Зміст

4.4.4 Функція Гріна задачі Діріхле для кулі

Будемо розглядати граничну задачу

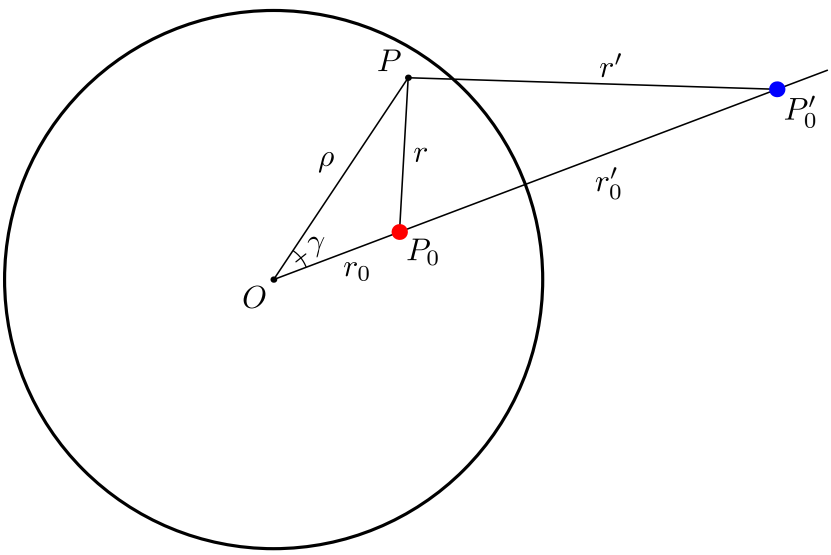
$$\begin{cases} \Delta U(P) = 0, \quad |P| < R, \\ U(P)|_{|P|=R} = f(P). \end{cases} \tag{4.4.18}$$

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі.

Введемо позначення:

$$|OP_0| = r_0, \quad |OP_0'| = r_0', \quad r = |P - P_0|, \quad r' = |P - P_0'|. \tag{4.4.19}$$

На довільному промені, який проходить через центр кулі точку O розмістимо всередині кулі у точці P_0 одиничний точковий додатний заряд. Розглянемо точку P_0' *симетричну* точці P_0 відносно сфери.



Зауваження 4.4.4.1 — Це означає, що обидві точки лежать на одному промені, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню

$$r_0 \cdot r_0' = R^2. \tag{4.4.20}$$

В точці P_0' розмістимо від'ємний заряд величини e, яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів:

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{e}{4\pi r}. \tag{4.4.21}$$

Обчислимо величину e використовуючи теорему косинусів:

$$\begin{aligned}
\Pi(P) &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos\gamma}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\rho \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos\gamma}}\right)\Bigg|_{\rho=R} = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2R r_0 \cos\gamma}} - \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2R \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos\gamma}}\right) = \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1 - e \cdot \frac{r_0}{R}}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2R r_0 \cos\gamma}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Остання рівність буде вірною, якщо $e = R/r_0$.

Таким чином функцію Гріна задачі Діріхле для кулі можна записати у наступному вигляді при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

$$G_1(P, P_0) = \frac{1}{4\pi}\left(1\Big/\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos\gamma} - 1\Big/\sqrt{R^2 + \frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} - 2\rho r_0 \cos\gamma}\right). \tag{4.4.23}$$

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial n_P}\bigg|_{P \in S} = \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R} = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\rho - r_0 \cos\gamma}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos\gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{\rho r_0^2}{R^2} - r_0 \cos\gamma}{\left(\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} + r_0^2 - 2R r_0 \cos\gamma\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{\rho=R} =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\gamma)^{3/2}}. \qquad (4.4.24)$$

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути:

$$\cos\gamma = \frac{\measuredangle(OP, OP_0)}{\rho r_0} = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0). \qquad (4.4.25)$$

Тут ρ, φ, θ — сферичні координати точки P, а r_0, φ_0, θ_0 — сферичні координати точки P_0.

