Лекція 22

Принцип максимуму гармонічних функцій

[6, стор. 97 - 111]

**Теорема 1** *(принцип максимуму гармонічних функцій)* Якщо гармонічна в скінченій області функція досягає у внутрішній точці цієї області свого максимального або мінімального значення , то ця функція є тотожна константа.

**Доведення** Нехай  гармонічна функція в обмеженій області  і досягає в точці  свого максимального значення. Розглянемо кулю  максимально великого радіусу.

Оскільки , то значення функції , коли  задовольняє нерівності .

Якщо хоча б у одній точці  нерівність строга, тобто , то за рахунок неперервності гармонічних функцій ця нерівність буде збережена і в деякому околі цієї точки, а це означатиме, що 

Тобто ми прийшли до протиріччя з припущенням, що , що . Це означає, що , .

Оскільки ця рівність має місце для кулі будь – якого радіусу , то це означає, що  коли .

Покажемо тепер, що функція , коли .

Для цього виберемо довільну точку , то з’єднаємо її з точкою  ламаною. Побудуємо послідовність куль  з такими властивостями: центри куль  належать ламаній. , .

Оскільки центр кожної наступної кулі з номером , лежить всередині кулі з номером , то використовуючи метод математичної індукції, ми можемо встановити властивість: якщо функція  коли то , коли . Це означає, що , коли . Зокрема, це означає, що . І теорема доведена.

Наслідки з принципу максимуму

***Наслідок 1*** Гармонічна функція відмінна від тотожної константи не досягає в скінченій області ні свого максимального ні свого мінімального значення.

***Наслідок 2*** Якщо функція гармонічна в області  і неперервна в , то свої максимальне і мінімальне значення вона приймає на границі області.

***Наслідок 3*** Якщо функція гармонічна в області  і неперервна в , то .

***Наслідок 4*** Нехай  - гармонічні функції в області  і має місце нерівність , то .

**Оператор Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат**

Якщо замість прямокутних координат  ввести ортогональні криволінійні координати  за допомогою співвідношень

 (5.8),

які дозволяють записати обернені перетворення

 (5.9).

Загальний вигляд оператора Лапласа в криволінійних координатах має вигляд:

 (5.10).

Де  (5.11).

***Для сферичної системи координат*** ** Формули (5.9) мають вигляд ,

Таким чином оператор Лапласа у сферичній системі координат матиме вигляд.

 (5.12).

Для циліндричної системи координат 

Формули (5.9), (5.11) мають вигляд 

.

Оператор Лапласа в циліндричній системі координат має вигляд:

 (5.13).

Якщо функція  не залежить від змінної , то отримуємо полярну систему координат і вираз оператора Лапласа в полярній системі координат:

 (5.14).

Перетворення Кельвіна гармонічних функцій.

Нехай функція  гармонічна за межами кулі , тоді функцію  (5.15).

(в (5.15) використовується перетворення аргументу обернених радіус векторів  або обернене ) будемо називати перетворенням Кельвіна гармонічної функції   - вимірному евклідовому просторі.

В подальшому будемо вважати, що , цього завжди можна досягти шляхом зміни масштабу. Покажемо, що для  перетворення Кельвіна  гармонічної функції  є гармонічною функцією аргументу .

Легко показати, що перший доданок в операторі Лапласа (5.12) може бути записаний у вигляді 

Таким чином при  (5.15) має вигляд . Оскільки , а , то , або .

Покажемо, що функція . Де , задовольняє рівнянню Лапласа, якщо  - гармонічна функція.

Дійсно маємо



При отриманні останньої рівності було враховано що .

Аналогічно тому, як було показана гармонічність  у тривимірному евклідовому просторі, можна показати гармонічність функції  у двовимірному евклідовому просторі.

Гармонічність в нескінченно віддаленій точці та поведінка гармонічних функцій на нескінченості.

**Означення** Будемо говорити**,** що функція  є гармонічною функцією в нескінченно віддаленій точці , якщо функція

 (5.16)

є гармонічною функцією в точці нуль. Легко бачити, що 

**Теорема 2** *(про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці в просторі)* Якщо при  функція  гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при  функція прямує до нуля не повільніше , а частинні похідні ведуть себе як .

**Теорема 3** *(про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці на площині)* Якщо при функція  гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при  функція обмежена, а частинні похідні ведуть себе як .

Гармонічні функції які мають поведінку на нескінченості визначену теоремами 1 та 2 для тривимірного і двовимірного просторів називають регулярними на нескінченості гармонічними функціями , а відповідні оцінки умовами регулярності на нескінченості.

Єдиність гармонічних функцій

Нехай  - гармонічна функція в обмеженій області  з границею , тоді має місце рівності Діріхле

 (5.17).

Нехай  - гармонічна функція області  з границями  та , де  як завгодно велике число, тоді має місце рівності Діріхле

 (5.18).

Для доведення рівності Дірихле (5.17) достатньо записати очевидну ціпочку рівностей.

