Лекція №21

Функція Гріна задачі Дірихле для кулі

[6, стор. 84 - 96]

Будемо розглядати граничну задачу

 (4.9).

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі. Введемо позначення , 



На довільному проміні, який проходить через центр кулі точку О розмістимо всередині кулі у точці  одиничний точковий додатній заряд. Розглянемо точку  симетричну точці  відносно сфери.

Це означає, що обидві точки лежать на одному проміні, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню . В  точці розмістимо від’ємний заряд величини , яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів  (4.10).

Обчислимо величину  використовуючи теорему косинусів 



Остання рівність буде вірною, якщо .

Таким чином функцію Гріна задачі Дірихле для кулі можна записати у вигляді (4.10) при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

 (4.11).

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо 

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути  (4.12)

Тут  - сферичні координати точки , а  - сферичні координати точки .

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв’язок задачі Дірихле:

 (4.13).

Формула (4.13) дає розв’язок задачі Дірихле для рівняння Лапласа і називається формулою Пуассона для кулі.

Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв’язку для , що приводить до наступного вигляду функції Гріна

 (4.14).

Фізичний зміст фундаментального розв’язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці  рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченої нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку . Точки  належать площині.

Аналогічно кулі , можна отримати функцію Гріна задачі Дірихле для кола, яка має вигляд:

 (4.15).

Або через комплексні змінні , , 

 (4.15’).

Таким чином розв’язок задачі Дірихле для кола може бути записана у вигляді :

 (4.16).

Або через точки комплексної площини, ,  Тоді, формула (4.16) має вигляд:

 (4.15’).

Нехай необхідно побудувати функцію Гріна першої граничної задачі

 (4.17).

для довільної однозв’язної області  з жордановою границею . Припустимо, що відома функція , яка здійснює конформне відображення області  на одиничний круг , тоді з (4.15’) функція Гріна першої граничної задачі для області  буде мати вигляд :  (4.18).

А розв’язок задачі Дірихле (4.17) можна записати у вигляді:

 (4.19).

Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої

[6, 207 - 214]

Ми покажемо, як за допомогою функції Гріна можна знайти розв’язок першої та другої граничних задач рівняння теплопровідності для півпрямої .

Нехай ми розглядаємо граничні задачі :

 (4.20).

 (4.21).

Для побудови функції Гріна використаємо фундаментальний розв’язок оператора теплопровідності в одновимірному евклідовому просторі. Як відомо від має вигляд: 

Оскільки при побудові функції Гріна використовується фізична інтерпретація фундаментального розв’язку, то з’ясуємо її знайшовши розв’язок наступної задачі:

В нескінченому стрижні з теплоізольованою боковою поверхнею і нульовою початковою температурою в початковий момент часу  в точці  миттєво виділилося  одиниць тепла. Необхідно визначити температуру стрижня в довільний момент часу в довільній його точці.

Розв’язання.

Запишемо математичну постановку задачі.

Розповсюдження тепла у однорідному стрижні задається рівнянням теплопровідності з постійними коефіцієнтами:

, де ,  - потужність теплових джерел. За умовою задачі теплове джерело є таким, що виділяє миттєво ** одиниць тепла *в точці  в* початковий момент часу*, тому* функція *.* Тобто сумарна кількість тепла дорівнює 

Оскільки до моменту дії теплових джерел початкова температура дорівнювала нулю, то початкова умова повинна мати вигляд: .

Таким чином ми маємо задачу Коші для рівняння теплопровідності з однорідною початковою умовою.

Розв’язок такої задачі (температуру стрижня в точці  в момент часу ) можна записати за формулою:

 (4.22).

Використовуючи її для цієї задачі будемо мати:



Таким чином, фундаментальний розв’язок оператора теплопровідності представляє собою функцію, що моделює температуру стрижня в точці  в момент часу  за рахунок дії миттєвого точкового джерела інтенсивності  яке діє в початковий момент часу в точці .