Формула 4.4.4.1 (формула Пуассона для кулі)

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв'язок задачі Діріхле:

$$U(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{R}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{(R^2 - r_0^2)\sin\theta f(\varphi, \theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma)^{3/2}}. \qquad (4.4.26)$$

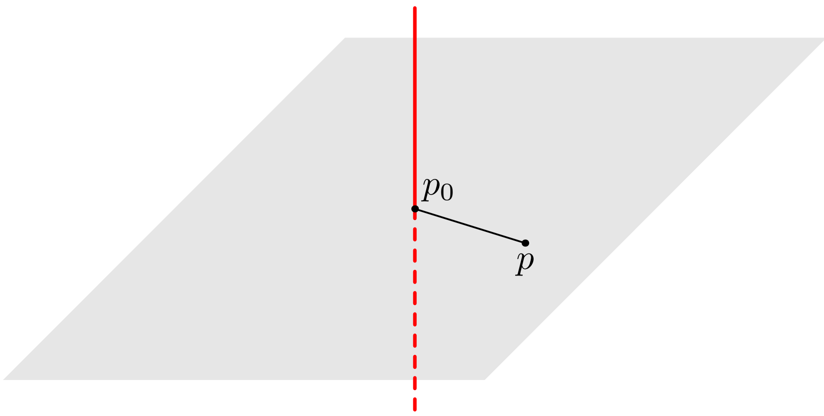
Ця формула дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа і називається *формулою Пуассона для кулі.*

4.4.5 Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв'язку для $\mathbb{R}^2$, що приводить до наступного вигляду функції Гріна:

$$G_i(p, p_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{|p - p_0|}\right) + g_i(p, p_0), \quad p, p_0 \in D \subset \mathbb{R}^2. \qquad (4.4.27)$$

Фізичний зміст фундаментального розв'язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці p рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченої нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку p_0. Точки p, p_0 належать площині:



Аналогічно кулі, можна отримати функцію Гріна задачі Діріхле для кола, яка має вигляд:

$$G_1(p, p_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos\gamma}}\right) - \right.$$
$$\left. - \ln\left(\frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r_0^2} + \rho^2 - 2\rho \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos\gamma}}\right)\right). \tag{4.4.28}$$

Або через комплексні змінні $z = \rho e^{i\varphi}$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $z_0^\star = \frac{R^2}{z_0}$:

$$G_1(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0 \cdot |z - z_0^\star|}{R \cdot |z - z_0|}\right). \tag{4.4.29}$$

Таким чином розв'язок задачі Діріхле для кола може бути записаним у вигляді:

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{4.4.30}$$

Або через точки комплексної площини,

$$\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)} = \mathrm{Re}\left(\frac{z + z_0}{z - z_0}\right), \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{iz}. \tag{4.4.31}$$

Тоді попередня формула набуває вигляду

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z) \cdot \frac{z + z_0}{z - z_0} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{4.4.32}$$

Нехай необхідно побудувати функцію Гріна першої граничної задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \\ u(x, y)\big|_C = f(x, y) \end{cases} \tag{4.4.33}$$

для довільної однозв'язної області D з жордановою границею C.

Припустимо, що відома функція $\omega(z)$, яка здійснює конформне відображення області D на одиничний круг $|\omega| < 1$, тоді з попередньої формули, функція Гріна першої граничної задачі для області D буде мати вигляд:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \overline{\omega(z_0)}\omega(z)}{\omega(z) - \omega(z_0)} \right|. \tag{4.4.34}$$

А розв'язок задачі Діріхле можна записати у вигляді:

$$u(\zeta_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(\zeta) \cdot \frac{\omega(\zeta) + \omega(\zeta_0)}{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \cdot \mathrm{d}\zeta. \tag{4.4.35}$$

4.4.6 Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої

Ми покажемо, як за допомогою функції Гріна можна знайти розвєязок першої та другої граничних задач рівняння теплопровідності для півпрямої $x > 0$.

Нехай ми розглядаємо граничні задачі:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -f(x,t), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ u(0,t) = \varphi(t), \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.4.36}$$

і

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -f(x,t), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi(t), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.4.37}$$

Для побудови функції Гріна використаємо фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності в одновимірному евклідовому просторі. Як відомо від має вигляд:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2a^2 t}\right\}. \tag{4.4.38}$$

Оскільки при побудові функції Гріна використовується фізична інтерпретація фундаментального розв'язку, то з'ясуємо її знайшовши розв'язок наступної задачі:

Задача 4.4.1. В нескінченому стрижні з теплоізольованою боковою поверхнею і нульовою початковою температурою в початковий момент часу $t = 0$ в точці $x = 0$ миттєво виділилося Q одиниць тепла. Необхідно визначити температуру стрижня в довільний момент часу в довільній його точці.

