Зміст

4.2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

Нехай L — диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{4.2.1}$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$Lu = f(x). \tag{4.2.2}$$

Визначення 4.2.0.1 (узагальненого розв'язку)**.** Узагальненим розв'язком цього рівняння будемо називати будь-яку узагальнену функцію u, яка задовольняє це рівняння в розумінні виконання рівності:

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.3}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Остання рівність рівнозначна рівності

$$\langle u, L^\star \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.4}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Тут було введено

Визначення 4.2.0.2 (спряженого оператора)**.** *Спряженим* до оператора L нзаивається оператор що визначається рівністю

$$L^{\star}\varphi = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha}\varphi). \tag{4.2.5}$$

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2) q_k(x) = -\delta(x), \tag{4.2.6}$$

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon(x,t) = -\delta(x,t), \tag{4.2.7}$$

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(x,t) = -\delta(x,t) \tag{4.2.8}$$

Визначення 4.2.0.3 (фундаментального розв'язку)**.** Узагальнені функції $q_k(x)$, $\varepsilon(x,t)$, $\psi(x,t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельмгольца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють відповідні рівняння як узагальнені функції:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} q_k(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0), \tag{4.2.9}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \varepsilon(x,t) \left(a^2\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0), \tag{4.2.10}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x,t) \left(a^2\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0). \tag{4.2.11}$$

Зауваження 4.2.0.1 — Тут $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, простір усіх можливих значень (x,t). Зрозуміло, що можна було також записати

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{4.2.12}$$

але було вибрано перше позначення для заощадження часу, місця, а також задля одноманітності.

Зауваження 4.2.0.2 — Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв'язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв'язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв'язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв'язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур'є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів.

4.2.1 Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо двовимірний оператор Лапласа

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{4.2.13}$$

Теорема 4.2.1.1 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Лапласа)

Для двохвимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \tag{4.2.14}$$

де $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\delta(x) \tag{4.2.15}$$

Зауваження 4.2.1.1 — Тут останню рівність необхідно розуміти як

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2). \tag{4.2.16}$$

Доведення. Перш за все,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \varphi(x)\, \mathrm{d}x + \iint\limits_{S_R} \ldots \mathrm{d}S +$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) \mathrm{d}S. \tag{4.2.17}$$

Зауваження 4.2.1.2 — Тут U_R, U_ε — околи нуля такі, що $\operatorname{supp} \varphi \subset U_R$, а U_ε — нескінченно малий окіл.

Також тут позначено $S_R = \partial U_R$, $S_\varepsilon = \partial U_\varepsilon$.

У свою чергу n — вектор нормалі до S_ε.

Твердження 4.2.1.1

Для $x \neq 0$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = 0. \tag{4.2.18}$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\frac{x_i}{|x|^2}, \tag{4.2.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}, \tag{4.2.20}$$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4} \right) = 0. \tag{4.2.21}$$

□

Таким чином, першій інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ.

Зауваження 4.2.1.3 — Справді, цей інтеграл позначає потік поля $\vec{\varphi}$ через S_R, але $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R$, тобто поза $U_{R-\varepsilon}$ для якогось (нового) малого ε поле $\vec{\varphi}$ не діє, а тому його потік дорівнє нулеві.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)\right)\mathrm{d}S=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)}{\partial n}\,\mathrm{d}\theta-\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right). \tag{4.2.22}$$

Зауваження 4.2.1.4 — При обчисленні останнього інтегралу враховано, що

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|x|}\right|_{x\in S_\varepsilon}=-\left.\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{r}\right|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.2.23}$$

Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційовність функції φ, здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon\to 0$, отримаємо, що першій інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0,0)$. $\square$

4.2.2 Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца

Розглянемо тривимірний оператор Гельмгольца:

$$\Lambda_3=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2 \tag{4.2.24}$$

Теорема 4.2.2.1 (про фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца)
Для тривимірного оператора Гельмгольца функція

$$q_{\pm}^{k}(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{4.2.25}$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 q_{\pm}^{k}(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_{\pm}^{k}(x) = -\delta(x). \tag{4.2.26}$$

