Лекція 25

Потенціал подвійного шару та його пряме значення

[2, стор. 370 - 381]

Згідно до теореми 1 лекції 24, потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца (а також Лапласа)  для будь – якої області, яка не має перетину з поверхнею  є функцією яка має похідні будь – якого порядку.

В точках поверхні  потенціали подвійного шару є невласним інтегралом і його поведінка залежить від властивості щільності та властивості поверхні інтегрування.

**Теорема 6** (*Про пряме значення потенціалу подвійного шару)* Якщо  замкнена поверхня Ляпунова, , тоді потенціал подвійного шару (8.3), (8.3’) має в будь – якій точці поверхні цілком визначене скінчене значення і це значення неперервно змінюється, коли точка  пробігає поверхню .

**Доведення** Оскільки , то  - обмежена на поверхні , таким чином .

Згідно до теореми 5 інтеграл  існує, а таким чином існує інтеграл  коли .

Покажемо тепер, що . Розглянемо , як ядро інтегрального оператора.

Оскільки , де , то згідно (8.19) . Таким чином . є полярним ядром. А це в свою чергу забезпечує відображення неперервної на  щільності  в неперервний на  потенціал подвійного шару . Теорема доведена.

**Означення 4** Значення потенціалу подвійного шару в точках поверхні будемо називати прямим значенням потенціалу подвійного шару і позначатимемо його .

Інтеграл Гауса

Інтегралом Гауса будемо називати потенціал подвійного шару оператора Лапласа з щільністю , тобто  (8.22).

**Лема** Якщо , замкнена поверхня Ляпунова що обмежує область  то інтеграл Гауса визначається наступною формулою:

 (8.23).

**Доведення**. Розглянемо випадок коли . В цьому випадку функція  - гармонічна в області  по аргументу  оскільки  то . Згідно до властивості гармонічної функції маємо 

Для випадку, коли  розглянемо область . Функція  буде гармонічною в області  і для неї має місце співвідношення . Обчислимо значення 

Випадок  можна дослідити, якщо розглянути область  у якій функція  - гармонічна і записати інтеграл по замкненій поверхні  яка обмежує область  та спрямувати  до нуля.

Аналізуючи інтеграл Гауса легко бачити, що навіть у найпростішому випадку постійної щільності потенціал подвійного шару при переході через поверхню  має розрив. Наступна теорема вивчає поведінку потенціалу подвійного шару при підході до поверхні  з середини та ззовні області.

**Теорема** **7** *(Про граничні значення потенціалу подвійного шару)* Нехай  - замкнута поверхня Ляпунова, а  неперервна на  щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца та Лапласа  і його граничні значення при підході до поверхні  з середини  і з зовні  задовольняють співвідношенням:

  (8.24).

**Доведення** Розглянемо потенціал подвійного шару 

Позначимо .

Розглянемо довільну точку  та запишемо потенціал подвійного шару у вигляді: ,

де  (8.25),

а - інтеграл Гауса. Покажемо, що  неперервна функція в точці . Візьмемо точку  за центр сфери , яка розіб’є поверхню  на дві частини  і , де , а . Враховуючи представлення поверхні , запишемо 



Покажемо, що  можна зробити як завгодно малим за рахунок зближення точок  та . Запишемо очевидну нерівність:

. Оцінимо праву частину нерівності. Оберемо радіус сфери  таким чином щоби , де  – довільне мале число, а  – константа з формулювання теореми 5, нерівність (8.22). Це можливо завдяки неперервності . Таким чином .

Аналогічна нерівність виконується і для , як для частинного випадку положення точки .

Зафіксуємо радіус сфери  і будемо вважати, що точка  достатньо близька до точки , така , тоді на поверхні  . Таким чином підінтегральна функція в інтегралі  є неперервною і тому неперервним буде і сам інтеграл, тобто

. Це доводить неперервність  в точці .

З неперервності , можемо записати

 (8.26).

Врахуємо представлення

 (8.27).

Обчислимо граничні значення потенціалу в точці  з середини та ззовні:

 (8.28);

 (8.29).

Оскільки  (8.30).

Враховуючи (8.28) - (8.30) отримаємо:

 Таким чином теорема доведена.