Розв'язок. Запишемо математичну постановку задачі.

Розповсюдження тепла у однорідному стрижні задається рівнянням теплопровідності з постійними коефіцієнтами:

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{f(x,t)}{c\rho S}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{4.4.39}$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f(x,t)$ — потужність теплових джерел. За умовою задачі теплове джерело є таким, що виділяє миттєво Q одиниць тепла в точці $x = 0$ в початковий момент часу, тому функція $f(x,t) = Q\delta(t)\delta(x)$. Тобто сумарна кількість тепла дорівнює

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q\delta(t)\delta(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = Q. \tag{4.4.40}$$

Оскільки до моменту дії теплових джерел початкова температура дорівнювала нулю, то початкова умова повинна мати вигляд: $u(x,0) = 0$.

Таким чином ми маємо задачу Коші для рівняння теплопровідності з однорідною початковою умовою.

Розв'язок такої задачі (температуру стрижня в точці x в момент часу t) можна записати за формулою:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x-\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.4.41}$$

Використовуючи її для цієї задачі будемо мати:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q}{c\rho S}\delta(\tau)\delta(\xi)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \frac{Q}{c\rho S}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{2a^2 t}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.4.42}
$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності представляє собою функцію, що моделює температуру стрижня в точці x в момент часу t за рахунок дії миттєвого точкового джерела інтенсивності $Q = c\rho S$ яке діє в початковий момент часу в точці $x = 0$.

Для побудови функції Гріна граничних задач (4.4.36), (4.4.37) на півпрямій використаємо метод відображення теплових джерел.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $c\rho S$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $-c\rho S$, то з фізичних міркувань можна очікувати, що в точці $x = 0$, яка лежить посередині між точками $x = \xi$ та $x = -\xi$, вплив теплових джерел дає нульову температуру. Дійсно, виходячи з фізичного змісту фундаментального розв'язку, отримаємо, що температура від дії двох точкових джерел дорівнює

$$
\begin{aligned}
E_1(x,\xi,t-\tau) &= \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\} - \\
&\quad - \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.4.43}
$$

Легко перевірити, що $E_1(0,\xi,t-\tau) = 0$, $E_1(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau<0} = 0$, а другий доданок задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності при $x > 0$, $t - \tau > 0$. Таким чином $E_1(x,\xi,t-\tau)$ є функція Гріна першої граничної задачі рівняння теплопровідності для півпрямої.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $c\rho S$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $c\rho S$, то з фізичних міркувань можна очікувати, що в точці $x = 0$, яка лежить посередині між точками $x = \xi$ та $x = -\xi$, тепловий потік буде дорівнювати нулю.

Запишемо температуру в цьому випадку

$$E_2(x,\xi,t-\tau) = \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}\right\}. \tag{4.4.44}$$

Легко перевірити, що

$$\left.\frac{\partial E_2(x,\xi,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\theta(t-\tau)}{2a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}}\left(\xi\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2a^2t}\right\} - \xi\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2a^2t}\right\}\right) = 0. \tag{4.4.45}$$

Таким чином $E_2(x,\xi,t-\tau)$ є функцією Гріна другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої.

Для запису розв'язку граничних задач (4.4.36), (4.4.37) будемо використовувати формули (3.22) та (3.23), які треба записати для випадку пів прямої.

Для першої граничної задачі будемо мати:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t\int_0^\infty E_1(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\ &+\int_0^\infty E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ &+a^2\int_0^\infty \left.\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.4.46}$$

Для другої граничної задачі отримаємо

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t\int_0^\infty E_2(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\ &+\int_0^\infty E_2(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \\ &-a^2\int_0^\infty E_2(x,0,t-\tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.4.47}$$

Продемонстрований метод це лише один з прийомів, який використовується для побудови функції Гріна.

