Лекція 18

§2 Фундаментальні розв’язки основних диференціальних операторів

[1, стор. 198 - 207]

Нехай  - диференціальний оператор порядку вигляду

 (2.1). Розглянемо диференціальне рівняння  (2.2).

**Означення 1** Узагальненим розв’язком рівняння (2.2) будемо називати будь – яку узагальнену функцію , яка задовольняє рівняння (2.2) в розумінні виконання рівністі:  (2.3).

Рівність (2.3) рівнозначна  (2.3’),

 - спряжений оператор (2.4).

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв’язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв’язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

 (2.5),

 (2.6),

 (2.7).

**Означення 2** Узагальненіфункції  називаються фундаментальними розв’язками оператора Гельмгольца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють рівняння (2.5), (2.6), (2.7) як узагальнені функції:

 (2.5’),

 (2.6’),

 (2.7’).

Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв’язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв’язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв’язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв’язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур’є по просторовій змінній та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв’язки основних диференціальних операторів.

Фундаментальні розв’язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо оператор Лапласа . Покажемо, що для двохвимірного оператора Лапласа функція

, де  (2.8).

Є фундаментальним розв’язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння .

Останнє рівняння треба розуміти як співвідношення  (2.9).

Доведемо рівність (2.9).





Покажемо, що .

Дійсно , 

. Таким чином, першій інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері  для великого значення  теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції .

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері .



При обчисленні останнього інтегралу враховано, що . Множник  під знаком інтегралу з’являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційованість функції , здійснюючи граничний перехід при , отримаємо, що першій інтеграл прямує до нуля, а другий до значення , що і доводить рівність (2.9).

Фундаментальний розв’язок тривимірного оператора Гельмгольца



Покажемо, що для тривимірного оператора Гельмгольца функція  (2.10)
є фундаментальним розв’язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню: , яке треба розуміти як  (2.11).

Обчислимо ліву частину рівності (2.11)





Обчислимо кожний з інтегралів.

Покажемо, що .

Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою:



 

.

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

.

Таким чином першій інтеграл дорівнює нулю.

Інтеграл по сфері великого радіусу  дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції.

 Обчислимо останній поверхневий інтеграл



Таким чином рівність (2.11) доведена.

Зауважимо, що з формули (2.10) легко отримати фундаментальний розв’язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція  (2.12) задовольняє наступному рівнянню. (2.13).

Формально формула (2.12) можна отримати з (2.10) при .

Фундаментальний розв’язок двовимірного оператора Гельмгольца

Покажемо, що  (2.14)

 є фундаментальним розв’язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:

 (2.15).

У формулі (2.14) функція  - функція Бесселя другого роду уявного аргументу  - порядку і є одним з двох лінійно – незалежних розв’язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу .

Доведення (2.15) аналогічне доведенню співвідношення (2.9).

Покажемо, що (2.14) задовольняє рівняння:



Обчислимо частинні похідні 

Таким чином 

Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на  та ввести нову незалежну змінну .

При доведенні рівності (2.15) важливим є також характер поведінки фундаментального розв’язку і його першої похідної к околі точки .

Відомо, що .

Фундаментальний розв’язок оператора теплопровідності

Покажемо, що фундаментальним розв’язком оператора теплопровідності є  (2.16).

Це означає, що узагальнена функція (2.16) задовольняє інтегральній тотожності :

 (2.17).

Очевидно, що . Покажемо, що ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

. (2.18).

Обчислимо частинні похідні:   . Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення (2.18).

Покажемо справедливість (2.17).



. Можна показати, що .

Покажемо, що .

Дійсно , де

 Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: .



Фундаментальний розв’язок хвильового оператора

Покажемо, що узагальнена функція

 (2.19)
є фундаментальним розв’язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

 (2.20).

Обчислимо ліву частину виразу (2.20)





В першому та другому інтегралах введемо нову змінну , отримаємо



Таким чином формула (2.20) доведена.

Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв’язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

 (2.21).

 (2.22).