідні рівняння (4.9.45) та (4.9.46) мають єдиний розв'язок для будь-якого вільного члена f. $\square$