Зауваження 4.2.2.1 — Останнє рівняння треба розуміти як

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^{k}(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0) \tag{4.2.27}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останньої рівності:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^{k}(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \tag{4.2.28}$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Твердження 4.2.2.1
Для $x \neq 0$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) q_{\pm}^{k}(x) = 0. \tag{4.2.29}$$

Доведення. Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою

$$\frac{\partial^2 q_\pm^k(x)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial |x|^2}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right). \quad (4.2.30)$$

У ній по-перше

$$\frac{\partial^2}{\partial |x|^2}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right) = -\frac{e^{\pm ik|x|}(k^2|x|^2 \pm 2ik|x| - 2)}{4\pi|x|^3}, \quad (4.2.31)$$

і

$$\left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{x_j^2}{|x|^2}, \quad (4.2.32)$$

а також

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right) = \frac{e^{\pm ik|x|}(\pm ik|x| - 1)}{4\pi|x|^5}(|x|^2 - x_j^2). \quad (4.2.33)$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2\right) q_\pm^k(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|^3}\Big(-k^2|x|^2\Big) + k^2\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} = 0. \quad (4.2.34)$$

□

Інтеграл по сфері великого радіусу S_R дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції:

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} q_\pm^k(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2\sin\theta\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi, \cos\theta, \varepsilon\sin\theta)}{\partial n}\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \quad (4.2.35)$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial q_\pm^k(x)}{\partial n}\varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\cdot\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\varphi(0). \quad (4.2.36)$$

□

Зауваження 4.2.2.2 — З формули для $q_{\pm}^k(x)$ легко отримати фундаментальний розв'язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція

$$\frac{1}{4\pi|x|} \tag{4.2.37}$$

задовольняє наступному рівнянню:

$$\Delta_3 \frac{1}{4\pi|x|} = -\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{4.2.38}$$

Зауваження 4.2.2.3 — Формально формулу $1/4\pi|x|$ можна отримати з $q_{\pm}^k(x)$ при $k = 0$.

4.2.3 Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца

Теорема 4.2.3.1 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца)

Функція

$$q^k(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|), \tag{4.2.39}$$

де $x = (x_1, x_2)$ є фундаментальним розв'язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} q^k(x) \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \varphi(0). \tag{4.2.40}$$

Зауваження 4.2.3.1 — У формулі для $q^k(x)$ функція $K_\nu(x)$ — функція Бесселя другого роду уявного аргументу ν-порядку і є одним з двох лінійно-незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу:

$$x^2 Y'' + xY' - (x^2 + \nu^2) Y = 0. \tag{4.2.41}$$

Доведення. Аналогічне доведенню співвідношення для двовимірного оператора Лапласа.

Твердження 4.2.3.1
Для $x \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|)=0. \tag{4.2.42}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(-k^2K_0''(-ik|x|)\frac{x_j^2}{|x|^2}-ikK_0'(-ik|x|)\frac{|x|^2-x_j^2}{|x|^3}\right). \tag{4.2.43}$$

Таким чином

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(-k^2K_0''(-ik|x|)-ikK_0'(-ik|x|)\frac{1}{|x|}+k^2K_0(ik|x|)\right)=0. \tag{4.2.44}$$

□

Зауваження 4.2.3.2 — Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|x|^2$ та ввести нову незалежну змінну $\xi=-ik|x|$.

Зауваження 4.2.3.3 — При доведенні необхідної рівності важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної в околі точки $x=0$.

Відомо, що

$$K_0(ix)\sim\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}, \tag{4.2.45}$$
$$K_0'(ix)\sim-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}, \tag{4.2.46}$$

при $x\to+0$.

□

4.2.4 Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Теорема 4.2.4.1 (про фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності)

Фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \cdot \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.2.47}$$

Зауваження 4.2.4.1 — Це означає, що узагальнена функція $\varepsilon(x,t)$ задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,t) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \tag{4.2.48}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Доведення. Очевидно, що $\varepsilon(x,t) \in C^\infty(t > 0)$.