Метод відображення дозволяє будувати функції Гріна для одновимірного хвильового рівняння.

4.5 Гармонічні функції та їх властивості

Визначення 4.5.0.1 (гармонічної у відкритій області функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій відкритій області* Ω, якщо $u \in C^{(2)}(\Omega)$ і $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$, тобто функція є двічі неперервно диференційованим розв'язком рівняння Лапласа.

Визначення 4.5.0.2 (гармонічної в точці функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій точці*, якщо ця функція гармонічна в деякому околі цієї точки.

Визначення 4.5.0.3 (гармонічної в замкненій області функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій замкненій області*, якщо вона гармонічна в деякій більш широкій відкритій області.

З гармонічними функціями у тривимірних і двовимірних областях ми вже зустрічалися:

Приклад 4.5.0.1 (гармонічної функції у $\mathbb{R}^2$)

$$\Delta \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-\xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{4.5.1}$$

Приклад 4.5.0.2 (гармонічної функції у $\mathbb{R}^3$)

$$\Delta \frac{1}{4\pi|x-\xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{4.5.2}$$

4.5.1 Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$

Для отримання інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$ будемо використовувати другу формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$\iiint\limits_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x))\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{S} \left(v(x) \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S. \tag{4.5.3}$$

В якості функції $u(\xi)$ оберемо довільну функцію $C^2(\Omega)$, а у якості v, фундаментальний розв'язок оператора Лапласа для тривимірного евклідового простору $\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$.
В результаті підстановки цих величин в останню формулу отримаємо

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi) + u(\xi)\delta(x-\xi) \right) \mathrm{d}\xi = \\ &= \iint\limits_{S} \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Після обчислення другого доданку в лівій частині можемо записати формулу інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} u(x) = &-\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ &+ \iint\limits_{S} \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial n}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

У випадку коли функція $u(x)$ є гармонічною в області Ω то остання формула прийме вигляд:

$$u(x) = \iint\limits_{S} \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.6}$$

З формул вище можна отримати деякі властивості гармонічних функцій:

Властивість 4.5.1.1

Гармонічна в області Ω функція $u(x)$ має в кожній внутрішній точці області Ω неперервні похідні будь-якого порядку.

Доведення. Дійсно, оскільки $x \in \Omega$, $\xi \in S$, $x \neq \xi$, то для обчислення будь-якої похідної необхідно диференціювати підінтегральну функцію, яка має похідні будь-якого порядку:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} = \iint\limits_S \Bigg(&\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - \\ &- u(\xi) \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \cdot \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \Bigg) \mathrm{d}S_\xi. \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

□

Властивість 4.5.1.2

Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в скінченій області Ω з границею S, то має місце співвідношення

$$\oint\!\!\!\oint\limits_S \frac{\partial u(x)}{\partial n} \mathrm{d}S = 0. \tag{4.5.8}$$

Доведення. Дійсно, у другій формулі Гріна для оператора Лапласа оберемо $v(x) \equiv 1$, тоді інтеграл в лівій частині і другий інтеграл правої частини перетворюється в нуль. В результаті чого отримаємо жадану рівність. □

Теорема 4.5.1.1 (про середнє значення гармонічної функції)

Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в кулі і неперервна в замиканні цієї кулі, то значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері, що обмежує кулю.

Доведення. Використаємо формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$u(x) = \iint\limits_S \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.9}$$

в якій в якості поверхні S візьмемо сферу радіусу R з центром у точці x_0, і обчислимо значення функції u в точці x_0:

$$u(x_0) = \iint\limits_{S(x_0,R)} \left(\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.10}$$

Оскільки $\xi \in S(x_0, R)$, то $\dfrac{1}{4\pi|x_0 - \xi|} = \dfrac{1}{4\pi R}$, а

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x_0 - \xi|}\bigg|_{S(x_0,R)} = \frac{1}{4\pi R^2}. \tag{4.5.11}$$

Таким чином

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{S(x_0,R)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \, \mathrm{d}S_\xi + \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S(x_0,R)} u(\xi) \, \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.12}$$

Оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, то остаточно маємо

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S(x_0,R)} u(\xi) \, \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.13}$$

□