Для побудови функції Гріна граничних задач (4.20), (4.21) на півпрямій використаємо метод відображення теплових джерел.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці  миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу  інтенсивності , а симетричній точці  миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу  і має інтенсивність , то з фізичних міркувань можна очікувати , що в точці , яка лежить посередині між точками  та , вплив теплових джерел дає нульову температуру. Дійсно, виходячи з фізичного змісту фундаментального розв’язку, отримаємо, що температура від дії двох точкових джерел дорівнює

 (4.23).

Легко перевірити, що , , а другий додаток  задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності при . Таким чином  є функція Гріна першої граничної задачі рівняння теплопровідності для півпрямої.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці  миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу  інтенсивності , а симетричній точці  миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу  і має інтенсивність , то з фізичних міркувань можна очікувати , що в точці , яка лежить посередині між точками  та , тепловий потік буде дорівнювати нулю.

Запишемо температуру в цьому випадку

 (4.24).

Легко перевірити, що ,

Таким чином  є функцією Гріна другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої.

Для запису розв’язку граничних задач (4.20), (4.21) будемо використовувати формули (3.22) та (3.23) , які треба записати для випадку пів прямої

Для першої граничної задачі будемо мати:

 (4.25).

Для другої граничної задачі отримаємо

 (4.26).

Продемонстрований метод це лише один з прийомів, який використовується для побудови функції Гріна.

Метод відображення дозволяє будувати функції Гріна для одновимірного хвильового рівняння.

§ 5 Гармонічні функції та їх властивості

[6, стор. 97 - 111]

**Означення 1** Функцію  називають гармонічною в деякій відкритій області , якщо  і ., тобто функція є двічі неперервно диференційованим розв’язком рівняння Лапласа.

**Означення 2** Функцію  називають гармонічною в деякій точці, якщо ця функція гармонічна в деякому околі цієї точки.

**Означення 3** Функцію  називають гармонічною в деякій замкненій області, якщо вона гармонічна в деякій більш широкій відкритій області.

З гармонічними функціями у тривимірних і двовимірних областях ми вже зустрічалися, а саме нам відомо, що

 (5.1).

 (5.2).

Інтегральне представлення функцій класу 

Для отримання інтегрального представлення функцій класу **** будемо використовуватидругу формулу Гріна для оператора Лапласа.

 (5.3).

В якості функції  оберемо довільну функцію **,** а у якості , фундаментальний розв’язок оператора Лапласа для тривимірного евклідового простору 

В результаті підстановки цих величин в (5.3) отримаємо

Після обчислення другого доданку в лівій частині можемо записати формулу інтегрального представлення функцій класу **.**

 (5.4).

У випадку коли функція  є гармонічною в області  то формула (5.4) прийме вигляд:

 (5.5).

З формули (5.5) та (5.3) можна отримати деякі властивості гармонічних функцій:

**Властивість 1** Гармонічна в області  функція  має в кожній внутрішній точці області  неперервні похідні будь – якого порядку. Дійсно, оскільки , то для обчислення будь – якої похідної необхідно диференціювати підінтегральну функцію, яка має похідні будь - якого порядку:



**Властивість 2** Якщо  гармонічна функція в скінченій області  с границею  то має місце співвідношення  (5.6).

Дійсно, у формулі (5.3) оберемо , тоді інтеграл в лівій частині і другий інтеграл правої частини перетворюється в нуль. В результаті чого отримаємо рівність (5.6).

**Теорема 1** *(про середнє значення гармонічної функції)* Якщо  гармонічна функція в кулі і неперервна в замиканні цієї кулі, то значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері, що обмежує кулю.

**Доведення** Використаємо формулу (5.5) в якій в якості поверхні  візьмемо сферу радіусу  з центром у точці , і обчислимо значення функції  в точці 



Оскільки , то , а .

Таким чином 

Оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, то остаточно маємо

 (5.7).