Твердження 4.2.4.1

Ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(x,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.49}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\varepsilon, \tag{4.2.50}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2t}\varepsilon, \tag{4.2.51}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^2t^2} - \frac{1}{2a^2t}\right)\varepsilon. \tag{4.2.52}$$

Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення. □

Повертаємося до доведення інтегральної тотожності:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x,t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R \to \infty}} \int\limits_{\tau}^{\infty} \iiint\limits_{U_R} \varepsilon(x,t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int\limits_{\tau}^{\infty} \iiint\limits_{U_R} \varphi(x,t) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \varepsilon \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\tau}^{\infty} \iint\limits_{S_R} a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \varphi \right) \mathrm{d}S_r \, \mathrm{d}t + \iiint\limits_{U_R} \varepsilon \, \varphi|_{\tau}^{\infty} \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= - \lim_{\tau \to 0} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,\tau) \varepsilon(x,\tau) \, \mathrm{d}x \quad (4.2.53)$$

Можна показати, що

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \, \mathrm{d}x = 1, \quad t > 0. \quad (4.2.54)$$

Твердження 4.2.4.2

$$\frac{\exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 \tau} \right\}}{\left(2a\sqrt{\pi \tau}\right)^n} \xrightarrow[\tau \to +0]{\text{w.}} \delta(x). \quad (4.2.55)$$

Доведення. Дійсно

$$\left| \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 \tau} \right\}}{\left(2a\sqrt{\pi \tau}\right)^2} (\varphi(x) - \varphi(0)) \, \mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \frac{K}{\left(2a\sqrt{\pi \tau}\right)^n} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 \tau} \right\} |x| \, \mathrm{d}x = A, \quad (4.2.56)$$

де $K = \max\limits_{x} |\varphi'(x)|$. $\square$

Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi = r/2a\sqrt{\tau}$:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{K\sigma_n}{(2a\sqrt{\pi\tau})^n} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2\tau}\right\} r^n \,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^{R/2a\sqrt{\tau}} e^{-\xi^2}\xi^n \,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}\xi^n \,\mathrm{d}\xi = \\
&= O\left(\sqrt{\tau}\right) \xrightarrow[\tau\to+0]{} 0.
\end{aligned} \tag{4.2.57}
$$

□

4.2.5 Фундаментальний розв'язок хвильового оператора

Теорема 4.2.5.1 (про фундаментальний розв'язок одновимірного хвильового оператора)

Узагальнена функція

$$
\psi_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \tag{4.2.58}
$$

є фундаментальним розв'язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \tag{4.2.59}
$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останнього виразу:

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =
$$

$$
= -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x|/a}^{\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-at}^{at} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =
$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(-x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = (\star) \quad (4.2.60)$$

Зауваження 4.2.5.1 — Зрозуміло, що третій інтеграл $= 0$, адже ми інтегруємо частинну похідну функції що не залежить від змінної x по змінній x, тобто підінтегральна функція дорівнює нулеві.

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x = at$, отримаємо

$$\begin{aligned}(\star) &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(-at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \\ &= -\frac{\varphi(0,0)}{2} - \frac{\varphi(0,0)}{2} = -\varphi(0,0).\end{aligned} \quad (4.2.61)$$

Зауваження 4.2.5.2 — Тут ми вкотре скористалися скінченністю носія φ (фінітністю пробної функції):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}\varphi(at,t) &= \\ &= \left.\frac{\varphi(at,t)}{2}\right|_{0}^{\infty} = \\ &= \frac{\varphi(a\cdot\infty,\infty) - \varphi(a\cdot 0,0)}{2} = \\ &= \frac{0-\varphi(0,0)}{2} = -\frac{\varphi(0,0)}{2}.\end{aligned} \quad (4.2.62)$$

□

Зауваження 4.2.5.3 — Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв'язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x,t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{4.2.63}$$

$$\psi_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{4.2.64}$$