Потенціал простого шару та його властивості

Нагадаємо, що потенціали простого шару для оператора Лапласа та Гельмгольца записуються у вигляді

 .

Вивчимо властивості цих потенціалів в усьому евклідовому просторі.

**Теорема 8** *(про неперервність потенціалу простого шару)*Якщо  - замкнута поверхня Ляпунова, а  вимірювана і обмежена на , то потенціал простого шару оператора Лапласа та Гельмгольца є функцією неперервною в усьому евклідовому просторі.

**Доведення**. Оскільки властивості потенціалів в будь – якій точці простору, яка не належить поверхні  досліджувались в теоремі 1, то встановити неперервність потенціалу простого шару необхідно лише в точках поверхні  .

Побудуємо сферу Ляпунова  і нехай  - частина поверхні , яка знаходиться всередині сфери Ляпунова. Тоді потенціал простого шару

 (8.31).

У другому інтегралі (8.31) підінтегральна функція є неперервна і обмежена, а значить цей інтеграл існує.

Для оцінки першого інтегралу введемо локальну систему координат  с центром в точці . Нехай  - проекція  на площину , дотичну до поверхні  в точці .



При оцінці інтегралу були використані оцінки (8.13) та оцінка

. Таким чином потенціал простого шару дійсно існує в кожній точці простору 

Покажемо тепер неперервність потенціалу в точці 

Оберемо сферу Ляпунова . Тоді потенціал простого шару можна представити аналогічно (8.31) у вигляді:

 (8.31’).

Очевидно, що перший інтеграл  є неперервною функцією і для , що  як тільки .

Покажемо, що 

Очевидно, що



Розглянемо другий інтеграл і виберемо точки  так, що .

Введемо локальну систему координат з центром в точці . Тоді нехай точка , а  Тоді 



Таким чином можна записати оцінку інтеграла

 за рахунок вибору достатньо маленького значення .

Інтеграл , як частинний випадок попереднього інтегралу при . Таким чином встановлено, що , якщо . Теорема доведена.

Нормальна похідна потенціалу простого шару

Будемо розглядати потенціал простого шару  для оператору Гельмгольца Візьмемо довільну точку , і проведемо через цю точку яку-не будь нормаль  до поверхні . Для такого випадку в точці , можна обчислити похідну по напрямку нормалі  від потенціалу простого шару, яку обчислюють шляхом диференціювання підінтегральної функції  Обчислимо вираз 

**Теорема 9** *(про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару)*Якщо  обмежена і вимірювана функція на поверхні Ляпунова , то нормальна похідна потенціалу простого шару

  (8.32) має в кожній точці поверхні  цілком визначене скінчене значення, яке неперервно змінюється коли точка  пробігає поверхню , це значення називають прямим значенням нормальної похідної потенціалу простого шару .

**Доведення** При доведенні теореми будемо розглядати нормальну похідну потенціалу, як результат відображення щільності  за допомогою інтегрального оператора з ядром . (8.33).

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова, можна показати, що ядро (8.33) є полярним, оскільки для достатньо малих значень  , . Це означає, що  - є полярним ядром. Звідси маємо, що інтегральний оператор з полярним ядром відображає обмежену функцію у неперервну.

**Теорема 10** *(про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару)*Якщо **** замкнута поверхня Ляпунова, а  неперервна на **** щільність, то потенціал простого шару має на **** граничні значення правильної нормальної похідної при підході до точки  з середини та ззовні і ці граничні значення можуть бути обчислені:

 (8.34),

 (8.35).

**Означення 5** Граничні значення нормальної похідної в точці  потенціалу простого шару з середини та з зовні  будемо називати правильними, якщо вони є граничними значеннями  коли  вздовж нормалі  з середини та ззовні відповідно.

**Доведення.** Розглянемо вираз, який представляє собою суму потенціалу подвійного шару і нормальної похідної потенціалу простого шару з однаковою щільністю .  (8.36).

Можна показати, що ця функція змінюється неперервно, коли точка  перетинає поверхню , рухаючись по нормалі до цієї поверхні в точці .

Враховуючи неперервність (8.36) при переході через поверхню вздовж нормалі , можемо записати:.

Звідси маємо:.

 Що і треба було довести.