.

Аналогічно можна довести і рівність (5.18)

При формулюванні теорем єдиності гармонічних функцій ми скрізь будемо припускати існування відповідної гармонічної функції, хоча сам факт існування гармонічної функції ми доведемо пізніше.

**Теорема 4** *(Перша теорема єдиності гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій області , (або в області ) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні  задані значення, то така функція єдина.

***Доведення*** Припустимо, що в області  існує принаймні дві гармонічні функції, які приймають на поверхні  однакові значення 

Для функції  будемо мати задачу 

Застосуємо рівність Діріхле для функції . Будемо мати

. Звідси маємо, що . Остання рівність означає, що , а оскільки , то . Тобто ми маємо, що .

Покажемо справедливість теореми для області .

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні  однакові значення  отримаємо для функції  задачу 

Застосуємо для  рівність (5.18) .

Спрямуємо радіус кулі  до нуля і врахуємо умову регулярності на нескінченості .

Таким чином , а оскільки , то 

**Теорема 5** *(Друга теорема єдиності гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій області , (або в області ) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні  задані значення своєї нормальної похідної , то в області  вона визначається с точністю до адитивної константи, а в області  вона єдина.

***Доведення*** Припустимо, що в області  існує принаймі дві гармонічні функції, які приймають на поверхні  однакові значення нормальної похідної

. Для функції  будемо мати  Для функції  використаємо рівність Дірихле

, тобто , . Константа залишається невизначеною і таким сином .

Покажемо справедливість теореми для області .

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні  однакові значення  отримаємо для функції  задачу 

Застосуємо для  рівність (5.18) .

Спрямуємо радіус кулі  до нуля і врахуємо умову регулярності на нескінченості. В результаті будемо мати 

Таким чином , а оскільки , то , а  Друга теорема єдиності доведена .

**Теорема 6** *(Третя теорема єдиності гармонічних функцій)*Якщо в обмеженій області , (або в області ) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні  задані значення лінійної комбінації нормальної похідної та функції , то в області  та в області  вона визначається єдиним чином.

Теорему 6 довести самостійно.

§ 6 Рівняння Гельмгольца, деякі властивості його розв’язків

[6, стор. 349 - 353], [1, стор. 438 - 441]

 (6.1).

В задачі (6.1) відсутні початкові умови у зв’язку з тим, що розглядаються спеціальні значення функції  та . А саме ми вважаємо, що ці функції є періодичними по аргументу  з однаковим періодом.

Покладемо, що ,

 (6.2).

Можна очікувати, що в результаті доволі тривалої дії таких збурень розв’язок задачі при будь-яких початкових умовах теж буде періодичним, тобто . (6.3)

Підставляючи (6.3) в задачу (6.1), отримаємо





Оскільки функції  - лінійно незалежні, то для амплітуди  отримаємо рівняння Гельмгольца

 (6.4).

Аналогічний результат можна отримати, якщо ввести комплексну амплітуду , комплексну зовнішню силу та комплексну амплітуду граничної умови .

Шукаючи розв’язок (6.1) у вигляді  (6.5).

Отримаємо для комплексної амплітуди задача

 (6.4’)

Другим джерелом виникнення рівняння Гельмгольца є стаціонарне рівняння дифузії при наявності в середовище процесів, що ведуть до розмноження речовини. Такі процеси наприклад виникають при дифузії нейтронів. Рівняння має вигляд:

 (6.6).

Де  - коефіцієнт дифузії,  - швидкість розмноження нейтронів.

Суттєвою відмінністю граничних задач для рівняння Гельмгольца від граничних задач рівняння Лапласа полягає в можливому порушенні єдиності розв’язку як для внутрішніх так і для зовнішніх задач.

Розглянемо таку граничну задачу:

 (6.7).

При  задача (6.7) має лише тривіальний розв’язок, що випливає з першої теореми єдності гармонічних функцій.

Нехай, - ціле число. Неважко перевірити, що в цьому разі задача (6.7) має нетривіальний розв’язок , а це в свою чергу означає, що задача з неоднорідними граничними умовами та неоднорідне рівняння Гельмгольца

 (6.8)
має неєдиний розв’язок, який визначається з точністю до розв’язку однорідного рівняння, тобто з точністю до функції .

Розглянемо приклад зовнішньої задачі для однорідного рівняння Гельмгольца

 (6.9).

При . Гранична задача має лише тривіальний розв’язок тотожно рівний нулю, що випливає з другої теореми єдиності гармонічних функцій. У випадку, коли  - ціле ми маємо, що розв’язком граничної задачі (6.9) окрім тотожного нуля буде функція . Легко перевірити, що ця функція задовольняє як однорідному рівнянню Гельмгольца (це уявна частина фундаментального розв’язку) так і граничній умові на сфері і умові на нескінченості.

Наявність нетривіального розв’язку у однорідної задачі означає неєдиність розв’язку відповідної неоднорідної задачі.